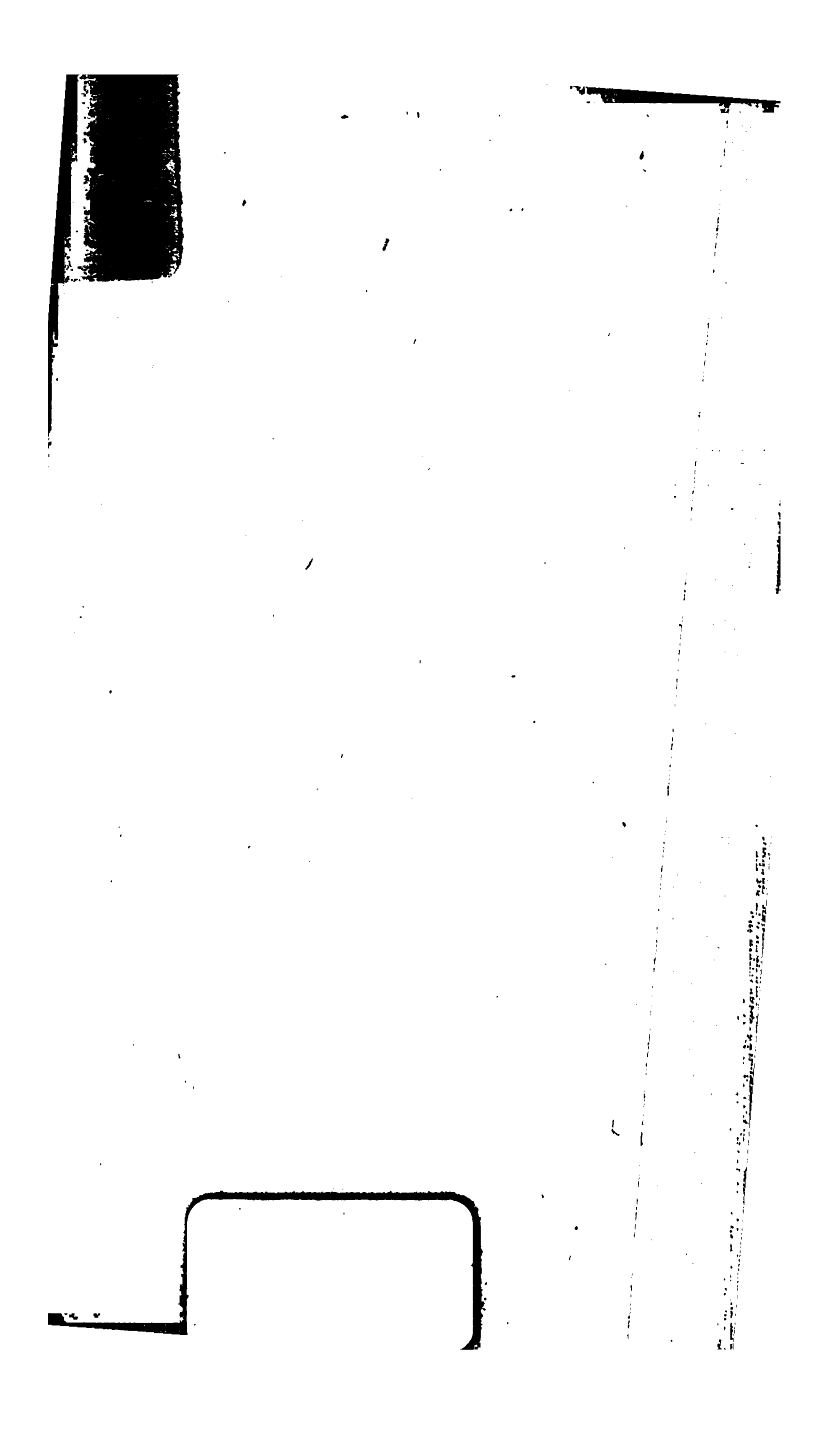
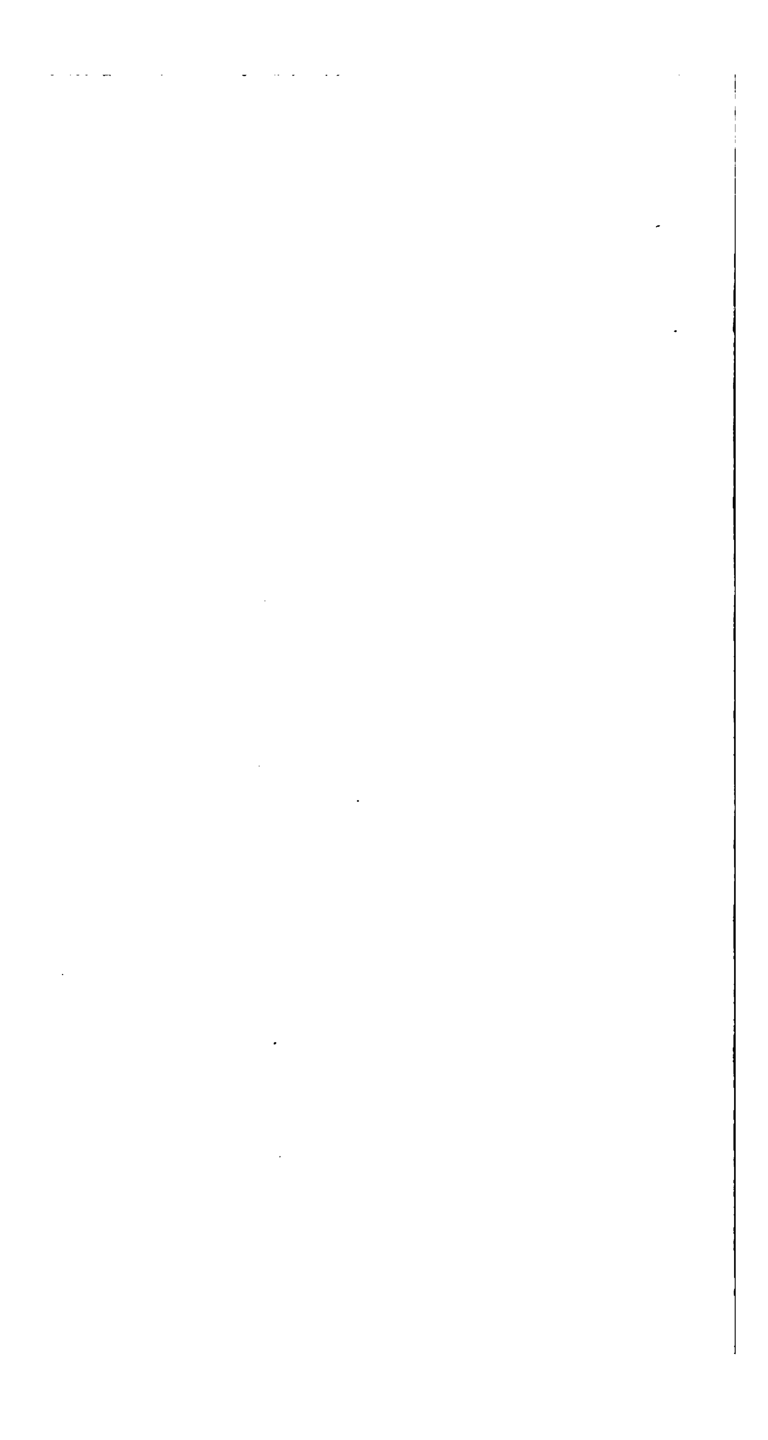






[illegible]

Gründliche und vollständige

Anleitung

zur

praktischen Stereometrie

mit besondern Anwendungen
auf die Berechnung der Maaße und Gefäße,
auf die Visirkunst, Baukunst, Fortification,
Forstwissenschaft, und andere Gegenstände
des gemeinen Lebens

von

Johann Tobias Mayer,
Königl. Großbritt. Hofrath und Professor zu
Göttingen.

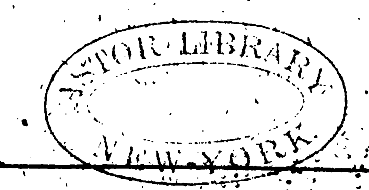
Zweyte, verbesserte Auflage.
Mit sieben Kupfertafeln.

Göttingen,
im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht.
1820.

Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie

von

Johann Tobias Mayer,
Königl. Großbritt. Hofrath und Professor zu Göttingen.



Fünfter Theil,
zweyte, verbesserte Auflage.
Mit sieben Kupfertafeln.

Göttingen,
im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht.
1820.

—

... nur

... und

... wer=

... Fall

... Oberflächen,

... Schrift

... welche

... Ent=

... durch ihr

... Natur und

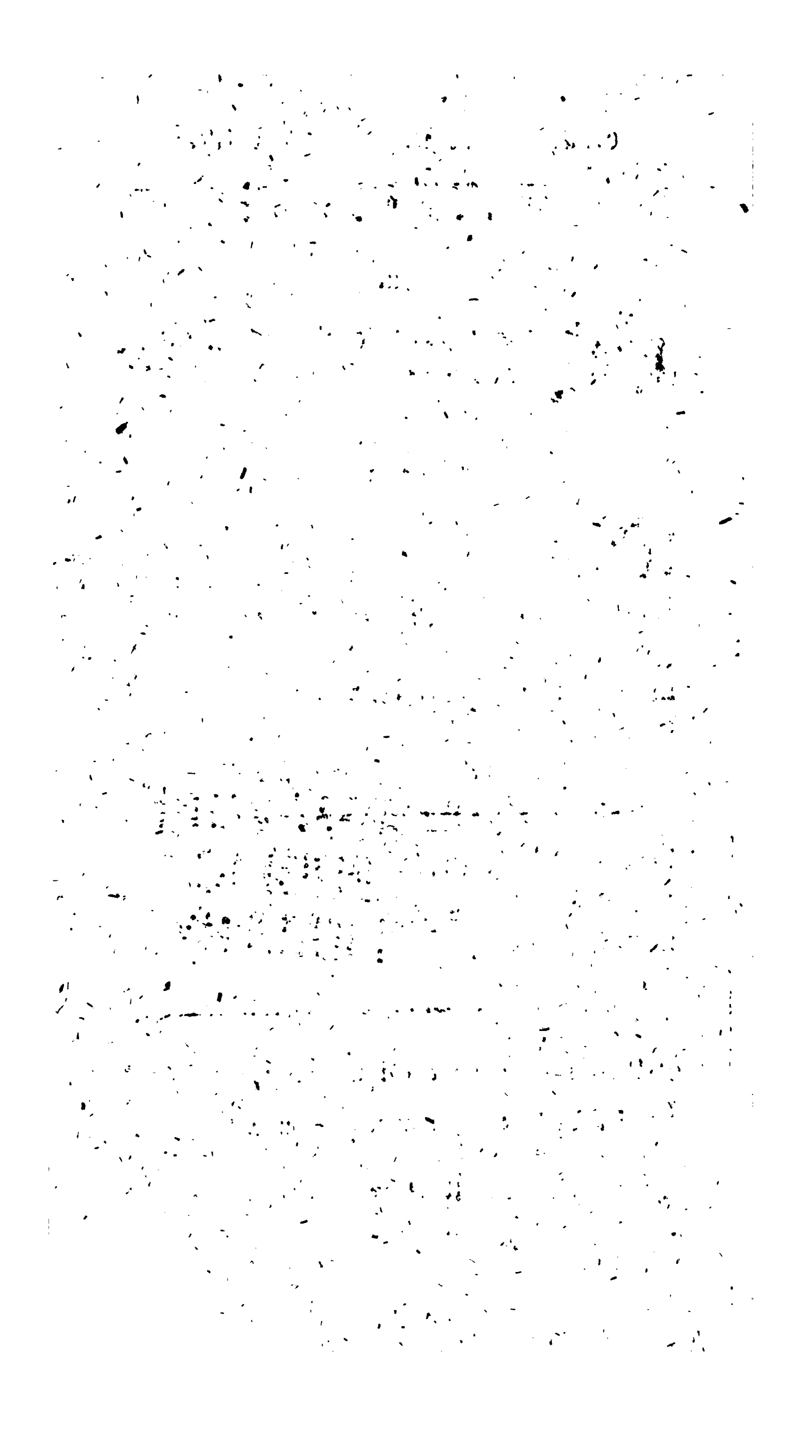
... Aufmerksam=

... Körper, phy=

... und solche

deren

Schnitte, senkrecht auf eine gewisse oder Linie, überhaupt einander ähnsind, mit mannichfaltigen Modificaen, welche von der Beschaffenheit ihrer ugenden krummen Linie abhängen, und)t auf gar zu weitläuftige für den ktischen Gebrauch ganz unnütze Vorriften führen würden. Wo aber auch ß, selbst bey einfacheren Arten von Körrn, nicht möglich war, habe ich Annärungsformeln gegeben, welche, mit gepriger Veränderung, in der körperlichen Geometrie ohngefähr eben so gebraucht verden können, wie diejenigen, welche ich m dritten Theil der praktischen Geometrie bey der Berechnung der krummlinigten Felder durch Abscissen und Ordinaten, gegeben habe, und leicht auf alle Arten von Körpern angewandt werden können. Man muß hiebey bedenken, daß in der Ausübung nicht immer der höchste Grad der Genauigkeit erforderlich ist, und daher Annäherungen dieser Art immer empfohlen werden können. Bouguer hat sich



Vorerinnerung.

Da es uns bisher noch an einer vollständigen Anleitung zur Körpermessung fehlte, so glaubte ich denen, welche so manche Gelegenheit haben, stereometrische Lehren anzuwenden, einen Gefallen zu erweisen, wenn ich ihnen die Vorschriften zur Berechnung sowohl des körperlichen Inhalts, als auch der Oberfläche der vorzüglichsten im gemeinen Leben vorkommenden Körper, in einer zweckmäßigen Ordnung, und mit beständiger Rücksicht auf die Ausübung, dergestalt vortrüge, daß sie sich zugleich von den Gründen dieser Vorschriften gehörig überzeugen, und dadurch in den Stand gesetzt werden mögten, auch für solche Fälle, welche in

dem Buche selbst nicht vorkommen, die Auflösungen gehörig zu entwickeln. Denn freylich würde ein Buch, welches sich über alle Gattungen von Körpern, so verschieden als man sich auch die Entstehungsart derselben gedenken mag, verbreiten sollte, ungemein weitläuftig ausfallen, ja größtentheils für die Ausübung selbst unbrauchbar seyn, da die genaue Bestimmung des körperlichen Raumes so oft auf Differenzialformeln führt, welche entweder gar keine Integration zulassen, oder doch nur sehr mühsam durch eine unendliche, und schlecht sich nähernde Reihe integrirt werden können. Noch mehr ist dieß der Fall bey der Bestimmung der Oberflächen. Ich habe mich daher in dieser Schrift bloß auf solche Körper beschränkt, welche sowohl durch die Einfachheit ihrer Entstehungsart, als auch vorzüglich durch ihr häufiges Vorkommen in der Natur und im gemeinen Leben, unsere Aufmerksamkeit verdienen, prismatische Körper, pyramidenförmige, runde Körper, und solche

deren

deren Schnitte, senkrecht auf eine gewisse Axe oder Linie, überhaupt einander ähnlich sind, mit mannichfaltigen Modificationen, welche von der Beschaffenheit ihrer erzeugenden krummen Linie abhängen, und nicht auf gar zu weitläuftige für den praktischen Gebrauch ganz unnütze Vorschriften führen würden. Wo aber auch dieß, selbst bey einfacheren Arten von Körpern, nicht möglich war, habe ich Annäherungsformeln gegeben, welche, mit gehöriger Veränderung, in der körperlichen Geometrie ohngefähr eben so gebraucht werden können, wie diejenigen, welche ich im dritten Theil der praktischen Geometrie bey der Berechnung der krummlinigten Felder durch Abscissen und Ordinaten, gegeben habe, und leicht auf alle Arten von Körpern angewandt werden können. Man muß hiebey bedenken, daß in der Ausübung nicht immer der höchste Grad der Genauigkeit erforderlich ist, und daher Annäherungen dieser Art immer empfohlen werden können. Bouguer hat sich

bekanntlich dergleichen schon bedient, Schiffsräume zu berechnen, wenn die Gestalt des Schiffsraumes entweder nicht genau bekannt ist, oder falls sie auch durch eine Gleichung ausgedrückt werden könnte, die Bestimmung des körperlichen Raumes doch nur auf eine sehr weitläuftige und mühsame Integration führen würde.

Ich hätte gewünscht, bey der Entwickelung der stereometrischen Lehren die höhere Analysis ganz vermeiden zu können. Aber es würden die Beweise von manchen Vorschriften ungemein weitläuftig ausgefallen seyn, wenn ich sie ohne jenes Hülfsmittel hätte darstellen wollen. Ich habe indessen nur die ersten Grundformeln der Integralrechnung vorausgesetzt, und die zusammengesetztern, deren ich bedurfte, aus jenen, so kurz als möglich, abgeleitet. Sie finden sich zusammen vor dem Anfange dieses Werkes, mit Verweisung auf diejenigen §§en des Buchs, in welchen davon Gebrauch gemacht worden ist. Finden sich Leser denen auch dieß

zu schwer ist, so müssen sich solche bloß mit dem End-Resultat einer jeden stereometrischen Untersuchung begnügen, welches, wie ich glaube, überall hinlänglich deutlich dargestellt ist. Sie können dann die gefundenen Formeln bloß als Vorschriften oder Regeln gebrauchen, nach denen sie in der Ausübung rechnen können, sobald sie nur so viel Mathematik verstehen, einen Ausdruck der in Buchstaben und mathematischen Zeichen vorgegeben ist, in Worte überzutragen, und beym Anfange einer jeden Untersuchung nur nachsehen, was für Grössen durch die Buchstaben bezeichnet worden sind, um dann die durch würkliche Ausmessung gefundenen Zahlenwerthe gehörig substituiren zu können. Hätte ich überall solche Formeln selbst in Worte übertragen wollen, so würde dadurch der Raum unnütz verschwendet worden seyn. Auch hat man einen falschen Begriff von der praktischen Behandlung einer Wissenschaft, wenn man glaubt, daß solche in wörtlichen Regeln bestehen muß.

 So

So habe ich denn auch, um Raum zu ersparen nur wenig Zahlenbeyspiele gegeben. Dieß nöthigt mich, ein für allemahl zu erinnern, daß wenn logarithmische Grössen in Formeln vorkommen, welche sich durch die Integralrechnung ergeben haben, man darunter allemahl die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen verstehen muß. Will man statt derselben die gewöhnlichen oder briggischen Logarithmen nehmen, so war ein einziges Zahlenbeyspiel wie das (§. 58. XI. 5.) hinlänglich, den mechanischen Rechner zu belehren, wie er auch in andern ähnlichen Fällen verfahren müßte.

Viele stereometrische Untersuchungen führen auf Rectificationen und Quadraturen von krummen Linien. Ich fand daher nöthig auch von diesen gehörigen Orts zu handeln. In den meisten Fällen kommt man bey den Rectificationen auf Differenziale die nicht anders als durch unendliche Reihen integrabel sind. Wenn sich diese zu langsam nähern, läßt sich

kein

kein practischer Gebrauch davon machen. Ich hielt es also nicht für unnütz, auch anderer Rectificationsmethoden zu erwähnen, und man wird aus dem Beyspiele des elliptischen Bogens §. 61. S. 9. ersehen, daß das von mir gewählte Verfahren der directen Rectificationsmethode (§. 57.) bey weitem vorzuziehen ist, und sich vortheilhaft selbst auf die Berechnung krummer Flächen, z. B. der Oberfläche eines schiefen Cylinders, eines schiefen Kegels u. d. gl. anwenden läßt, wie man an den gehörigen Orten selbst mit mehreren nachsehen kann. Bey der Oberfläche des schiefen Kegels, worüber bereits so vieles, vielleicht meist unbrauchbares, geschrieben worden ist, habe ich gezeigt, wie auch noch andere Annäherungsmethoden mit gutem Erfolg angewandt werden können. Es ist nicht überflüssig allerley Hülfsmittel zu kennen, weil sich solche mit der gehörigen Veränderung auch bey anderen krummen Flächen benützen lassen.

Von

Von der mannichfaltigen Anwendung stereometrischer Lehren, brauche ich wohl hier nicht zu reden. Die letzten Kapitel dieses Buches enthalten genug Beyspiele davon. Bey der Berechnung des körperlichen Raumes der Gewölbe wird man finden, daß ich mehrere hieher gehörige schwere Fälle möglichst deutlich zu entwickeln bemüht gewesen bin. Von der Visirkunst habe ich dasjenige vorgetragen, was vorzüglich für die Ausübung von Nutzen zu seyn scheint. Ueberall setze ich übrigens die Lehre von der Lage der Linien und Ebenen, so wie überhaupt die ersten Gründe der theoretischen Stereometrie, als bekannt voraus, weil man ohne diese vielleicht kaum manche Figuren richtig verstehen wird. — Was mir in dem ganzen Buche eigen ist, werden Kenner ohne mein Erinnern von selbst finden.

Göttingen, im September 1808.

Joh. Tob. Mayer.

Vorbericht zur zweyten Auflage.

Ich habe bey dieser neuen Auflage nicht nöthig gefunden, das Werk noch mit vielen Zusätzen zu vermehren, da ihm an der Vollständigkeit nichts wesentliches, für die Ausübung brauchbares, abgehet. Doch sind hin und wieder einige Stellen verbessert, und noch verschiedene litterärische Notizen hinzugefügt worden. Ich bemerke nur noch, daß mehrere Aufgaben z. B. §§. 57. 92 u. a., wobey schwierige Integrationen statt finden würden, sich auch nach der in meinem Vollständigen Lehrbegriff der höhern Analysis, (Göttingen bey Vandenhoek u. Ruprecht 1818) im

im zweyten Theile §. 202 ꝛc. gegebenen Annäherungsmethode, bequem bewerkstelligen lassen, welches jedoch hier keiner weitern Erläuterung bedarf, wenn man sich mit dem Geiste der angeführten Methode gehörig bekannt gemacht hat.

Göttingen, im Januar 1820.

Joh. Tobias Mayer.

Inhalt

Inhalt der Lehrsätze
aus
der Trigonometrie und Integralrechnung.

Einleitung.

Anwen=

Inhalt der Stereometrie.

Erstes Kapitel.

Holz-

Zweytes Kapitel.

Fern

Drittes Kapitel.

Allge-

Ober=

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Be

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] in [illegible]

[illegible]

[illegible] wenn sich [illegible]

[illegible]

Sieben=

Siebentes Kapitel.

Achtes Kapitel.

Kloster-

Neuntes Kapitel.

Ovale

Zehntes Kapitel.

Aller-

Einige

Einige trigonometrische Sätze und Integralformeln, welche in dieser Schrift vorkommen.

§. 1.

Wenn φ einen gewissen Kreisbogen oder Winkel für den Halbmesser 1 bedeutet, und $\sin\varphi = m$, also $\cos\varphi = \sqrt{(1-m^2)}$ ist, so bedeute in der Folge der Ausdruck Bog sin. m, oder auch schlechtweg B sin m allemahl so viel als der Bogen dessen Sinus = m ist. Noch deutlicher könnte man dies auch durch Bog sin (= m) oder B sin (= m) ausdrücken. Aber es ist gewöhnlich, das = Zeichen wegzulassen, und durch B. allemahl den Bogen zu verstehen, dem die hinter dem Worte sin stehende Grösse als Sinus zukömmt. So sind auf eine ähnliche Art auch die Ausdrücke B cos m B tang m u. d. gl. zu verstehen, worunter man also die Bögen oder Winkel verstehet, deren Cosinus = m, oder Tangente = m seyn würde.

Die Ausdrücke Arc. sin m, Arc. cos m u. s. w. sind mit den angeführten von gleicher Bedeutung, von Arcus, Bogen.

§. II.

Ist also $\sin\varphi = m$; $\cos\varphi = \sqrt{(1 - m^2)}$ so hat man umgekehrt

$$\varphi = \text{Bog} \sin m = \text{Bog} \cos \sqrt{(1 - m^2)}$$

§. III.

Ist für einen andern Bogen ψ

$\sin\psi = n$, also $\cos\psi = \sqrt{(1 - n^2)}$ so hat man eben so

$$\psi = \text{Bog} \sin n = \text{Bog} \cos \sqrt{(1 - n^2)}$$

§. IV.

Weil $\tang\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{m}{\sqrt{(1 - m^2)}}$ so hat man auch umgekehrt

$$\varphi = \text{Bog} \tang \frac{m}{\sqrt{(1 - m^2)}}$$

Also

$$\varphi = \text{B} \sin m = \text{B} \cos \sqrt{(1 - m^2)}$$
$$= \text{B} \tang \frac{m}{\sqrt{(1 - m^2)}}$$

welche Ausdrücke denn alle einerley bedeuten.

§. V.

Wegen

$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi \cos\psi + \sin\psi \cos\varphi$ (II. III.)

$= m\sqrt{(1-n^2)} + n\sqrt{(1-m^2)}$

Würde man demnach auch umgekehrt sagen können

$\varphi+\psi = \mathfrak{B}\sin(m\sqrt{(1-n^2)} + n\sqrt{(1-m^2)})$, oder (§. II. III.)

$\mathfrak{B}\sin m + \mathfrak{B}\sin n = \mathfrak{B}\sin(m\sqrt{(1-n^2)} + n\sqrt{(1-m^2)})$

Und eben so

$\mathfrak{Bog}\sin m - \mathfrak{B}\sin n = \mathfrak{B}\sin(m\sqrt{(1-n^2)} - n\sqrt{(1-m^2)})$

Diese und mehr andere Ausdrücke sind in der Analysis oft von sehr erheblichen Nutzen.

§. VI.

Aufgabe. Das Integral von $du\sqrt{(1+u^2)}$ zu finden.

Aufl. 1. Um die Irrationalität wegzuschaffen, setze man $\sqrt{(1+u^2)} = z - u$; so wird, auf beyden Seiten quadrirt, $u = \frac{z^2-1}{2z}$;

also $du = \frac{1}{2}\frac{(z^2+1)dz}{z^2}$, ferner $\sqrt{(1+u^2)}$

oder $z - u = z - \frac{z^2-1}{2z} = \frac{z^2+1}{2z}$;

demnach

du

$du\sqrt{(1+u^2)} = \frac{(z^2+1)^2}{4z^3}dz = \frac{1}{4}z\,dz + \frac{1}{2}\frac{dz}{z} + \frac{1}{4}\frac{dz}{z^3}$

2. Also integrirt

$\int du\sqrt{(1+u^2)} = \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{2}\log z$

$= \frac{1}{8}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2}\log z$

$= \frac{1}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\log z$

3. Nun ist aber $z = u + \sqrt{(1+u^2)}$;

$\frac{1}{z} = \frac{1}{u+\sqrt{(1+u^2)}} = -u + \sqrt{(1+u^2)}$

wenn man des Bruchs $\frac{1}{u+\sqrt{(1+u^2)}}$ Zähler und Nenner mit $-u+\sqrt{(1+u^2)}$ multiplicirt.

4. Werden diese Werthe substituirt, so erhält man $z - \frac{1}{z} = 2u$; $z + \frac{1}{z} = 2\sqrt{(1+u^2)}$ und folglich das verlangte Integral

$\int du\sqrt{(1+u^2)} = \frac{1}{2}u\sqrt{(1+u^2)} + \frac{1}{2}\log(u+\sqrt{(1+u^2)})$

wo unter dem Logarithmen der natürliche verstanden werden muß.

§. VII.

§. VII.

Aufgabe. Das Integral von $du\sqrt{(1-u^2)}$ zu finden.

Aufl. In Tab. VII. Fig. 85. sey des Kreises um C Halbmesser = 1, und die Abscisse CB = u, so ist die Ordinate y = PM = $\sqrt{(1-u^2)}$. Das Stück Fläche zwischen der Ordinate PM, und dem damit parallel gezogenen Halbmesser CE d. h. das Stück Fläche CPME nenne man S, so ist, wenn man pm unendlich nahe an PM zieht, PMpm = y du das Differenzial von S; demnach

$$dS = du\sqrt{(1-u^2)}$$

Also das Integral

$$\int du\sqrt{(1-u^2)} = S$$

2. Zieht man nun CM, so ist
$S = \Delta MPC +$ Kreisausschnitt CME

3. Aber
$\Delta MPC = \frac{1}{2} PM.CP = \frac{1}{2} u\sqrt{(1-u^2)}$ (1)
und Kreisausschnitt CME = dem halben Radius CM multiplicirt in den Bogen ME dessen Sinus MQ = PC = u ist. Aber wegen CM = 1, wird dieser Kreisausschnitt = $\frac{1}{2}$ 𝔅 sin u.

4. Demnach das Integral
$\int du\sqrt{(1-u^2)} = \frac{1}{2} u\sqrt{(1-u^2)} + \frac{1}{2}$ 𝔅 sin u
wo also 𝔅 sin u einen Bogen dessen Sinus = u für den Halbmesser 1 bedeutet. (§. I.)

§. VIII.

Aufgabe. Das Integral von $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$ zu finden.

Aufl. Aus Trig. §. XVIII. im zweyten Theil meiner practischen Geometrie, ist

$$d \sin a = d a \cos a$$

Also $\frac{d \sin a}{\cos a} = da.$

Man setze $\sin a = u$, also $\cos a = \sqrt{(1-u^2)}$, so ist $a = \mathfrak{B} \sin u$. Demnach

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = d. \mathfrak{B} \sin u$$

Mithin $\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \mathfrak{B} \sin u.$

§. IX.

Aufgabe. Das Integral von $\frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}}$ zu finden.

Aufl. Man setze $\sqrt{(1-u^2)} = z$, so wird $udu = -zdz$, und

$$\int \frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}} = -z$$

d. h. $\int \frac{udu}{\sqrt{(1-u^2)}} = -\sqrt{(1-u^2)}$,

wie auch aus der Differenziation erhellet.

§. X.

§. X.

Die (VI–IX.) gefundenen Integrale sind Fundamentalformeln, aus denen sich eine große Menge von andern, welche eine weit größere Allgemeinheit haben, durch eine leichte Substitution herleiten läßt. Zum Behuf der in diesem Buche vorkommenden Differenziale, deren Integrale verlangt werden, sollen folgende allgemeinere Formeln aus den gefundenen abgeleitet werden.

§. XI.

1. Man setze in das Integral (§. VI. 4.) $u = \frac{a + bx}{c}$ wo a, b, c beliebige unveränderliche Grössen bedeuten sollen, so wird $du = \frac{b}{c} dx$, und $\sqrt{(1 + u^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)}}{c}$

Substituirt man diese Werthe in das (§. VI. 4.) gefundene Integral, so wird

$$\int dx \sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)} = \frac{a + bx}{2b} \times \sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)} + \frac{c^2}{2b} \times \log \frac{a + bx + \sqrt{(a^2 + c^2 + 2abx + b^2x^2)}}{c}$$

2. Nun setze man der Kürze halber
$a^2+c^2=A$; $2ab=B$; $b^2=C$, so wird
$b=\sqrt{C}$; $a=\frac{B}{2\sqrt{C}}$; $c=\frac{\sqrt{(4AC-B^2)}}{2\sqrt{C}}$,
demnach durch eine leichte Substitution in (1)
$\int dx\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}=$

$$\frac{2Cx+B}{4C}\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$$

$$+\frac{4AC-B^2}{8C\sqrt{C}}\times$$

$$\log\frac{2Cx+B+2\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}{\sqrt{(4AC-B^2)}}$$

Diese Integralformel kömmt in der Ausübung sehr häufig vor, und pflegt sonst wohl auf eine etwas weitläuftige Art bewiesen zu werden.

§. XII.

Bekanntlich muß zu einem jeden Integrale noch eine aus den Umständen der Aufgabe zu bestimmende beständige Grösse, welche mit Const bezeichnet zu werden pflegt, hinzu addirt werden.

Soll z. B. das (XI.) gefundene Integral so bestimmt werden, daß es für $x=0$ verschwinde, so muß die

$$\text{Const}=-\frac{B\sqrt{A}}{4C}-\frac{4AC-B^2}{8C\sqrt{C}}\log\frac{B+2\sqrt{C}\sqrt{A}}{\sqrt{(4AC-B^2)}}$$

seyn, wie man leicht finden wird.

Man

Man addire also diese Const zu dem Integrale (§. XI.) so wird

$$\int dx \sqrt{(A+Bx+Cx^2)} = \frac{-B\sqrt{A}+(2Cx+B)\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}{4C}$$

$$+\frac{4AC-B^2}{8C\sqrt{C}} \times$$

$$\log\frac{2Cx+B+2\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}{B+2\sqrt{C}\sqrt{A}}$$

dieses Integral verschwindet also offenbar für $x = 0$.

§. XIII.

Anwendungen dieser Formel findet man in gegenwärtigen Buche.

1) In (§. 41. 2.) wo sich die (XII.) gefundene Formel in das dortige Integral $\int dx \sqrt{(ax+x^2)}$ verwandelt, wenn man in (XII.) $A=0$; $B=a$; $C=1$ setzt.

2) In (§. 56. 2.) erhält man das Integral $\int dy \sqrt{(b^2+4y^2)}$ wenn man in (XII.) $x=y$; $A=b^2$; $B=0$; $C=4$ setzt.

3) In (§. 71. 2.) das dortige Integral $\int dx \sqrt{\left(1+\frac{e^2}{c^2} \cdot x^2\right)}$ wenn man in (XII.)

$A=1$; $B=0$; $C=\frac{e^2}{c^2}$ setzt.

Und (§. 71. 15.) wenn man $x = v$; $A = 0$; $B = a$; $C = 4$ setzt.

4) In (§. 114. 9.) das dortige Integral $\int dy \sqrt{(by + 4y^2)}$ wenn man $x = y$; $A = 0$; $B = b$; $C = 4$ setzt.

5) Für das Integral (§. 115. 13.) setzt man $A = 1$; $B = 0$; $C = \frac{4a^2 e^2}{c^4}$.

6) Für das Integral (§. 116. 5.) wird $A = e^2$; $B = 4a^2 e^2$; $C = 4e^2$.

7) Für das in (§. 116. 6.) ist $A = c^2$; $B = 0$; $C = 4$.

8) Für das in (§. 116. 10.) hat man $A = c^4$; $B = 0$; $C = 4(a^2 + c^2)$.

§. XIV.

Man setze in das Integral (§. VII.) wie in (XI.) $u = \frac{a + bx}{c}$, so wird

$$\sqrt{(1 - u^2)} = \frac{\sqrt{(c^2 - a^2 - 2abx - b^2x^2)}}{c}$$

und $\int du \sqrt{(1 - u^2)}$ nach gehöriger Substitution

$$\int dx \sqrt{(c^2 - a^2 - 2abx - b^2x^2)} =$$

$$= \frac{a + bx}{2b} \sqrt{(c^2 - a^2 - 2abx - b^2x^2)} +$$

+

$$+\frac{c^2}{2b}\,\text{Bog sin}\,\frac{a+bx}{c}$$

Jetzt setzt man der Kürze halber $c^2 - a^2 = A$; $-2ab = B$; $b^2 = C$, so erhält man

$$b = \sqrt{C};\; a = -\frac{B}{2\sqrt{C}};\; c = \frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{2\sqrt{C}}$$

und folglich

$$\int dx \sqrt{(A + Bx - Cx^2)} =$$

$$= \frac{2Cx - B}{4C}\sqrt{(A+Bx-Cx^2)} +$$

$$+ \frac{B^2+4AC}{8C\sqrt{C}}\,\text{B sin}\,\frac{2Cx-B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$$

In dieser Allgemeinheit eine ebenfalls sehr nützliche Integralformel.

§. XV.

1. Soll dieß Integral für $x = 0$ verschwinden, so muß die beständige Grösse

$$\text{Const} = \frac{B\sqrt{A}}{4C} + \frac{B^2+4AC}{8C\sqrt{C}}\,\text{B sin}\,\frac{B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$$

seyn.

2. Da nun diese zu dem (XIV.) gefundenen Integrale hinzu addirt werden muß, so müssen hier die zwey Bögen

$$\text{Bog sin}\,\frac{2Cx-B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}\;\text{und B sin}\,\frac{B}{\sqrt{(B^2+4BC)}}$$

zusammen gerechnet werden.

Man

Man nenne also

$$\frac{2Cx-B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}=m;\quad \frac{B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}=n$$

so hat man (V.)

$$\mathfrak{B}\sin m+\mathfrak{B}\sin n=\mathfrak{B}\sin\left(m\sqrt{(1-n^2)}+n\sqrt{(1-m^2)}\right)$$

Nun ist $\sqrt{(1-n^2)}=\frac{2\sqrt{C}\sqrt{A}}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$

$$\sqrt{(1-m^2)}=\frac{2\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{\sqrt{(B^2+4AC)}}$$

Also diese Werthe substituirt.

$$\mathfrak{B}\sin\frac{2Cx-B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}+\mathfrak{B}\sin\frac{B}{\sqrt{(B^2+4AC)}}=$$

$$\mathfrak{B}\sin\frac{2(2Cx-B)\sqrt{AC}+2B\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{B^2+4AC}$$

Mithin das Integral $\int dx\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}=$

$$\frac{B\sqrt{A}+(2Cx-B)\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{4C}+$$

$$+\frac{B^2+4AC}{8C\sqrt{C}}\times$$

$$\mathfrak{B}\sin\frac{(2Cx-B)2\sqrt{AC}+2B\sqrt{C}\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}}{B^2+4AC}$$

wenn es für $x=0$ verschwinden soll.

§. XVI.

Anwendungen dieser allgemeinen Formel auf specielle Fälle findet man in folgenden §§en dieses Buches.

1) In (§. 33. XII.) setzt man um das dortige Integral $\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$ zu finden in die Formel (XV.) $A = r^2$; $B = 0$; $C = 1$; so wird das Integral $= \frac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)}$ $+ \frac{1}{2} r^2$ 𝔅 sin $\frac{x}{r}$.

2) Für das Integral $\int dx \sqrt{(ax - x^2)}$ in §. 40. 1. setzt man in die allgemeine Formel $A = 0$; $B = a$; $C = 1$;

3) Für das Integral §. 47. 1. ist $A = \frac{1}{4} a^2$; $B = 0$; $C = 1$

4) Für das Integral §. 71. 9. ist $A = 1$; $B = 0$; $C = \frac{e^2}{a^2}$

5) Für das Integral §. 115. 8. ist $A = 1$; $B = 0$; $C = \frac{4e^2}{a^2}$

6) Für das Integral §. 115. 23. ist $x = w$; $A = c^2$; $B = 4e^2 a$; $C = 4e^2$

7) Für das Integral §. 117. 4. ist $A = a^2$; $B = 0$; $C = 4$

8) Für das Integral §. 126. 9. ist $A = a^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \alpha^2$; $B = 0$; $C = 1$

9) Für

Nun setze man $y = x - r$, so verwandelt sich $ydy\sqrt{(r^2 - y^2)}$ in $(x-r)dx\sqrt{(2rx - x^2)}$. Also

$$\int(x-r)dx\sqrt{(2rx-x^2)} = -\tfrac{1}{3}(2rx-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Mithin

$$\int xdx\sqrt{(2rx-x^2)} = -\tfrac{1}{3}(2rx-x^2)^{\frac{3}{2}} + r\int dx\sqrt{(2rx-x^2)}$$

Aber $\int dx\sqrt{(2rx-x^2)}$ erhält man aus §. XV., wenn man dorten $A=0$; $B=2r$, und $C=1$ setzt, nemlich

$$\int dx\sqrt{(2rx-x^2)} = -\frac{(r-x)}{2}\sqrt{(2rx-x^2)} + \tfrac{1}{2}r^3\,\text{B}\sin\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r}$$

Demnach

$$\int xdx\sqrt{(2rx-x^2)} = -\tfrac{1}{3}(2rx-x^2)\sqrt{(2rx-x^2)} - \tfrac{1}{2}r(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)} + \tfrac{1}{2}r^3\,\text{B}\sin\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r}$$

Man könnte aus diesem Integrale leicht noch ein allgemeineres z. B. $\int xdx\sqrt{(A+Bx-Cx^2)}$ durch ein Verfahren, wie oben, ableiten. Da aber in gegenwärtigen Buche kein anderer specieller Fall als der (§. 34. IV. 4.) vorkömmt, so will ich es bey diesem bewenden lassen. Das gefundene verschwindet für $x=0$, wie es die Aufgabe mit sich bringt, bey der es vorkömmt.

§. XX.

§. XX.

1. **Aufgabe.** Das Integral von $\frac{xdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ (§.71. 19.) zu finden.

Auflösung. 1. Es ist $\int \frac{ydy}{\sqrt{(r^2-y^2)}} = -\sqrt{(r^2-y^2)}$; Nun setze man $y=r-x$, so ist $dy=-dx$; und $\sqrt{(r^2-y^2)} = \sqrt{(2rx-x^2)}$. Mithin, diese Werthe substituirt $\int \frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \sqrt{(2rx-x^2)}$

2. Folglich

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = -\sqrt{(2rx-x^2)} + r\int \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

3. Die Integration des vorgegebenen Differenzials hängt also von der Integration der Formel $\frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ ab, welche aus der Formel §. VIII. auf folgende Art erhalten wird.

4. Man setze in die dortige Formel $u=\frac{x}{r}-1$ so wird $du=\frac{dx}{r}$ und

$$\sqrt{(1-u^2)} = \sqrt{\left(\frac{2x}{r}-\frac{x^2}{r^2}\right)}$$

5. Demnach $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

folglich (§. VIII.)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \mathfrak{B}\,\sin u$$

und wegen $u = \frac{x-r}{r}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \mathfrak{B}\sin\frac{x-r}{r} = -\mathfrak{B}\sin\frac{r-x}{r}$$

Soll dieß Integral für $x=0$ verschwinden, so ist die beständige Grösse $= \mathfrak{B}\sin\frac{r}{r} = \mathfrak{B}\sin 1 = 90^0$; demnach

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = 90^0 - \mathfrak{B}\sin\frac{r-x}{r} = \mathfrak{B}\cos\frac{r-x}{r}$$

$$= \mathfrak{B}\sin\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r}$$

6. Hieraus wird also (2)

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = -\sqrt{(2rx-x^2)}$$

$$+ r\,\mathfrak{B}\sin\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r}$$

§. XXI.

Aus (§. XX. 6.) hat man also auch das Integral der Formel (§. 130. 17.). Wenn man $x = t$; und $r = \alpha$ setzt.

§. XXII.

§. XXII.

Aufgabe. Das Integral von $\frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ (§. 121. 4.) zu finden.

Aufl. Man setze in die Formel (§. VIII.) $u = \frac{y}{a}$ so ist $du = \frac{dy}{a}$; und $\sqrt{(1-u^2)} = \frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{a}$; Also

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$$; Und

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \mathfrak{B} \sin u \text{ d. h.}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \mathfrak{B} \sin \frac{y}{a}.$$

Soll dieß Integral für $y = 0$ verschwinden, so ist weiter keine Const. hinzu zu addiren.

2. Setzt man $y = x$, und $a = r$, so erhält man das Integral §. 130. XII.

§. XXIII.

Aufg. Das Integral $\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ (§. 121. 4.) zu finden.

$$= \frac{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}u}{-4} + \tfrac{3}{8}a^2 u\sqrt{(a^2-u^2)}$$

$$+ \tfrac{3}{8}a^4 \mathfrak{B}\sin\frac{u}{a}$$

(§.XVI. 1.) das dortige $r = a$ und $x = u$ gesetzt. Soll dieß Integral für $u = 0$ verschwinden, so ist weiter keine Const hinzu zu setzen.

Für $u = a$, wird der Werth des Integrals $= \tfrac{3}{8} a^4 \mathfrak{B} \sin 1 = \tfrac{3}{8} a^4 . \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{16} a^4 . \pi$. wenn wie immer π die Ludolphische Zahl $= 3,141592\ldots$ bezeichnet.

§. XXVI.

Aufgabe. Das Differenzial $d\varphi \sin\varphi^m$ zu integriren, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet.

Aufl. 1. Nach den ersten Gründen der Differenzialrechnung ist

$$d(xy) = ydx + xdy$$

wenn x und y nach Gefallen ein paar veränderliche Grössen bezeichnen.

2. Folglich $xy = \int ydx + \int xdy$ oder

$$\int ydx = yx - \int xdy.$$

3. Nun läßt sich das vorgegebene Differenzial $d\varphi \sin \varphi^m$ auch so ausdrücken

$$d\varphi \sin\varphi . \sin\varphi^{m-1}$$

Man

Man setze demnach der Kürze halber

$$\sin\varphi^{m-1} = y$$
$$d\varphi \sin\varphi = dx$$

so ist $x = \int d\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi$ wie ebenfalls aus den ersten Elementen der Differenzialrechnung bekannt ist.

Ferner hat man auch

$$dy = (m-1) \sin\varphi^{m-2}\, d \sin\varphi$$
$$= (m-1) \sin\varphi^{m-2}\, d\varphi \cos\varphi$$

weil $d \sin\varphi = d\varphi \cos\varphi$

4. Substituirt man diese Werthe in die Integralformel (2), so erhält man $\int y dx$ oder

$$\int d\varphi . \sin\varphi^m = - \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi + (m-1) \int d\varphi \cos\varphi^2 \sin\varphi^{m-2}$$

5. Man setze in das letzte Glied des Ausdrucks rechter Hand des Gleichheitszeichens $1 - \sin\varphi^2$ statt $\cos\varphi^2$ so wird erstlich

$$\int d\varphi \cos\varphi^2 \sin\varphi^{m-2} = \int d\varphi \sin\varphi^{m-2} - \int d\varphi \sin\varphi^m$$

und dann (4.)

$$\int d\varphi \sin\varphi^m = - \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi + (m-1) \int d\varphi \sin\varphi^{m-2} - (m-1) \int d\varphi \sin\varphi^m$$

Woraus denn leicht durch Herüberschaffung des letzten Gliedes rechter Hand des Gleichheitzeichens auf die linke Seite, folgt

$$\int d\varphi \sin\varphi^m = -\frac{\sin\varphi^{m-1}\cos\varphi}{m}$$
$$+\frac{m-1}{m}\int d\varphi \sin\varphi^{m-2}$$

6. Aus dieser Formel erhellet denn, daß wenn das Integral von $d\varphi \sin\varphi^{m-2}$ bekannt ist, auch dasjenige von $d\varphi \sin\varphi^m$ gefunden ist.

7. Ex. Für $m=2$ ist

$$\int d\varphi \sin\varphi^2 = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}\int d\varphi \sin\varphi^0$$
$$= -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}\int d\varphi$$
$$= -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \tfrac{1}{2}\varphi$$

8. Für $m=4$ wird

$$\int d\varphi \sin\varphi^4 = -\frac{\sin\varphi^3\cos\varphi}{4} + \tfrac{3}{4}\int d\varphi \sin\varphi^2$$

Substituirt man in diesen Ausdruck statt $\int d\varphi \sin\varphi^2$ den bereits (7) gefundenen Werth, so erhält man

$$\int d\varphi \sin\varphi^4 = -\tfrac{1}{4}\sin\varphi^3\cos\varphi - \frac{1.\ 3}{2.\ 4}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+\frac{1.\ 3}{2.\ 4}\varphi$$

9. Man

9. Man setze $\varphi = 6$ so wird

$$\int d\varphi \sin\varphi^6 = -\tfrac{1}{6}\sin\varphi^5 \cos\varphi + \tfrac{5}{6}\int d\varphi \sin\varphi^4$$

Und wenn man statt $\int d\varphi \sin\varphi^4$ den (8) gefundenen Werth substituirt

$$\int d\varphi \sin\varphi^6 = -\tfrac{1}{6}\sin\varphi^5 \cos\varphi - \frac{1.\,5}{4.\,6}\sin\varphi^3 \cos\varphi$$

$$-\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\sin\varphi \cos\varphi + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\varphi$$

Dieß sind die Integrale von denen §. 57. die Anwendung vorkömmt. Das Gesetz, nach welchem die einzeln Integraltheile fortgehen, läßt sich aus dem angeführten leicht ableiten. Es ist überflüssig, solches hier in einer allgemeinen Formel darzustellen.

Stereometrie.

Erstes Kapitel.

Von den zur Ausmessung körperlicher Räume eingeführten Maaßen, von deren Verhältnissen, absoluten Grössen und Abtheilungen.

§. 1.

Wenn gleich im gemeinen Leben mancherley Maaße zur Bestimmung des körperlichen Raumes, den gewisse Dinge einnehmen, eingeführt sind, z. B. Kornmaaße, Holzmaaße, Maaße für flüssige Dinge u. dergl. und diese bürgerlichen Maaße in sehr verschiedenen Gestalten z. B. als Cylinder, Parallelepipeden, Kegel, abgekürzte Kegel u. dergl. vorkommen, so gründen sie sich doch sämtlich immer auf ein gewisses geometrisches Cubikmaaß, welches jederzeit einen Würfel darstellt, dessen Seitenlinie nach einem bekannten Längenmaaße z. B. dem landesüblichen Fuße, oder Theilen dessel-

desselben angegeben wird, wobey denn diese Theile entweder Decimal- oder Duodecimaltheile des Fußes seyn können. Aber bey der Decimaltheilung des Längenmaaßes, deren sich der Geometer allemahl bedient, sind alle Berechnungen körperlicher Räume weit bequemer, als bey irgend einer andern Eintheilung desselben.

§. 2.

Man gedenke sich einen Würfel, dessen Seitenlinie einer Ruthe, oder einem Fuße, oder einem Zolle u. s. w. gleich ist, so führt ein solcher Würfel den Nahmen einer Cubikruthe, eines Cubikfußes, Cubikzolles u. s. w. Bedient man sich der Decimaleintheilung des Längenmaaßes, nach welchem die Seitenlinie eines solchen Würfels genommen wird, so erhält man Decimal-Cubikfuße, Cubikzolle u. s. w., und so bey der Duodecimaleintheilung Duodecimalcubikfuße, Cubikzolle rc. Jene wollen wir mit F^3, Z^3, L^3, diese mit f^3, z^3, l^3, bezeichnen, wo L^3, l^3 Cubiklinien bedeuten.

Wird nun die Seitenlinie eines Würfels in 10 gleiche Theile getheilt, so enthält ein solcher Würfel 10. 10. 10 oder 1000 solcher kleinerer Würfel, deren Seitenlinie nur einem solchen Zehntheilchen der Seite des grössern Würfels gleich seyn würde. Also ist z. B.

$F^3 = 1000 Z^3$ oder 1 Cubikfuß
= 1000 Cubikzollen
$Z^3 = 1000 L^3$ oder 1 Cubikzoll
= 1000 Cubiklinien

Und eben so bey der Duodecimaleintheilung
$f^3 = 12. 12. 12. z^3 = 1728. z^3$
$z^3 = 12. 12. 12. l^3 = 1728. l^3$ u. s. w.

Die Unbequemlichkeit, daß bey der Duodecimaleintheilung des Längenmaaßes allemahl 1728 kleinere Würfel-einheiten eine nächst grössere ausmachen, empfiehlt offenbar die bey den Geometern übliche Decimaleintheilung des Längenmaaßes, welche wir denn auch allemahl beybehalten werden, wenn nicht besondere Rücksichten auf Fälle des gemeinen Lebens die Duodecimaleintheilung erforderlich machen.

§. 3.

Aus dem bisherigen ergiebt sich, bey beyden Arten von Eintheilungen, die Reduction der höhern oder grössern Würfeleinheiten auf die niedrigern und so umgekehrt. Z. B. bey der Decimaltheilung

$34750632. L^3 = 34750 Z^3 + 632 L^3 = 34 F^3 + 750 Z^3 + 632 L^3$, welches man auch gewöhnlich so zu bezeichnen pflegt
$34750632''' = 34' 750'' 632'''$ Decimalmaaß wo wenn von Cubikmaaß die Rede ist, die Bezeich-

zeichnungen '; ''; '''; '''' u. s. w. nicht die Bedeutung wie bey dem Längenmaaße haben.

2. Bey der Duodecimaleintheilung ist allemahl die Division oder Multiplication mit der Zahl 1728 vorzunehmen, wenn die niedrigern Einheiten auf die höhern oder umgekehrt gebracht werden sollen. Z. B.

$$723586908 . l^3 = \frac{723586908}{1728} z^3 = 418742 z^3$$

$$+ 732 l^3 = \frac{418724}{1728} f^3 + 732 l^3 = 242 f^3$$

$+ 566 z^3 + 732 l^3$, oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung $= 242' 566'' 732'''$ Duodec. und so umgekehrt wieder

$242' 566'' 732''' = 723586908'''$

3. Bey den hiebey vorkommenden Multiplicationen oder Divisionen mit 1728 ist es selten vortheilhaft mit Logarithmen zu rechnen. Eher dient ein Rechenknecht, oder ein Täfelchen, worin die Vielfachen von 1728 bis auf das 9fache vorkommen.

1728 = 1728
2. 1728 = 3456
3. 1728 = 5184
4. 1728 = 6912
5. 1728 = 8640
6. 1728 = 10368
7. 1728 = 12096
8. 1728 = 13824
9. 1728 = 15552

§. 4.

Wenn man die landesübliche Ruthe in 10 Decimalfuße abtheilt, so ist 1 Cubikruthe = 1000 Cubikfuße. Enthält nun eben diese Längenruthe 12 landesübliche Fuße, so wäre die Cubikruthe auch = 12. 12. 12 = 1728 landesübliche Cubikfuße. Im Calenbergischen werden 16 landesübliche Schuhe auf die Ruthe gerechnet, in diesem Falle hielte die Cubikruthe 16. 16. 16 oder 4096 Cubikfuße. Aus diesen und ähnlichen Gleichungen z. B. 1 Cubikr. = 1000 F^3 = 1728 f^3 oder auch 1000 F^3 = 4096 f^3, ergiebt sich nun erstlich in jedem Falle die Grösse des Cubik-Decimalfußes in Vergleichung des landesüblichen Cubikfußes z. B. in obigen ersten Falle

$$F^3 = \frac{1728}{1000} f^3 = 1{,}728 f^3$$

oder wenn die Ruthe 16 landesübliche Fuße enthielte $F^3 = 4{,}096 f^3$

Ich will überhaupt $F^3 = m. f^3$ setzen, wo demnach m jedesmahl eine Zahl bedeutet, welche von der Menge landesüblicher Längenfuße f abhängt, welche auf eine Ruthe gehen.

§. 5.

1. Wird nun F in 10 Z und f in 12 z getheilt, und so ferner Z in 10 L und z in 12 l, so erhät man

$1000 Z^3 = m. 1728 z^3$
$1000 . 1000 . L^3 = m. 1728 . 1728 . l^3$

2. Demnach $Z^3 = m. 1{,}728 . z^3$
$L^3 = m. (1{,}728)^2 . l^3$
u. s. w.

3) Diese Ausdrücke dienen das Decimalcubikmaaß auf Duodecimalcubikmaaß zu reduciren.

4. Ex. Es sey ☉) $34 F^3 + 750 Z^3 + 632 L^3$ oder 34′ 750″ 632‴ Calenbergisches Decimalcubikmaaß auf Duodecimalmaaß zu bringen, so ist die kürzeste Rechnung folgende. Man drücke die kleinern Cubikeinheiten durch die höchste welche in dem Ausdrucke vorkömmt, hier z. B. durch F^3 oder Cubikfuße aus, so hat man auch (§. 3.)

☉ $= 34{,}750632 F^3$

aber $F^3 = 4{,}096 f^3$ (§. 4.) also

☉ $= 34{,}750632 . 4{,}096 f^3$
$= 142{,}338588672 f^3$
$= 142 f^3 + 1728 . 0{,}338588672 z^3$
$= 142 f^3 + 585 z^3 + 0{,}08122 . 1728 . l^3$
$= 142 f^3 + 585 z^3 + 140 l^3$ (☽)

so viel Duodecimalcubikfuße, Zolle und Linien beträgt der angeführte Ausdruck.

5. Um

5. Umgekehrt, sollte die eben gefundene Grösse (D) (und so auf eine ähnliche Art jede andere) wieder in Decimalcubikmaaß verwandelt werden, so setze man statt 140 l^3 den Werth $\frac{140}{1728} z^3$ oder $\frac{140}{1728^2} f^3$ und statt 585 z^3 den Werth $\frac{585}{1728} f^3$, und verwandele diese Brüche in Decimaltheile, so erhält man wieder statt des angegebenen Ausdrucks

D) 142 f^3 + 585 z^3 + 140 l^3 den Aequivalenten 142,338588.. f^3 welcher mit 4,096 dividirt wieder 34,750632 F^3 oder

34 F^3 + 750 Z^3 + 632 L^3 geben wird.

6. Bey diesen Reductionen ist es vortheilhaft statt mit 1728 oder 1728^2 zu dividiren, lieber mit $0{,}0005787037 = \frac{1}{1728}$

und $0{,}0000003348 = \frac{1}{1728^2}$

zu multipliciren.

Z. B.

$\frac{140}{1728^2} = 140 \cdot 0{,}0000003348 = 0{,}0000468...$

$\frac{585}{1728} = 585 \cdot 0{,}000578703 = 0{,}338516...$

142 = — — — — 142,

Summe = 142,338588...

§. 6.

Geht man bey den Unterabtheilungen des Längenmaaßes, nicht wie im vorigen §. von der Ruthe als Einheit aus, sondern, wie öfters geschiehet, bloß von dem landesüblichen Fuße, so kömmt der obige Werth von m (§.4.) in keine Betrachtung; dann hat man schlechthin

$$F = 10 Z = 12 z$$

$$Z = 10 L; \; z = 12 l$$

Also $1000 Z^3 = 1728 z^3$

$$1000 . 1000 L^3 = 1728 . 1728 l^3$$

Also $Z^3 = 1,728 z^3$

$$L^3 = (1,728)^2 l^3$$

u. s. w.

§. 7.

Es sey der Längenfuß an einem gewissen Orte = f, an einem andern Orte = $\mathfrak{F}$, so weis man aus den Tafeln für die Fußmaaße, das Verhältniß von $\mathfrak{F}$ zu f.

Es sey also $\mathfrak{F} = n . f$ so ist alsdann die Gleichung für die Cubikfuße an beyden Orten

$$\mathfrak{F}^3 = n^3 . f^3$$

Demnach für das Decimalmaaß an beyden Orten d. h. für $\mathfrak{F} = 10 \mathfrak{Z}; \; \mathfrak{Z} = 10 \mathfrak{L}$

und $f = 10 z; \; z = 10 . l$

$$1000 \mathfrak{Z}^3 = 1000 . n^3 z^3$$

$$1000 . 1000 . \mathfrak{L}^3 = 1000 . 1000 . n^3 . l^3$$

d. h. schlechtweg auch

$$\mathfrak{Z}^3 = n^3 \cdot z^3$$

$$\mathfrak{L}^3 = n^3 \; l^3$$

wie von selbst klar ist, und so würden auch für die Duodecimaleintheilung an beyden Orten diese Gleichungen zwischen den Cubikzollen und Cubiklinien unverändert bleiben.

§. 8.

1. Wenn aber an einem Orte der Längenfuß $\mathfrak{F}$ in 10 Theile, an dem andern Orte der Längenfuß f in 12 Theile getheilt würde, und dieß so auch bey den weitern Unterabtheilungen der Fall wäre, so hat man, wenn jetzt z, l Duodecimaltheile bedeuten, $f = 12\ z$; $z = 12.\ l$ ꝛc. demnach für beyde Orte folgende Gleichungen

$$\mathfrak{F}^3 = n^3.\ f^3$$

$$1000\ \mathfrak{Z}^3 = n^3.\ 1728\ z^3$$

$$1000.\ 1000\ \mathfrak{L}^3 = n^3.\ 1728.\ 1728\ l^3$$

oder

$$\mathfrak{F}^3 = n^3.\ f^3$$

$$\mathfrak{Z}^3 = n^3.\ 1{,}728.\ z^3$$

$$\mathfrak{L}^3 = n^3\ (1{,}728)^2\ l^3$$

2. Beyspiel. Wie viel machen 130 Calenberger Decimalcubikzolle, an Rheinländischen Duodecimalcubikzollen? Weil

$\mathfrak{F} : f = 12953 : 13913$; so ist erstlich

$\mathfrak{Z} =$

$$\mathfrak{z} = \frac{12953}{13913}\ \text{f also}\ n = \frac{12953}{13913}$$

und nun

$$130\,\mathfrak{z}^3 = \left(\frac{12953}{13913}\right)^3 .\ 130 .\ 1{,}728\ z^3$$

$$\begin{aligned} \log 130 &= 2{,}1139434 \\ \log 1{,}728 &= 0{,}2375437 \\ 3.\log 12953 &= 12{,}3371109\ (*) \\ \hline & \ 14{,}6885980 \\ 3.\log 13913 &= 12{,}4302621 \\ \hline & \ 2{,}2583359 \end{aligned}$$

Hiezu gehört die Zahl 181,27 also

$$130\,\mathfrak{z}^3 = 181{,}27\,z^3$$

oder 130 Calenberger Decimalcubikzolle würden etwas über 181 Rheinländische Duodecimalcubikzolle betragen. Wenn es nöthig wäre, so könnte man durch die Multiplication mit 1728 den Bruch 0,27 noch in Cubiklinien verwandeln.

Verwandlung solcher Maaße in einander welche die Gestalt eines rechtwinklichten Parallelepipedum haben.

§. 9.

1. Dieß ist der Fall beym Messen des Holzes, welches nach Klaftern, Faden, Hau-

(*) M. s. pract. Geometr. I. Th. die Tafel §. 14.

Haufen, Maaßen, Maltern, (*) oder wie auch diese Benennungen an verschiedenen Orten lauten mögen, angegeben wird. Alle diese Holzmaaße stellen rechtwinklichte Parallelepipeden dar, zuweilen auch Würfel, deren Seitenlinien nach dem landesüblichen Fuße bestimmt sind.

2. Man setze a, b, c seyen die drey Seitenlinien eines solchen Parallelepipedum; und a = m landesüblichen Fußen oder a = m. f wenn f diesen Fuß bedeutet; eben so b = n. f; c = p. f, so ist des Parallelepipedum Inhalt A = a. b. c = m. n. p. f³ d. h. m. n. p landesübliche Cubikfuße.

Sind für ein anderes Parallelepipedum B nach einem landesüblichen Fuße F die drey Seitenlinien α, β, γ, = M.F; N.F; P.F so ist $B = \alpha.\beta.\gamma. = M.N.P.F^3$

$$A : B = m.n.p.f^3 : M.N.P.F^3$$

$$\text{oder } A = \frac{m.n.p}{M.N.P}\left(\frac{f}{F}\right)^3 . B$$

Dieser Ausdruck dient zur Vergleichung solcher Holzmaaße, welches im gemeinen Leben öfters vorkommen kann.

3.

(*) M. s. die Angaben verschiedener solcher Holzmaaße in dem Allgemeinen kleinen Contoristen rc. Erfurt 1791. Tafel XX.

1ste Exempel. Für das Calenberger Klafter A, ist die Länge des aufgeklafterten Holzes gewöhnlich 6 Fuß, jedoch auch zuweilen 5 Fuß, welches letztere ich annehmen will, Breite und Höhe des Klafters aber 6 Fuß. Also die drey Seitenlinien des Klafters $a = 5f$; $b = 6f$; $c = 6f$.

Für das Würtembergische Maaß Holz B hat man $\alpha = 4F$; $\beta = 6F$; $\gamma = 6F$.

Demnach hat man wegen

$E : f = 12780 : 12953$

(prakt. Geometr. Tafel §. 14.)

$$A = \frac{5.6.6}{4.6.6}\left(\frac{12953}{12780}\right)^3 B$$

$$= \frac{5}{4}\left(\frac{12953}{12780}\right)^3 B$$

Und nun durch Logarithmen

log 5 =	0,6989700	
3 log 12953 =	12,3371109	
Summe =	13,0360809	
log 4 =	0,6020600	subtrahirt
3 log 12780 =	12,3195927	
Summe =	12,9216527	
log A =	0,1144282	

wozu die Zahl 1,301 gehört

Aufschlichtungsart angestellt, aber begreiflich nur zum Behuf eines ohngefähren Ueberschlages der eigentlichen Quantität soliden Holzes welche in einem Klafter enthalten ist, weil diese Bestimmungen von gar zu viel zufälligen Umständen abhängig sind, die keine genauen und zu einer allgemeinen Norm dienenden Resultate zulassen.

2. So fand z. B. Herr Hennert bey Buchenscheitholz das Verhältniß der Zwischenräume zum geometrischen Inhalt des Klafters (a 108 Rheinl. Cubikf.) worin 84 Scheite waren = 49 : 144; also die Zwischenräume ohngefähr $\frac{1}{3}$ des geometrischen Inhaltes. Für astiges oder Zopfholz der Buche fand er für die Zwischenräume ohngefähr $\frac{1}{2}$ des geom. Inhaltes des Klafters.

M. s. hierüber G. W. Hennert Anweisung zur Taxation der Forsten. I. Th. S. 214.
Hartig Versuche über die Brennbarkeit der meisten deutschen Waldbaumhölzer. Marburg 1799.
J. L. Späths Handbuch der Forstwissenschaft. II. Th. §. 122 u. f.
Forstwissenschaftliche Abhandlungen (auch unter dem Titel: Abhandlungen über wichtige Gegenstände des Forstwesens. Erstes Heft 1806.) erste Abhandlung. Neue Methode die leeren Zwischenräume in einem Klafter Scheitholz zu bestimmen.

§. 12.

§. 12.

1. In der Baukunst und dem Forstwesen kommen auch Schachtruthen, Balkenruthen, Riemruthen u. d. gl. nebst ihren Unterabtheilungen in Schachtfuße, Balkenfuße ꝛc. vor.

Eine Schachtruthe ist ein Parallelepipedum, dessen Grundfläche = 1 Quadratruthe, und Höhe = 1 Fuß. Also der Cubikinhalt = 144 Cubikfußen. Also ist die Schachtruthe der 12te Theil einer Cubikruthe.

Ferner theilt man die Schachtruthe wieder in 12 gleiche Theile oder Balkenruthen, von denen jeder einen Quadratfuß zur Grundfläche und eine Ruthe oder 12 Fuß zur Höhe hat.

Also ist die Balkenruthe = $\frac{1}{12}$ Schachtruthe = $\frac{1}{144}$ Cubikruthe.

2. Auf eine ähnliche Art theilt man den Cubikfuß in 12 Schachtfuße, deren jeder einen Quadratfuß zur Grundfläche und 1 Zoll zur Höhe hat. Den Schachtfuß in 12 Balkenfuße, deren jeder einen Quadratzoll zur Grundfläche und 1 Fuß zur Höhe hat u. s. w.

3. Der Würfel (Fig. 1.) stelle z. B. eine Cubikruthe vor, in einer Entfernung gh = ad = $\frac{1}{12}$ ph sey die Ebene, oder der Schnitt abgo parallel mit hdef, so ist das Parallelepipe-

 dum

dum ghefadbc $= \frac{1}{12}$ der Cubikruthe also eine Schachtruthe.

4. Ferner sey hm = gn = di = ak = $\frac{1}{12}$ hf = $\frac{1}{12}$ dc so ist das Parallelepipedum über gnhm d. h. das Parallelepipedum gnhmadki $= \frac{1}{12}$ der Schachtruthe also eine Balkenruthe.

5. Endlich nehme man in dieser Balkenruthe it = ds = ar = ad so ist der Würfel akdirs ein Cubikfuß also $\frac{1}{12}$ der Balkenruthe.

Diesen Cubikfuß kann man nun durch ähnliche Schnitte auch wieder in Schachtfuße, Balkenfuße u. s. w. sich eingetheilt vorstellen.

6. Man bezeichne die Cubikruthe, Schachtruthe, Balkenruthe; Cubikfuß, Schachtfuß, Balkenfuß rc. der Ordnung nach mit c^0; s^0; b^0; c'; s'; b' rc. so hat man (3)

$$c^0 = 12\, s^0$$
$$s^0 = 12\, b^0$$
$$b^0 = 12\, c'$$
$$c' = 12\, s'$$
$$s' = 12\, b'$$
$$b' = 12\, c''$$

u. s. w.

7. Diese Duodecimaleintheilung des Cubikmaaßes hat man an vielen Orten sehr häufig eingeführt, um die geometrische

und

und ist für die Berechnungen in der Baukunst etwas lästige gewöhnliche Eintheilung des Cubikmaaßes, nach der allemahl 1728 Einheiten der niedrigern Art eine Einheit der höhern Art ausmachen, zu vermeiden. So wird denn bey solchen Rechnungen auch schon selbst das Quadratmaaß zwölftheilig abgetheilt, und z. B. eine Quadratruthe wie pqfh in 12 Riemenruthen = efgh; die Riemenruthe efgh in 12 Quadratfuße ghnm u.s.w. abgetheilt. Auf diese Art machen denn, wie bey dem Längenmaaße, so auch bey dem Quadrat- und Cubikmaaße, allemahl 12 Einheiten der niedrigern Art eine Einheit der höhern aus.

8. Die Riemenruthen, Riemenfuße rc, werde ich mit R', r', rc. bezeichnen.

Hieraus ergibt sich nun von selbst erstlich die Reduction des gewöhnlichen Cubikmaaßes (nach welchem allemahl 1728 niedrigere Einheiten eine höhere ausmachen) auf die Duodecimaleintheilung des Cubikmaaßes.

z. B. $224 c^{o} + 340 c' = 224 . 12 s^{o} + \frac{340}{12} b^{o}$

$= 2688 s^{o} + 28\frac{1}{3} b^{o}$

$= 2690 s^{o} + 4\frac{1}{3} b^{o}$

$= 2690 s^{o} + 4 b^{o} + 4 c'$

9. So-

Nach der Hand kann ferner die Berechnung körperlicher Räume nach dieser Duodecimaltheilung, wobey man dann wie bey der Decimalarithmetik verfährt, nur daß man jedesmahl für 12 niedrigere Einheiten eine nächst höhere setzt, und solche zu den höhern hinzuaddirt.

10. Beyspiel. Ein Parallelepipedum ist lang 8°. 5'. 9'' hoch 3°. 7'. 10''; breit 5°. 8'. 3'' Duodecimalmaaß, man verlangt den Inhalt desselben in Cubikruthen, Schachtruthen, Balkenruthen, Cubikfußen u. s. w.

Man multiplicire jene drey Maaße also auf folgende Art in einander

		8°.	5'.	9''	Länge des P.
		5.	8.	3''	Breite des P.
		24.	15.	27	
	64.	40.	72		
40.	25.	45			
A) 40.	89.	109.	87.	27.	Grundfl. d. Parall.

Hier beziehet sich also die 27 auf Quadratzoll; die 87 auf Riemenfuße, die 109 auf Quadratfuße, die 89 auf Riemenruthen und die 40 auf Quadratruthen. Rechnet man also auf jede 12 Einheiten der niedrigern Art eine Einheit der höhern, so erhält man für die Grundfläche des Parallelepipedum auch den Ausdruck

48□°.

[illegible]
multipl. mit 3 . 7 . 10 Höhe des P.

	480 .	20 .	80 .	50 .	30	a)
336 .	14 .	56 .	35 .	21		b)
144 .	6 .	24 .	15 .	9		c)

B) 144 . 342 . 518 . 91 . 124 . 71 . 30c'
oder
C) 176c°. 1s°. 10b°. 5c'. 10s'. 1b'. 6c'' Inhalt d. P.
oder 176 Cubikruthen + 1 Schlachtruthe + 10 Balkenruthen u. s. w.

10. Bey den Reductionen der niedrigern Einheiten auf höhere bey den in A und B vorkommenden Partialproducten ist es vortheilhaft ein Täfelchen für die Vielfachen der Zahl 12 bey der Hand zu haben.

Man hätte auch schon sogleich aus jedem einzelnen Partialproducte in a, b, c, die höhern Einheiten heraussuchen, und zur nächsthöhern Duodecimalordnung rechnen können z. B. statt die 30 in a ganz hinzuschreiben, hätte man nur 6 hingeschrieben, und die darin enthaltenen 2 Einheiten der höhern Ordnung sogleich zu dem folgenden Product 50 hinzu addirt u. s. w. Aber man wird finden, daß dieß Verfahren weit leichter Rechnungsfehler veranlaßt, als wenn man alle einzelnen Producte ganz in die Stellen hinschreibt, in die sie nach der Duodecimalordnung gehören, und nun erst in B die höhern Einheiten aus den einzeln Summen

men heraussucht, und in die gehörigen Stellen setzt.

11. In allen Fällen ersieht man aber dennoch die Unbequemlichkeit der Duodecimaleintheilung wenn bey Bauanschlägen und andern Geschäften, wobey man sich solcher Schachtruthen, Balkenruthen u.s.f. bedient, viel Rechnungen dieser Art zu führen sind. Es wäre daher immer besser auch hier die Decimaleintheilung zu gebrauchen, und z. B. die Cubikruthe in 10 Schachtruthen, die Schachtruthe in 10 Balkenruthen u.s.w. abzutheilen.

12. Das Neufranzösische Körpermaaß hat diesen Vortheil der Decimaleintheilung. Das Grundmaaß für den cubischen Inhalt der festen Körper heist Stere und ist gleich einem Würfel dessen Seite die Länge des Metre hat. Man theilt diesen Stere in zehn Deci-Stere u.s.w. ab.

13. Setzt man das Metre nach den neuesten Bestimmungen $= \frac{1}{10000000}$ des Meridianquadranten $= \frac{6130740}{10000000}$ Tois. $= 3{,}078444$ Pariser Fuß, so ergiebt sich hieraus die Grösse des Stere in Pariser Cubikfußen. Ich will die Grösse 3,078444 in zwey Theile $a = 3{,}078$ und $b = 0{,}000444$ theilen, so hat man Stere $= (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3 =$

$$a^3 = 29{,}161230888$$
$$3a^2b = 0{,}0126194479888$$
$$3ab^2 = 0{,}000001820353824$$
$$b^3 = 0{,}000000000087528384$$

also Stere $= 29{,}173851852329352384$ c'

= 29 Cubikfuß 300 Cubikzoll 718 Cubiklinien in Duodecimalmaaß, wie man durch eine Multiplication der herausgekommenen Decimaltheile von Cubikfußen mit 1728 ꝛc. finden wird.

Körper-Maaße welche die Gestalt eines Cylinders haben.

§. 13.

1. Dieß ist meistens der Fall bey Korn- und andern Fruchtmaaßen und Maaßen für flüssige Dinge. Zuweilen haben solche Maaße auch die Gestalt abgekürzter Kegel oder Pyramiden.

2. Sollen solche cylinderförmige Maaße mit einander verglichen oder auch nach ihrem absoluten Inhalte z. B. in Cubikfußen oder Zollen gefunden werden, so dienen dazu folgende Formeln.

3. Es sey nach einem gewissen Fuß oder Längenmaaße F, der Durchmesser eines Cylinders = D.F die Höhe = H.F, der körperliche Inhalt (ein Product aus der Grund-

fläche

fläche in die Höhe) = K, = so hat man $K = \frac{1}{4}\pi . D^2 . F^2 . H . F = \frac{1}{4}\pi . D^2 H . F^3$ d. h. der Cylinder enthält so viel Cubikfüße F3 oder Würfel der gebrauchten Längeneinheit, als das Produkt $\frac{1}{4}\pi . D^2 . H$ ausdrückt, worinnen π die bey der Kreisrechnung vorkommende bekannte Ludolphische Zahl 3,141592... bedeutet.

4. Eben so sey für ein anderes cylindrisches Gefäß, nach einem andern Fußmaaße f, der Durchmesser = d.f, Höhe = h.f, Inhalt = k so hat man $k = \frac{1}{4}\pi . d^2 . h . f^3$.

5. Also für die Vergleichung beyder Gefäße

$$K : k = D^2 HF^3 : d^2 hf^3$$

Mithin

$$K = \frac{D^2 H . F^3}{d^2 h . f^3} . k$$

$$= \left(\frac{D}{d}\right)^2 . \frac{H}{h} . \left(\frac{F}{f}\right)^3 . k$$

6. Sind Höhe und Weite beyder Gefäße nach einerley Fuß- oder Längenmaaß gemessen worden, so ist $\frac{F}{f} = 1$, und alsdann bloß

$$K = \frac{D^2 . H}{d^2 . h} . k$$

Exempel. Das Göttingische Quartiergefäß = K ist hoch 4,63 Zolle Pariser Maaß = H, weit 3,73 = D.

Ein

6. Ein Erlangisches sogenanntes Seidlein befand sich hoch 4,66 Zolle Pariser Maaß = h, weit 2,77 Zoll = d. Also ist erstlich für beyde Gefäße F = f und nun für den absoluten Inhalt derselben in Pariser Cubikzollen

$$\log D^2 = 2 \log D = 1,1434176$$
$$\log \pi - \log 4 = \log \tfrac{1}{4}\pi = 0,8950898$$
$$\log H = 0,6655810$$
$$\log K = 1,7040884$$

Also K = 50,592 Paris. Cubikz.

Ferner

$$\log d^2 = 2 \log d = 0,8849596$$
$$\log \tfrac{1}{4}\pi = 0,8950898$$
$$\log h = 0,6683859$$
$$\log k = 1,4484353$$

Also k = 28,082 Paris. Cubikz.

Und nun für die Vergleichung beyder Gefäße

$$\log \frac{K}{k} = \log K - \log k = 0,2556531$$

Also $\frac{K}{k} = 1,8016$ Folglich

$$K = 1,8016\ k$$

Oder 1000 Göttingische Quartiere = 1801 Erl. Seidlein.

7. In Fällen wo F nicht = f, nimmt man die Verhältnisse aus der Tafel §. 14. pract. Geom. welches durch ein Beyspiel zu erläutern kaum nöthig seyn wird.

n. 8. Das Neufranzösische Grundmaaß für flüssige Dinge ist das Litre = dem Cubus eines Decimeters. Der zehnte Theil eines Litre heißt Decilitre, Centilitre ꝛc. 10 Litres heißen Decalitres; 10 Decalitres = Hectolitre; 10 Hectolitres = Kilolitre. Also ist 1 Litre = $\frac{1}{1000}$ M^3 wenn M das Metre bedeutet; aber M^3 = Stere (§. 12. 13.) also das Litre = 0,02917385... Paris. Cubikfuß

= 50,412416 Paris. Cubikzoll

= 50 Cubikzoll 712 Cubiklinien.

Das Göttingische Quartiergefäß (§. 13. 6.) würde nur um ein weniges grösser seyn als das Neufränkische Litre.

§. 14.

Verzeichnisse und einzelne Angaben von den in verschiedenen Ländern und Städten eingeführten Maaßen für trockene und flüssige Dinge, findet man in vielen Schriften, aber die Angaben weichen oft beträchtlich von einander ab. Nachstehende Tafel mögte für die darin vorkommenden Städte wohl noch die sichersten Maaßbestimmungen enthalten. Die Schriftsteller welche ich dabey benutzt habe, und in welchen zum Theil noch für viel andere Orte dergleichen Maaße vorkommen, sind folgende:

Paucton Metrologie. Paris 1780.
Crusens Hamburger Contorist.

Der

Der allgemeine Kleine Contorist 2c. welcher 1791 bey Keyser in Erfurt herausgekommen ist.

Gottfr. Erich Rosenthal's Bestimmung der Grösse des Maaßes und Gewichtes der Kais. fr. Reichsstadt Nordhausen, wobey zugleich die Vergleichung des Maaßes 2c. der berühmtesten Oerter in Europa, besonders in Deutschland, angezeigt wird. Nordhausen 1772.

Eytelwein, Vergleichung der in den Königl. Preußischen Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. Berlin 1798.

Franz Huberti, Vergleichung der Hochfürstl. Würzburgischen und mehrer anderer fremdherrischen Fruchtmaaße 1777.

Ueber das Nürnberger und Ansbacher Maaß für Getraide und flüssige Dinge, Hr. Kriegs- und Domainenrath Yelin in des Freyh. v. Zachs Monatl. Corresp. April und May 1804.

Th. Everard Stereometry or the art of Gauging etc. London 1712.

Lesparat Metrologie constitutionelle et primitive comparées entre elles et avec la Metrologie d'Ordonnances, 2 Tom. à Paris An. X. (1801.)

Tal om the gamla Romerska Grekiska och Hebreiske Matt, Mal och Vigter etc. of *Henric Nicander.* Stockholm 1777.

Universal-Getraidemaaß-Vergleichung für das ganze Churfürstenthum Sachsen 2c. Budißin und Görlitz 1730. Fol.

Vergleichung der gewöhnlichsten Maaße, Gewichte und Münzsorten, aus den besten Autoren zusammengetragen, verglichen und herausgegeben von I. C. W. Dresden 1787.

Verhandeling over volmaakte Maaten en Gewigten door *J. H. van Swinden.* Amsterdam 1802. gr. 8. und mehr andere.

I. Maaße für trockene Dinge.

Oerter.	Nahmen der Maaße.	Inhalt in Pariser Duod. Cubikzollen.
Aachen	Faß	1267
Altenburg	Scheffel	7089
— —	nach Paucton	9452
Altona	Scheffel (= $\frac{1}{80}$ Last)	5352
— —	Faß = 2 Himten	2686
Amsterdam	Scheepels. Erfurter Consorist	1362
— —	Mudde = 4 Scheepels	
— —	Sack = 3 Scheepels	
Anspach	Kornmetze (= $\frac{1}{16}$ Kornsimmer)	1065,2
— —	Hafermetze (= $\frac{1}{32}$ Hafersimmer) nach Hrn. Nelin	983,8
Augsburg	Schaff = 8 Metzen	11472
	nach Rosenzweigs Rechenk. Augsb. 1785	10348
	nach Paucton	22163
Basel	Sack = 8 Mädden	6504
	nach Paucton	6636
Berlin	Scheffel, nach Hrn. Eytelwein	2758
Bologna	Corbe	3720
Bourdeaux	Boisseau	3868
Braunschweig	Neuer Himten = 2 Metzen	1565
	Malter = 6 Himten	
	Scheffel = 10 Himten	
Bremen	Scheffel	3541
Breslau	Scheffel nach Liegsganig m. s. Paucton	3850
Brüssel	Sack	5824

 Cadix

Oerter.	Nahmen der Maaße.	Inhalt in Pariser Duod. Cubikzollen.
Cadix	Fanegas = 4 cahis	2881
Cassel	Metzen	438
Coblenz	Malter	8048
Cölln	Malter	8172
Constantinopel	Kislo	1778
Copenhagen	Tonne = 8 Scheffel = 4½ dänische Cubikf.	7013
Danzig	Scheffel	2444
Dresden	Scheffel = 4 Viertel	5287
	C.	5338
Erfurt	Scheffel	3836
Florenz	Staja	1194
Frankf. a. M.	Malter	5444
Genf	Sack, Coupe	3915
Goslar	Himten	1853
Gotha	Malter = 8 Scheffel den Scheffel zu 6400 gothaische Cubz. gerechnet	8886
Greifswalde	Scheffel	1964
Griechische, alte	Μετρητής = 1 Olympisch. Cubikfuß nach Lesparat	1482
	nach Nicander	1472
	Μεδιμνος = 1⅓ Μετρητ.	1976
Halle an der Saale	Scheffel	4003
Hamburg	Scheffel	5312
	Sack = 2 Scheffel = 4 Himten	
Hannover	Himte	1564
	Malter = 6 Himten	
Harlem	Sack = 3 Schepels	3840
Hildesheim	Himte nach den Götting. Taschenkalender	1235
	C.	1307

Oerter.	Nahmen der Maße.	Inhalt in Pariser Duod. Cubikzollen.
Riga	Loof	3285
Rom	Rubbio	14012
Römischer alter	Modius = $\frac{1}{3}$ Amphora	437,1
	Amphora nach Leeparat	1311,3
	Nicander	1292,2
	Paucton	1487,0
	Eisenschmid	1348,0
Rostock	Scheffel	1789
Rotterdam	Sack	5048
	Hoedt, nach Paucton	54056
Schaafhausen	Mütt	4606
	nach Paucton	4352
Schlesien	Scheffel, nach Liesganig	3850
Schleswig	Weizen Heitscheffel	5670
	Rocken	5548
	Scheffel	2240
Schmalkalden	Viertel	7307
Stettin	Scheffel	2610
Stockholm	Getraide Tonnen	8310
	nach Paucton	8176
Stralsund	Scheffel	1962
Strasburg	Land Sester	953
	Stadt Sester	924

Strelitz

Placidus Heinrich in Regensburg, ist daselbst bey festen und flüssigen Dingen als Grundmaaß das sogenannte Köpfel gebräuchlich. Es enthält nach seinen Untersuchungen sehr nahe 42 Pariser Cubikzoll, und 22 Köpfel machen daselbst einen Metzen Getraide (also Metzen = 924 Pariser Cubikzoll). 12 Metzen einen Scheffel. 32 Köpfel einen Strich Mehl. 32 Metzen einen Schaft.

Oerter.	Nahmen der Maaße.	Inhalt in Pariser Quod. Cubikzollen.
Strelitz	Scheffel = =	2604
Tönningen	Tonne = =	6124
Triest	Stara = =	3735
Ulm	Imi = 4 Mittlen =	11580
Utrecht	Mudde = =	5879
Venedig	Staja oder Staro, nach Paucton = =	4285
Weimar	Scheffel = 4 Viertel = 16 Mäßgen = =	4489
Wezlar	Malter = =	11840
Wien	Metzen nach Liesganig	3100
	Muth = 30 Metzen	
Wismar	Scheffel = =	1930
Wittenberg	Scheffel = =	2669
Würtemberg	Simra = =	1105
Zelle	Scheffel = 10 Himten	15680
Zürich	Mütt = =	4170

Oerter.	Nahmen der Maaße.	Inhalt in Pariser Duod. Cubikzollen.
Königsberg	Stof	73
	Quart oder Maaß	59
Leipzig	Eimer = 2 Anker = 63 Kannen = 126 Rößel	3824
	Visirkanne	70,8
Lissabon	Almuda = 2 Alqueires = 12 Canadas	843
London	Tun zu Wein = 2 Pipes = 4 Hogshead = 252 Gallons	48134
	= 1008 Quarts = 58212 englische Cubikz. (nach Everard Stereometrie. London 1742) also Wein Gallon	191
	Bier Gall. 282 engl. C. Zoll.	233
Lübeck	Vierthel = 2 Stübchen = 4 Kannen	367
Mähren	Maaß nach Liesganig	53,9
Mainz	Maaß	94,5
Napoli	Barili für Wein, nach de la Lande, m. s. Paucton	2136
	Botta = 12 Barili = 720 Caraffes	
	Salma = 10 Staja für Oel	9494
Nordhausen	Faß = 4 Tonnen = 240 Kannen = 480 Maaß = 960 Rößel nach Rosenth.	22910
	Also Kanne	95,5
Nürnberg	Eimer (nach Yelin. v. Zachs M. C. April 1804)	3714
	Vierthel	116
	Visirmaaß = 2 Seidel	58
	Schenkmaaß = 2 Schenkseidel	54,6
		Eimer

Oerter.	Nahmen der Maaße.	Inhalt in Pariser Duod. Cubikzollen.
	Eimer = 128 Visirseidel = 136 Schenkseidel = 272 Schoppen	
Osnabrügge	Kanne oder Maaß	62,6
Paris	Septier = 8 Pintes = 16 Chopin	384
	Pinte, nach Paucton	48
	Nach dieser Pinte sind alle Zahlen im Paucton angegeben, und man muß sie nicht mit der Pinte étalon verwechseln, welche nach Picards Bestimmung nur 47⅔ und nach Lesparat sogar nur 46,87 Pariser Cubikzolle enthält.	
Petersburg	Weddra = 8 Kruska = 88 Czarke	624
Prag	Eimer = 32 Pint = 128 Seidel, nach Liesganig, m. s. Paucton	3081
Regensburg *)	Großer Eimer = 88 Köpfen = 176 Seidel	5803
	Gemeiner Eimer = 126 Seidel	4220
	Nach Pauct. = 180 Seidel	5933
Riga	Anker = 30 Stof	1855
Rom	Barili = 32 boccali = 128 foglietteſ = 1⅜ Röm. Cubikfuß nach Jaquier; Für Wein	2294

Also

*) Nach Hrn. Prof. Heinrich machen daselbst 164 Köpfel (à 42 Pariser Cubikzoll) einen Visir-Eimer, 88 Köpfel den langen oder großen Eimer.

Pfundes, oder auch das Gewicht einer dem Raum nach gegebenen Wassermenge z. B. eines Cubikfußes oder Cubikzolles, durch Versuche vorher genau bestimmt werden, wozu die Hydrostatik die Anleitung giebt. Da indessen die verschiedene Beschaffenheit des Wassers in Absicht auf seine specifische Schwere, Temperatur ꝛc. auf die Eichung solcher Gefäße die nicht sehr groß sind, keinen erheblichen Einfluß hat, so setze ich das Gewicht eines Pariser Cubikfußes Regenwasser nach Brissons und Lavoisiers genauen Versuchen überhaupt = 70 Pariser Pfund = 70. 16. 8. 72 Pariser Grains = 645120 Grain. Da nun 6732 Paris. Grains = 5760 Granen des Nürnbergischen Apothekergewichts (= 1 Nürnberger Apotheker-Pfund zu 12 Unzen), so beträgt das Gewicht eines Pariser Cubikfußes Regenwasser

auch $\frac{645120}{6732}$ Pfund Nürnb. Apothekergewicht

= 95 Pfund 9 Unzen 7 Drachmen 34,3 Grane = 551974,3 Grane, also das Gewicht eines Pariser Duodecimal-Cubikzolles Regenwasser = $\frac{551974,3}{1728}$ Grane

= 319,43 Gr. Apothergew. = 5 Drachmen 19,43 Grane. (Diese 319,43 Gr. Apothekergewicht betragen auch 373,33 Grains französisches Gewicht.)

III.

III. Nimmt man statt Regenwasser gewöhnliches Brunnenwasser, so wiegt ein Pariser Cubikfuß des letztern selten über 2 Unzen mehr als das Regenwasser, welche 2 Unzen einem Raum von ohngefähr 3 Pariser Cubikzollen entsprechen. Man wird also überhaupt bey der Eichung eines Gefäßes durch Hülfe des Gewichts Wassers, welches seinen Raum erfüllt, auf einen ganzen Cubikfuß d. h. auf einen Raum von 1728 Cubikzollen selten um 3 Cubikzolle fehlen, wenn man sich schlechtweg des gewöhnlichen Brunnenwassers dazu bedient. Bey Gefäßen, dergleichen z. B. die kleinen Quartiere oder Maaßgefäße sind, welche selten über 100 Cubikzolle enthalten, ist es also ziemlich gleichgültig, ob man sich zur Eichung derselben des Regen- oder Brunnenwassers bedient, indem der Fehler kaum einige Zehntheile eines Cubikzolles betragen wird. In allen Fällen wird es jedoch am rathsamsten seyn, sich des Regenwassers zu bedienen und die (I.) angeführten Zahlen bey der Eichung der Gefäße zum Grunde zu legen.

IV. Gesetzt also man habe das Gewicht Regenwassers, welches den Raum eines solchen Gefäßes erfüllt, nach mehrmahligen Abwiegen und daraus abgeleiteten Mittel = 2 Pfund 9 Unzen 4 Dr. 58 Gr. Apothekergewicht = 16138 Gran gefunden (wie ich es z. B. für das

das Göttingische Quartiergefäß nach wiederhohltem Abwiegen ohngefähr bey 10° Temperatur des Reaumurischen Thermometers (IV.) so würde der Inhalt dieses Gefäßes $= \frac{16380}{324,5}$ = 50,450 Pariser Cubikzolle betragen, welches von der obigen stereometrischen Bestimmung (§. 1. S. 50,59) nur um eine unbeträchtliche Kleinigkeit abweicht, so wie wenn auch umgekehrt, aus dem nach (§. 13) bekannten Inhalt des Gefäßes = 50,59, und dem Gewichte Wassers = 16380 Gr. welches ihm entspricht, das Gewicht eines Cubikzolles Wassers beynahe so, wie es oben angenommen worden ist, wieder gefunden wird.

V. Man muß sehr genau an dem Rande eines solchen mit Wasser angefüllten Gefäßes hinausvisiren, um gerade den Punkt zu treffen, wenn es voll ist. Durch einige Uebung in solchen Versuchen wird man es aber bald dahin bringen, daß z. B. bey Gefäßen von der Größe wie (IV.) nicht leicht um $\frac{1}{10}$ eines Cubikzolles gefehlt wird, wenn man etwa aus 3 oder 4 Resultaten der Abwiegung ein Mittel nimmt.

VI. Beträchtlich große Gefäße, welche 20 und mehrere Pfunde Wasser enthalten würden, auf diese Art abzuaichen, möchte wohl einige Unbequemlichkeit haben, wenn nicht die Wage selbst

selbst besonders zu so großen Abwiegungen eingerichtet und doch dabey empfindlich genug ist, des beträchtlichen Gewichtapparats nicht zu erwähnen, der außerdem noch dazu erfordert wird. In diesem Falle ist also die zweyte (in I.) angegebene Abeichungsmethode vermittelst eines rechtwinklichten Parallelepipedi zu empfehlen.

Auf einem Blatt Papier, welches ich in meines Vaters mathematischen Atlas (Augsburg 1745), den ich noch aus seiner Bibliothek besitze, bey Tab. XV. wo von dem Visiren der Fässer gehandelt wird, eingelegt fand, wird angeführt, daß er die Wasserhöhe eines Imi trüber Würtemberger oder Eßlinger Aich, in einem dazu besonders verfertigten Kasten nach den 1000 Theilen eines Eßlinger Fußes = 525 gefunden habe. Die Länge des Kastens war inwendig = 1530 und die Breite = 970.

Nach dieser Angabe wäre demnach der cubische Inhalt eines Imi = $\frac{525 \cdot 970 \cdot 1530}{1000 \cdot 1000 \cdot 1000}$ eines Eßlinger Cubikfußes = 0,7791525 Cubikfuße, welches (wenn der Eßlinger Stadtschuh zum Pariser sich verhält = 128 zu 144 (m. s. meine pract. Geometrie §. 14.) = 8 : 9, in Pariser Cubikmaaß geben würde

= 0,5478 Pariser Cubikf.

Pr. Cubikzoll.

Eichung eines Gemäßes kann bewerkstelligt werden, daß man ein ... nach bereits bekanntes Maaß, am besten von cylindrischer Form, mit Wasser anfüllt, und in das mit seinem Rande horizontal gestellte und zu ... Hohlmaaß ausgießt, bis dieses davon gefüllt ist. Der Rückstand im Cylinder bey der letzten Anfüllung, kann alsdann leicht berechnet, oder sonst bestimmt werden. Dieses Verfahrens hat sich Herr Kriegs- und Domainenrath Nelin (m. s. des Freyh. v. Zachs monatl. Corresp. April 1804) zur Eichung der Nürnberger und Ansbacher Hohlgemäße, sowohl für Getraide als flüssige Sachen, bedient, und die Resultate dieser Eichung stimmten mit denen der stereometrischen Berechnung immer sehr gut überein, so daß ein Mittel aus diesen Resultaten von der Wahrheit nicht viel abweichen kann. Da bekannt ist, wie oft Hohlgefäße zumal von Holz, dergleichen die Getraidemaaße sind, von der genauen cylindrischen Form abweichen, so daß man oft 3 oder 4 Durchmesser nach verschiedenen Richtungen bey solchen Gefäßen messen muß, um ihren wahren mittlern Durchmesser, welcher bey der stereometrischen Berechnung

rechnung zum Grunde gelegt werden kann, zu erhalten; so sind überhaupt solche mechanische Mittel, als im gegenwärtigen § für die Eichung der Gefäße angegeben worden sind, immer sehr brauchbar, um Vergleichungen anzustellen, und daraus die möglichst genaue Bestimmung des Inhalts eines solchen Gefäßes abzuleiten.

VIII. Noch vortheilhafter zeigt sich die practische Anwendung dieser Methode bey Gefäßen, die oft eine sehr unbequeme Form für die unmittelbare Berechnung haben, wie z. B. das Originalmaaß des Nürnbergischen Stadteimers (m. a. O. S. 319) dessen Figur einer umgekehrten Glocke ähnlich ist, und dadurch die unmittelbare Ausmessung sehr erschwerte, indem solche nicht anders als durch Hülfe von Abscissen und Ordinaten bewerkstelligt werden konnte. In solchem Falle wird man das Resultat der Eichung mit Wasser um so mehr der unmittelbaren stereometrischen Berechnung vorziehen, als man sehr leicht zeigen kann, wie erheblich die Fehler in dem körperlichen Inhalte solcher Gefäße ausfallen, wenn die Data zur Berechnung nicht mit der möglichsten Genauigkeit gemessen werden können.

IX. Solcher Eichungen mit Wasser kann man um so weniger bey Gefäßen entbehren, welche sogar mit einem engen Halse versehen

 sind,

sind, wie sehr oft bey physicalischen Versuchen der Fall ist, wenn man z. B. zu einer gewissen Absicht den Inhalt einer Retorte, Flasche, oder sonst eines Gefäßes verlangte, dessen innere Weiten man wegen der unbekannten Dicke des Glases nur sehr unsicher aus den äußern Abmessungen würde bestimmen können. Hier ist kein anderes Mittel, den Inhalt genau zu erhalten, als die Eichung mit Wasser, bey sehr kleinen Gefäßgen noch besser mit Quecksilber, wovon ein Pariser Cubikzoll 8 Unzen 6 Drachmen 25 Grain Pariser Gewicht, oder im deutschen Apothekergewicht 9 Unzen 0 Drachmen 13,7 Gran = 4333,7 Grane wiegt.

X. Wenn Gefäße dieser Art nicht sehr groß sind, so kann man sich zur Bestimmung ihres körperlichen Inhalts, auch sehr leicht und vortheilhaft, eines cylindrischen Glases bedienen, für dessen Höhe man einen Maaßstab verfertigt hat, dessen Theile sich auf Cubikzolle des Inhalts beziehen, und auf folgende Weise bestimmt werden können.

1. Es sey (Fig. II.) a b c d ein cylindrisches Glas, in welches wenigstens ein Quartier Wasser hineingehe, um es auch zur Bestimmung des körperlichen Inhalts ziemlich grosser Gefäße gebrauchen zu können. Die Weite des Glases betrage nicht leicht über 3 Zoll, damit wenn

wenn man 1 Cubikzoll Wasser hineingießen würde, dieser noch eine Höhe in dem Glase einnehme, von der sich noch bequem nach dem Augenmaaße kleinere Theile schätzen lassen. Gläser von dieser Abmessung kann man auf Glashütten in ziemlicher Vollkommenheit erhalten. Dasjenige welches ich besitze, hat von dem Boden a b, bis zu seinem Rande fast durchgängig gleiche Weite, und eine geringe Ungleichheit der Weite schadet nicht. Bey seinem Gebrauche wird es allemahl auf ein Tischgen gesetzt, welches durch eine Wasserwage horizontal gestellt worden ist. g h ist ein Stäbchen, welches dicht an die verticale Seite b d des Glases gelegt wird.

2. Nun sey H ein Gefäßgen mit einem engen Halse, in welches dem Gewicht nach genau so viel Wasser gebracht wird, als dem Raum einer bestimmten Menge von Cubikzollen z. B. 10 Cubikzollen entspricht. Dieß Wasser nehme den Raum des Gefäßgens bis an das Zeichen x an dem Halse ein. Dieß Gefäßgen leert man in das Glas a b c d aus, und bemerkt an dem Stäbchen g h, von dem Punkte n, welcher der obern Fläche des Bodens entspricht, bis an m, die Wasserhöhe, die jene 10 Cubikzoll in dem Glase a b c d einnehmen. Hierauf gießt man zum zweyten, dritten ꝛc. Male 10 Cubikzolle Wasser hinein, und be-

merkt bey p, q, r, s, t die Wasserhöhe an dem Stäbchen. Das Auge muß man allemahl genau in die Wasserfläche halten, um die Punkte n, m, p ꝛc. gehörig zu bestimmen.

3. Ist der Cylinder abcd überall genau von gleicher Weite, so werden auch die Abstände nm, mp, pq ꝛc. alle einander gleich seyn. Ist aber z. B. der Cylinder bey s weiter, als bey m herum, so wird rs oder st kleiner als nm ausfallen u. s. f. worauf es nun hier weiter nicht ankömmt. Nun theile man die erhaltenen Abstände nm, mp, qp jeden für sich, in 10 gleiche Theile, so wird man eine Scale oder einen Maaßstab erhalten, welcher die einzeln Cubikzolle Inhalt, für jede Höhe von dem Boden des Gefäßes, so genau geben wird, daß der Fehler der etwa von der ungleichen Weite des Glases herrühren könnte, nur immer sehr wenig betragen, und gänzlich verschwinden wird, wenn die Abstände nm, mp u. s. w. genau einander gleich gefunden werden.

4. Will man nun vermittelst eines solchen abgeeichten Glases z. B. den Cubikinhalt einer Flasche M sogleich ohne weitere Rechnung bestimmen, so fülle man M mit Wasser, gieße es in das Glas abcd und beobachte an dem angelegten Maaßstabe gh die Wasserhöhe, so erhält man den Inhalt sogleich in Cubikzollen

und

und Theilen, welche letztere, denn bloß nach dem Augenmaaße geschätzt werden können.

5. Enthält die Flasche M mehr Raum als das Gefäß a b c d, so wird es keiner Erläuterung bedürfen, wie zu verfahren seyn würde, dennoch den Inhalt der Flasche durch Hülfe dieses abgeeichten Cylinders zu bestimmen. Eine Vorrichtung dieser Art ist bey physicalischen Versuchen ganz unentbehrlich.

6. Hat man kein Glas mit einem ebenen Boden a b, oder ist auch das Glas überhaupt, wie meistens der Fall ist, in der Nähe des Bodens von zu ungleicher Weite, als daß man den Raum m n, oder die unteren 10 Cubikzolle in gleiche Theile eintheilen dürfte, so kann man den Nullpunct der Scale g h, erst bey m anfangen lassen; in welchem Falle denn in den Cylinder a b c d allemahl erst so viel Wasser gegossen wird, daß es bis an m reicht, ehe man das zu untersuchende Gefäß M in a b c d ausleert.

7. Das Verfahren (3), zu untersuchen, ob ein Gefäß überall gleiche Weite (Caliber) hat, nennt man auch das Calibriren. Glasröhren, die sehr enge und auf beyden Seiten offen sind, calibrirt man dadurch, daß man eine kleine Portion Quecksilber hineinsaugt, und vermittelst eines Cirkels untersucht, ob diese

Portion Quecksilber, nachdem man sie an diese oder jene Stelle der Röhre durch eine geringe Neigung derselben hinlaufen läßt, überall von einerley Länge bleibt. Es ist am besten, wenn diese Quantität Quecksilber nicht viel über die Länge eines Zolles in einer solchen Röhre einnimmt. Bey Verfertigung der Thermometer ist bekannt, daß man auf diese Weise vorher die Röhren calibriren muß, wozu aber möglichst reines Quecksilber genommen werden muß. Barometerröhren und überhaupt weite Röhren zu calibriren, verfährt man mit Quecksilber, wie in (2) mit Wasser gezeigt worden ist, d. h. man läßt eine dem Gewicht nach genau bestimmte kleine Portion Quecksilber vermittelst eines kleinen papiernen oder gläsernen Trichters, der unten eine sehr feine Oeffnung hat, mehrere Mahle in die unten mit einem Kork verschlossene Röhre, und untersucht ob die Höhen wie z. B. nm, np, nq u. s. w. sich genau wie 1, 2, 3 etc. verhalten, in welchem Falle denn auch nm = mp = pq u. s. w. und folglich die Röhre überall von gleicher Weite seyn würde.

8. Dieß mechanische Verfahren die innere Weite von Röhren und dergl. zu untersuchen, ist das einzige in der Ausübung anwendbare. Wollte man aus der Höhe z. B. pq = a, welche ein bestimmtes

Ge-

Gewicht Quecksilber = p in der Röhre bey q einnimmt, zu einer gewissen Absicht den Durchmesser der Röhre bey q selbst finden, so würde folgendes brauchbar seyn.

Es sey das Gewicht von 1 Cubiklinie Quecksilber = t Granen. Drückt man nun p auch durch Grane aus, so würde die in die Röhre hineingelassene Quecksilbersäule $\frac{p}{t}$ Cubiklinien enthalten. Nun sey an der Stelle q der Durchmesser der Röhre in Linien = x, und a sey auch in Linien ausgedrückt, so ist der cubische Inhalt der cylindrischen Quecksilbersäule pq auch = $\frac{1}{4}\pi x^2 a$, wenn π die bey der Kreisrechnung bekannte Ludolphische Zahl 3,14159... bedeutet.

Also $\frac{p}{t} = \frac{1}{4}\pi x^2 a$

Mithin $x = 2\sqrt{\frac{1}{\pi . t}} \cdot \sqrt{\frac{p}{a}}$

Hier wird der Factor $2\sqrt{\frac{1}{\pi . t}}$ eine bestimmte Zahl bedeuten, welche folgender Gestalt gefunden wird. Das Gewicht eines Pariser Duodecimal-Cubikzolles Quecksilber ist nach (IX.) = 4333,7 Grane Nürnb. Apothekergewicht. Also das Gewicht einer Cubiklinie = $\frac{4333,7}{1728}$ Gr.

E . . und $\frac{1}{\pi . t} = \frac{1728}{\pi . 4333,7}$. Nun durch Logarithmen

$l\ 1728 = 3,2375437$	$l\ 4333,7 = 3,6368689$
$= 5,2375437 - 2$	$\log \pi = 0,4971498$
abgezog. $4,1340187$	Summe $= 4,1340187$
$1,1035250 - 2$	

halb $0,5517625 - 1 = \log \sqrt{\frac{1}{\pi . t}}$

add. $l2 = 0,3010300$

Summe $0,8527925 - 1 = \log 2\sqrt{\frac{1}{\pi . t}}$

Also $0,712512 = 2\sqrt{\frac{1}{\pi . t}}$ welches ich mit m bezeichnen will. Demnach $x = m . \sqrt{\frac{p}{a}}$

Exempel. Gesetzt man habe gefunden $p = 16$ Gran, $a = 2''$. $6''' = 30'''$ Pariser Maaß, so ist

$\log p = 3,2041200 - 2$
$\log a = 1,4771213$
Rest $1,7269987 - 2$
halb $0,8634993 - 1$
add. $\log m = 0,8527925 - 1$
$\log x = 0,7162918 - 1$

Also die Weite der Röhre oder $x = 0,5204$ Pariser Linien, also etwas über $\frac{1}{2}$ Linie.

An=

Anmerkungen [illegible] (8) [illegible] in einer Abhandlung über das Ausmessen [illegible] [illegible] [illegible] Monath 1786. S. 97 ff.

Noch einige Bemerkungen über die Fruchtmaaße und Maaße für flüssige Dinge.

1. Bey der geometrischen Bestimmung des körperlichen Inhaltes eines Fruchtmaaßes, welches die Gestalt eines Cylinders hat, oder doch haben sollte, wird man sehr oft erhebliche Unterschiede in den Durchmessern desselben finden, wenn man sie an unterschiedenen Stellen misset. Nachlässigkeit in der Verfertigung solcher Gefäße, ungleiche Holzdicke, Abwechslungen der Luft, selbst der tägliche Gebrauch solcher Gefäße, und mehr andere Ursachen, sind an dieser unrichtigen Figur derselben schuld. Es fragt sich also, wie man die in die Höhe eines solchen Gefäßes zu multiplicirende Grundfläche berechnen soll, wenn sie kein vollkommner Kreis ist, und man doch den Inhalt des Gefäßes der Wahrheit so nahe als möglich finden soll.

2. Wer in dem Gedanken stünde, diese Untersuchung komme auf Kleinigkeiten hinaus, welche

kleinere Durchmesser also [illegible]

Für diese Voraussetzung wäre die Grundfläche

$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ [illegible]

8. Andere hingegen suchen zwey Kreisflächen, welche die grössere und kleinere Weite der Grundfläche, oder des Gefäßes zu ihren Durchmessern haben, und nehmen die Grundfläche für das arithmetische Mittel zwischen diesen beyden Kreisflächen. Nach dieser Voraussetzung wäre demnach die Grundfläche = $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)\frac{1}{4}\pi$, welche Grösse ich mit C bezeichnen will.

9. Man setze den Unterschied zwischen beyden Durchmessern oder $a - b = c$ also $a = b + c$, so findet sich

$A = \frac{1}{4}\pi . b^2 + \frac{1}{4}\pi . bc$

$B = \frac{1}{4}\pi b^2 + \frac{1}{4}\pi bc + \frac{1}{16}\pi c^2$

$C = \frac{1}{4}\pi b^2 + \frac{1}{4}\pi bc + \frac{1}{8}\pi c^2$

Also $C - B = B - A = \frac{1}{16}\pi c^2$

Demnach B die mittlere arithmetische Proportionalgrösse zwischen A und C.

10. Es erhellet also, daß, wenn man keinen besondern Grund hat, die Grundfläche für eine

Ellipse

Ellipse anzunehmen, oder auch ihren Inhalt einem Kreise gleich zu setzen, dessen Fläche C das arithmetische Mittel zwischen den Kreisflächen (8) seyn würde, man immer am besten thun wird, sich an die Bestimmung B (7) zu halten, welche das arithmetische Mittel zwischen dem größten und kleinsten Werthe A oder C, welchen man für die Grundfläche annehmen könnte, darstellt, folglich die Grundfläche für einen Kreis zu nehmen, dessen Durchmesser $= \frac{a+b}{2}$, der sogenannten äquirten Weite des Gefäßes, gleich seyn würde.

11. Wollte man sich die Mühe geben, noch mehrere Durchmesser zu messen, und aus ihnen das Mittel zu nehmen, so würde man einen der Wahrheit noch näher kommenden äquirten Durchmesser für die Berechnung der Grundfläche erhalten. Man würde am besten thun, den Umfang der Grundfläche etwa in 8 gleiche Theile zu theilen, wo sich denn bald ergeben wird, zwischen welchen Theilpunkten gemessen werden muß, um jedes Mahl einen Durchmesser zu erhalten. Der daraus abzuleitende äquirte Durchmesser würde gewiß eine grössere Schärfe geben als man je bey einem Getraidemaaße verlangt hat.

12. Wollte man in (9) berechnen, was einer der beyden Unterschiede C — B oder B — A

$= \frac{1}{4}\pi c^2 = \frac{1}{4}\pi (a-b)^2$ für ein Stück des ganzen mittlern Inhaltes B seyn würde, so würde dieses Stück durch den Bruch $\frac{B-A}{B}$

$= \frac{\frac{1}{4}\pi (a-b)^2}{\frac{1}{4}\pi (a+b)^2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ ausgedrückt werden müssen.

13. Es sey die Höhe des Getraidemaaßes $= h$, so ist $(B-A)\,h = \frac{1}{16}\pi(a-b)^2 \cdot h$, = dem absolute Unterschied zwischen den Werthen des Maaßes, je nachdem man die Grundfläche nach (6) oder nach (7) berechnet, und $\frac{(B-A).h}{B.h} = \frac{B-A}{B} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ würde denn auch angeben, was dieser Unterschied für ein Theil von dem äquirten Inhalte des Gefäßes selbst seyn würde.

14. Um zu berechnen, ob der Unterschied beträchtlich ist, je nachdem man für die Grundfläche eines Getraidemaaßes entweder A, B, oder C annimmt, so sey z. B. bey einem Getraidemaaße $a = 20$ Zoll $= 240$ Linien; $b = 19\frac{2}{3}$ Zoll $= 236$ Linien, also $c = a - b = 4$ L.; $a + b = 476$ L., demnach

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{4}{476} = \frac{1}{119}.$$

Also $\frac{B-A}{B} = \frac{1}{119^2} = \frac{1}{14161}$

Da

Da nun wohl zwey Durchmesser eines Getraidemaaßes nicht leicht um 4 Linien von einander unterschieden seyn werden, so sieht man leicht, daß es ziemlich einerley seyn wird, nach welcher von den drey Berechnungsarten (9) man den körperlichen Inhalt des Maaßes berechnen will.

15. Wäre nun z. B. $h = 7$ Zoll, so würde der Inhalt des Maaßes $= \left(\frac{20 + 19\frac{2}{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 7$ Cubikzoll $= (19\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 7 = \frac{119^2 \cdot 7 \cdot \pi}{36 \cdot 4}$ $= 2162,6$ Cubikzoll, wie man leicht durch Logarithmen findet.

Hiervon beträgt der $\frac{1}{14161}$ Theil 0,15 Cubikzoll, gegen das ganze eine unerhebliche Kleinigkeit.

16. Wären die Höhen des Gefäßes nicht überall einerley, so kann man auch aus ihnen ein arithmetisches Mittel nehmen, und solches mit der Grundfläche multipliciren.

17. Die Unregelmäßigkeiten der Höhen und des Bodens hat schon Hr. v. Münchhausen als Ursachen der Ungleichheiten der Maaße angegeben, und sie sind allerdings beträchtlicher in ihren Folgen als die Ungleichheiten der Durchmesser.

 18.

18. Selbst die Maaßgefäße für flüssige Dinge haben meistens keine ganz cylindrische Gestalt, wenn sie gleich von Blech gemacht sind, und man ist daher auch bey diesen oft genöthigt, verschiedene Durchmesser zu messen, um daraus einen äquirten Durchmesser abzuleiten. [illegible] haben solche Gefäße auch einen umgeschlagenen Rand nach innen, wodurch denn die Bestimmung des wahren äquirten [illegible] noch mehr erschwert wird. Viel[illegible] Durch[illegible] man hier am besten, den Durchmesser aus dem Umfange zu berechnen, indem [illegible] die Größe des Umfangs leicht durch einen [illegible] herumgelegten Streifen Papier bestimmt. Den hieraus abgeleiteten Durchmesser muß man [illegible] um die doppelte Blechdicke, die sich leicht nach dem Augenmaaße schätzen läßt, vermindern.

19. Würde man sich Getraidemaaße nicht von Holz, sondern der Dauerhaftigkeit wegen, etwa von Kupferblech machen lassen, so könnte man, um Kosten zu ersparen, die Frage beantwortet wünschen, was für Verhältnisse dabey zu beobachten sind, daß zu einem solchen Maaße so wenig Blech als möglich erfordert werde. Diese Frage würde denn auf folgende Aufgabe führen.

§. 17.

Eines cylindrischen Gefäßes Inhalt = A ist gegeben, man sucht wie

groß Durchmesser und Höhe desselben seyn müssen, damit die Summe seiner Grundfläche und Seitenfläche so klein als möglich werde.

Aufl. 1. Der Durchmesser heiße x, die Höhe y, so ist die Grundfläche $= \frac{1}{4}\pi x^2$.

2. Der Grundfläche Umfang $= \pi x$, also des Gefäßes Seitenfläche $= \pi x y$.

3. Des Gefäßes Inhalt $= \frac{1}{4}\pi x^2 y = A$; woraus $\pi x y = \frac{4A}{x}$ folgt.

4. Demnach die Summe der Grundfläche und Seitenfläche, welche Summe mit S bezeichnet werde

$$S = \frac{1}{4}\pi x^2 + \pi x y$$

oder $S = \frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{4A}{x}$

Dieser Ausdruck soll nun nach der Bedingung der Aufgabe ein Kleinstes werden, man sucht den Werth von x unter welchem diese Bedingung erfüllt wird.

5. Nach der Lehre vom Größten und Kleinsten, welche ich aus der Differenzialrechnung als bekannt voraussetze, muß man denjenigen Werth von x suchen, für welchen erstlich der Diffe-

[illegible] ... ntialquotient $\frac{dS}{dx}$ = 0, und dann der Werth des Differentialquotienten $\frac{ddS}{dx^2}$ positiv wird. ([illegible] d. Anwend. 155.)

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}\pi x - \frac{4A}{x^2}$$

[illegible] diesen Ausdruck nach (5)

$$\frac{1}{2}\pi x - \frac{4A}{x^2} = 0$$

$$\pi x^3 - 8A = 0$$

$$x = 2\sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}$$

[illegible] ist weiter

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{1}{2}\pi + \frac{8A}{x^3}$$

In diesen Ausdruck setze man den (7) [illegible] Werth für x, so wird aus der [illegible] (7) erstlich $\frac{8A}{x^3} = \pi$ und folglich

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{1}{2}\pi + \pi = \frac{3}{2}\pi \text{ positiv.}$$

[illegible] wird wirklich für $x = 2\sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}$ die Fläche am Kleinstes.

10.

10. Die Höhe des Gefäßes würde seyn $y = \frac{4A}{\pi x^2}$ (3). Aber $\frac{1}{2}\pi x^3 = 4A$ (7) also $\frac{4A}{\pi x^2} = \frac{1}{2}x$ demnach $y = \frac{1}{2}x = \sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}$

11. Um also die Höhe y des Gefäßes zu finden, so dividirt man den gegebenen Inhalt A mit der Zahl $\pi = 3{,}141592..$ oder multiplicirt ihn mit $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886...$ und zieht nun aus dem Quotienten oder aus dem Produkte die Cubikwurzel; die Weite x des Gefäßes nimmt man dann der doppelten Höhe gleich (9), so wird die Oberfläche den kleinsten Werth haben.

Durch Logarithmen würde

$$\log y = \tfrac{1}{3}(\log A - \log \pi)$$

12. Nach Hrn. v. Münchhausen's Hausvater I. Th. S. 600. ist der Braunschweigische Himten hoch $7\frac{1}{3}$ Pariser Zoll, weit $6\frac{8}{3}$ Zoll. Hieraus findet sich leicht der Inhalt = 1565,6 Pariser Cubikzoll = A.

Sollte demnach ein Himten dieser Art so verfertiget werden, daß er die kleinste Oberfläche nach (9) erhielte, so hätte man

Gr. = t, und $\frac{1}{\pi . t} = \frac{1728}{\pi . 4333,7}$. Nun durch Logarithmen

$l\,1728 = 3,2375437$	$l\,4333,7 = 3,6368689$
$= 5,2375437 - 2$	$\log \pi = 0,4971498$
abgezog. $4,1340187$	Summe $= 4,1340187$
$1,1035250 - 2$	

halb $0,5517625 - 1 = \log \frac{1}{\sqrt{\pi . t}}$

add. $l\,2 = 0,3010300$

Summe $0,8527925 - 1 = \log 2\sqrt{\frac{1}{\pi . t}}$

Also $0,712512 = 2\sqrt{\frac{1}{\pi . t}}$ welches ich mit m bezeichnen will. Demnach $x = m\sqrt{\frac{p}{a}}$

Exempel. Gesetzt man habe gefunden $p = 16$ Gran, $a = 2'' . 6''' = 30'''$ Pariser Maaß, so ist

$\log p = 3,2041200 - 2$
$\log a = 1,4771213$
Rest $1,7269987 - 2$
halb $0,8634993 - 1$
add. $\log m = 0,8527925 - 1$
$\log x = 0,7162918 - 1$

Also die Weite der Röhre oder $x = 0,5204$ Pariser Linien, also etwas über $\frac{1}{2}$ Linie.

An=

[illegible] Anmerkungen [illegible] (8) [illegible] in meiner Abhandlung über das Ausmessen der Weine in Rücksicht auf das [illegible] vermittelst des [illegible] Frankfurth und Leipzig bey [illegible] Monath 1786. S. 97 ff.

Noch einige Bemerkungen über die Fruchtmaaße und Maaße für flüssige Dinge.

§.

1. Bey der geometrischen Bestimmung des körperlichen Inhaltes eines Fruchtmaaßes, welches die Gestalt eines Cylinders hat, oder doch haben sollte, wird man sehr oft erhebliche Unterschiede in den Durchmessern desselben finden, wenn man sie an unterschiedenen Stellen misset. Nachlässigkeit in der Verfertigung solcher Gefäße, ungleiche Holzdicke, Abwechslungen der Luft, selbst der tägliche Gebrauch solcher Gefäße, und mehr andere Ursachen, sind an dieser unrichtigen Figur derselben schuld. Es fragt sich also, wie man die in die Höhe eines solchen Gefäßes zu multiplicirende Grundfläche berechnen soll, wenn sie kein vollkommner Kreis ist, und man doch den Inhalt des Gefäßes, der Wahrheit so nahe als möglich, finden soll.

2. Wer in dem Gedanken stünde, diese Untersuchung komme auf Kleinigkeiten hinaus,

welche

[illegible] Durchmessern also = [illegible]

Für diese Voraussetzung wäre die Grundfläche $=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ [illegible]

8. Andere hingegen suchen zwey Kreisflächen, welche die grössere und kleinere Weite der Grundfläche oder des Gefässes zu ihren Durchmessern haben, und nehmen die Grundfläche für das arithmetische Mittel zwischen diesen beyden Kreisflächen. Nach dieser Voraussetzung wäre demnach die Grundfläche = $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)\frac{1}{4}\pi$, welche Grösse ich mit C bezeichnen will.

9. Man setze den Unterschied zwischen beyden Durchmessern, oder $a-b=c$ also $a=b+c$, so findet sich

$$A=\tfrac{1}{4}\pi b^2+\tfrac{1}{4}\pi bc$$
$$B=\tfrac{1}{4}\pi b^2+\tfrac{1}{4}\pi bc+\tfrac{1}{16}\pi c^2$$
$$C=\tfrac{1}{4}\pi b^2+\tfrac{1}{4}\pi bc+\tfrac{1}{8}\pi c^2$$

Also $C-B=B-A=\frac{1}{16}\pi c^2$.
Demnach B die mittlere arithmetische Proportionalgrösse zwischen A und C.

10. Es erhellet also, daß, wenn man keinen besondern Grund hat, die Grundfläche für eine

Ellipse

Ellipse anzunehmen, oder auch ihren Inhalt einem Kreise gleich zu setzen, dessen Fläche C das arithmetische Mittel zwischen den Kreisflächen (8) seyn würde, man immer am besten thun wird, sich an die Bestimmung B (7) zu halten, welche das arithmetische Mittel zwischen dem größten und kleinsten Werthe A oder C, welchen man für die Grundfläche annehmen könnte, darstellt, folglich die Grundfläche für einen Kreis zu nehmen, dessen Durchmesser $= \frac{a+b}{2}$, der sogenannten äquirten Weite des Gefäßes, gleich seyn würde.

11. Wollte man sich die Mühe geben, noch mehrere Durchmesser zu messen, und aus ihnen das Mittel zu nehmen, so würde man einen der Wahrheit noch näher kommenden äquirten Durchmesser für die Berechnung der Grundfläche erhalten. Man würde am besten thun, den Umfang der Grundfläche etwa in 8 gleiche Theile zu theilen, wo sich denn bald ergeben wird, zwischen welchen Theilpunkten gemessen werden muß, um jedes Mahl einen Durchmesser zu erhalten. Der daraus abzuleitende äquirte Durchmesser würde gewiß eine grössere Schärfe geben als man je bey einem Getraidemaaße verlangt hat.

12. Wollte man in (9) berechnen, was einer der beyden Unterschiede C — B oder B — A

$= \frac{1}{16}\pi c^2 = \frac{1}{16}\pi (a-b)^2$ für ein Stück des ganzen mittlern Inhaltes B seyn würde, so würde dieses Stück durch den Bruch $\frac{B-A}{B}$ $= \frac{\frac{1}{16}\pi (a-b)^2}{\frac{1}{16}\pi (a+b)^2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ ausgedrückt werden müssen.

13. Es sey die Höhe des Getraidemaaßes $= h$, so ist $(B-A)\,h = \frac{1}{16}\pi (a-b)^2 . h$, der absolute Unterschied zwischen den Werthen dieses Maaßes, je nachdem man die Grundfläche nach (6) oder nach (7) berechnet, und $\frac{(B-A).h}{B.h} = \frac{B-A}{B} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ würde denn auch angeben, was dieser Unterschied für ein Theil von dem äquirten Inhalte des Gefäßes selbst seyn würde.

14. Um zu berechnen, ob der Unterschied beträchtlich ist, je nachdem man für die Grundfläche eines Getraidemaaßes entweder A, B, oder C annimmt, so sey z. B. bey einem Getraidemaaße $a = 20$ Zoll $= 240$ Linien; $b = 19\frac{2}{3}$ Zoll $= 236$ Linien, also $c = a - b = 4$ L.; $a + b = 476$ L., demnach

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{4}{476} = \frac{1}{119}.$$

Also $\frac{B-A}{B} = \frac{1}{119^2} = \frac{1}{14161}$

Da

Da nun wohl zwey Durchmesser eines Getraidemaaßes nicht leicht um 4 Linien von einander unterschieden seyn werden, so sieht man leicht, daß es ziemlich einerley seyn wird, nach welcher von den drey Berechnungsarten (9) man den körperlichen Inhalt des Maaßes berechnen will.

15. Wäre nun z. B. h = 7 Zoll, so würde der Inhalt des Maaßes $= \left(\frac{20 + 19\frac{2}{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 7$ Cubikzoll $= (19\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 7 = \frac{119^2 \cdot 7 \cdot \pi}{36 \cdot 4}$ = 2162,6 Cubikzoll, wie man leicht durch Logarithmen findet.

Hiervon beträgt der $\frac{1}{14161}$ Theil 0,15 Cubikzoll, gegen das ganze eine unerhebliche Kleinigkeit.

16. Wären die Höhen des Gefäßes nicht überall einerley, so kann man auch aus ihnen ein arithmetisches Mittel nehmen, und solches mit der Grundfläche multipliciren.

17. Die Unregelmäßigkeiten der Höhen und des Bodens hat schon Hr. v. Münchhausen als Ursachen der Ungleichheiten der Maaße angegeben, und sie sind allerdings beträchtlicher in ihren Folgen als die Ungleichheiten der Durchmesser.

[illegible] [illegible] die Maaßgefäße für flüssige [illegible] [illegible] meistens keine ganz cylindrische [illegible], wenn sie gleich von Blech gemacht [illegible], und man ist daher auch bey diesen oft [illegible], verschiedene Durchmesser zu messen, und daraus einen äquirten Durchmesser abzuleiten. Meistens haben solche Gefäße auch einen umgelegten Rand nach innen, wodurch denn die Bestimmung des wahren äquirten Durchmessers noch mehr erschwert wird. Vielleicht thut man hier am besten, den Durchmesser aus dem Umfange zu berechnen, indem man die Grösse des Umfangs leicht durch einen genau herumgelegten Streifen Papier bestimmt. Den hieraus abgeleiteten Durchmesser muß man denn um die doppelte Blechdicke, die sich leicht nach dem Augenmaaße schätzen läßt, vermindern.

19. Würde man sich Getraidemaaße nicht von Holz, sondern der Dauerhaftigkeit wegen, etwa von Kupferblech machen lassen, so könnte man, um Kosten zu ersparen, die Frage beantwortet wünschen, was für Verhältnisse dabey zu beobachten sind, daß zu einem solchen Maaße so wenig Blech als möglich erfordert werde. Diese Frage würde denn auf folgende Aufgabe führen.

§. 17.

Eines cylindrischen Gefäßes Inhalt = A ist gegeben, man sucht wie

groß

groß Durchmesser und Höhe desselben seyn müssen, damit die Summe seiner Grundfläche und Seitenfläche so klein als möglich werde.

Aufl. 1. Der Durchmesser heiße x, die Höhe y, so ist die Grundfläche $= \frac{1}{4}\pi x^2$.

2. Der Grundfläche Umfang $= \pi x$, also des Gefäßes Seitenfläche $= \pi x y$.

3. Des Gefäßes Inhalt $= \frac{1}{4}\pi x^2 y = A$; woraus $\pi x y = \frac{4A}{x}$ folgt.

4. Demnach die Summe der Grundfläche und Seitenfläche, welche Summe mit S bezeichnet werde

$$S = \frac{1}{4}\pi x^2 + \pi x y$$

oder $S = \frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{4A}{x}$

Dieser Ausdruck soll nun nach der Bedingung der Aufgabe ein Kleinstes werden, man sucht den Werth von x unter welchem diese Bedingung erfüllt wird.

5. Nach der Lehre vom Größten und Kleinsten, welche ich aus der Differenzialrechnung als bekannt voraussetze, muß man denjenigen Werth von x suchen, für welchen erstlich der

Differenzialquotient $\frac{dS}{dx}=o$ und dann der Werth des Differenzialquotienten $\frac{ddS}{dx^2}$ positiv wird. (Kästners Analys. d. Unendl. 155.)

6. Nun ist $\frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}\pi x-\frac{4A}{x^2}$

7. Setzt man also diesen Ausdruck nach (5) erstlich $=o$ d. h.

$$\frac{1}{2}\pi x-\frac{4A}{x^2}=o$$

oder $\frac{1}{2}\pi x^3-4A=o$

so wird $x=2\sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}$

8. Nun ist weiter

$$\frac{ddS}{dx^2}=\frac{1}{2}\pi+\frac{8A}{x^3}$$

9. In diesen Ausdruck setze man den (7) gefundenen Werth für x, so wird aus der Gleichung (7) erstlich $\frac{8A}{x^3}=\pi$ und folglich

$$\frac{ddS}{dx^2}=\frac{1}{2}\pi+\pi=\frac{3}{2}\pi \text{ positiv.}$$

Also wird würklich für $x=2\sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}$ die Fläche S ein Kleinstes.

10. Die Höhe des Gefäßes würde seyn $y = \frac{4A}{\pi x^2}$ (3). Aber $\frac{1}{2}\pi x^3 = 4A$ (7) also $\frac{4A}{\pi x^2} = \frac{1}{2}x$ demnach $y = \frac{1}{2}x = \sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}$

11. Um also die Höhe y des Gefäßes zu finden, so dividirt man den gegebenen Inhalt A mit der Zahl $\pi = 3{,}141592..$ oder multiplicirt ihn mit $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098861\ldots$ und zieht nun aus dem Quotienten oder aus dem Produkte die Cubikwurzel; die Weite x des Gefäßes nimmt man dann der doppelten Höhe gleich (9), so wird die Oberfläche den kleinsten Werth haben.

Durch Logarithmen würde
$\log y = \frac{1}{3}(\log A - \log \pi)$

12. Nach Hrn. v. Münchhausen's Hausvater I. Th. S. 600. ist der Braunschweigische Himten hoch $4\frac{6}{3}$ Pariser Zoll, weit $5\frac{8}{3}$ Zoll. Hieraus findet sich leicht der Inhalt $= 1565{,}6$ Pariser Cubikzoll $= A$

Sollte demnach ein Himten dieser Art so verfertiget werden, daß er die kleinste Oberfläche nach (9) erhielte, so hätte man

$$\log A = 3{,}1946808$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$2{,}6975309$$

mit 3 divid. $0{,}8991769 = \log y$

Demnach $y = 7{,}928$ Pariser Zoll

$x = 15{,}856$

So hoch und weit müßte demnach der Himten zu dem Zwecke genommen werden.

13. Man könnte nun noch nach dem Werthe der kleinsten Oberfläche S selbst fragen. Diese würde sich aus (3) und (9) auf folgende Art bestimmen:

$$\tfrac{1}{2}\pi x^2 = \pi \sqrt[3]{\frac{A^2}{\pi^2}} \quad (9)$$

$$\pi x y = 2\pi \sqrt[3]{\frac{A^2}{\pi^2}} \quad (9.\ 10.)$$

also $S = \tfrac{1}{2}\pi x^2 + \pi x y = 3\pi \sqrt[3]{\frac{A^2}{\pi^2}}$

oder $S = 3\sqrt[3]{A^2 \pi}$

Demnach für diese kleinste Fläche

$$2 \log A = 6{,}3893616$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$6{,}8865115$$

mit 3 dividirt $2{,}2955038$

addirt $\log 3 = 0{,}4771212$

$\log S = 2{,}7726250$

Giebt

giebt die kleinste Fläche = 592,31 Pariser Quadratzoll.

14. Bey dem Himten, welchen Hr. v. M. abgemessen hat (12), findet man leicht durch Logarithmen

die krumme Fläche = 323,93
Grundfläche = 293,56
Summe = 617,49

also dessen Oberfläche um 25,18 Quadratzoll grösser als die für ihn nach (13) herausgekommene kleinste Fläche, welche er für eine Höhe von 7,928 Pariser Zoll und Weite von 15,856 erhalten würde.

15. Eigentlich wird zu dem Cylinder (4) etwas mehr Blech als 592,31 Quadratzolle (13) erfordert werden, weil man das Blech zusammenfügen, bey den Zusammenfügungen über einander beugen, oder selbst an dem obersten Rande krümmen will. Allemahl braucht man aber doch zu einem Maaße von gegebenen Inhalte, das wenigste Blech, wenn es die angezeigten Verhältnisse hat.

16. Wollte man dem Gefäße die Gestalt eines Würfels geben, der oben wie natürlich offen bleibt, so würde auch dieser Würfel noch eine grössere Oberfläche behalten, als für die cylindrische Form gefunden worden ist. Denn

solcher Würfel den Inhalt A haben, so würde die Seitenlinie desselben $= \sqrt[3]{A}$, und folglich eines von den 5 Quadraten, welche zusammen die Grundfläche und die 4 Seitenwände ausmachen, den Flächenraum $\sqrt[3]{A^2}$, mithin das ganze Gefäß die Fläche $5 \sqrt[3]{A^2}$ bekommen, welche sich zu der cylindrischen S (13) verhalten würde wie $5 : 3 \sqrt[3]{\pi} = 10000 : 8787$.

Man braucht also zum Würfel eine beträchtliche Menge Blech mehr.

Vergleichung cylindrischer Gefäße, durch Hülfe so genannter Visirstäbe.

§. 18.

Der Gebrauch dieser Maaßstäbe ist im gemeinen Leben sehr häufig, bey der Bestimmung des körperlichen Raumes cylindrischer Gefäße, oder solcher die man auf Cylinder zu bringen sucht, zumahl für flüssige Dinge, deren Quantität in einem solchen Gefäße gewöhnlich nicht nach Cubikzollen, sondern nach der landesüblichen Einheit für flüssige Dinge, z. B. nach Maaßen, Quartieren u. dgl. bestimmt wird, welche Einheiten denn gewöhnlich selbst die cylindrische Form haben.

Man pflegt gewöhnlich hiebey eben nicht in der größten Schärfe zu rechnen, und sucht denn die Berechnung selbst für diese genannten Visirfälle so kurz und bequem als möglich einzurichten. Dieß hat die so genanten Visirstäbe veranlaßt, welche zwar nicht die größte Schärfe verstatten, aber doch ihrem Zwecke gut genug entsprechen, wenn man sich ihrer mit der gehörigen Sorgfalt bedient.

Die Ausübung solcher Geschäfte des Visirens, überläßt man nun freilich oft Leuten, die fast gar keine Theorie von den Werkzeugen haben, die man ihnen zum Behuf jener Arbeit in die Hände giebt, und daher aus Unwissenheit oft weit grössere Fehler zu Schulden kommen lassen, als diejenigen sind, welche nach der Natur eines solchen Werkzeugs sich nicht vermeiden lassen. Und doch hat jenes Geschäfte so viel Einfluß auf Handel und Wandel, daß es Niemanden überlassen werden sollte, der nicht zulängliche Proben seiner Geschicklichkeit darin abgelegt hätte.

2. Die Theorie dieser Visirstäbe, und die beste Einrichtung derselben zum Gebrauche, ist folgende: Man setze f (Fig. 8) sey das cylindrische Maaßgefäß, oder die Einheit, nach der man den körperlichen Inhalt eines vorgegebenen cylindrischen Gefäßes F angeben will. Der körperliche Inhalt dieses Gefäßes f in Cubikzollen

sollen sey auf das genaueste durch Abwägung (§. 15.) oder unmittelbare Berechnung aus der Höhe und dem Durchmesser desselben bestimmt worden. f mag diesen Inhalt selbst bezeichnen;

3. Man suche durch Rechnung den Durchmesser eines Cylinders, der mit f gleichen Inhalt haben würde, und dessen Höhe zugleich seinem Durchmesser gleich seyn würde. Nennt man den Durchmesser dieses Cylinders und also auch seine Höhe $= d$, so soll seyn $\frac{1}{4}\pi d^2 . d$ d. h. $\frac{1}{4}\pi d^3 = f$. Daraus findet sich $d = \sqrt[3]{\frac{4f}{\pi}}$.

4. Die Höhe lh des auszumessenden cylindrischen Gefäßes F heiße H, und der Durchmesser $lk = D$, so ist dessen körperlicher Inhalt

$$F = \frac{1}{4}\pi D^2 . H.$$

Demnach $F : f = D^2 H : d^3$

$$\text{und } F = \frac{D^2 . H}{d^3} . f = \frac{D^2}{d^2} . \frac{H}{d} . f$$

5. Nimmt man nun den Durchmesser $d = \sqrt[3]{\frac{4f}{\pi}}$ als eine Längeneinheit an, nach der man den Durchmesser D und die Höhe H misset, so wird das Gefäß F jenes Maaßgefäß f so oft enthalten, so viel Einheiten das Product $D^2 . H$ enthält, wie sehr leicht daraus erhellet, daß $F = D^2 . H . f$ wird, wenn man $d = 1$ setzt.

6. Ein

6. Ein Visirstab nach der einfachsten Einrichtung würde also derjenige seyn, daß man auf einen Stab a b (Fig. 4) lauter gleiche Theile = d aus o in 1, 2, 3 rc. trüge, und auf diesem Stabe alsdann den äußersten Theil o a, wieder in 10 kleinere Theile abtheilte, von denen man denn die Zehnthel weiter nach dem Augenmaaße schätzen könnte. Wollte man sich aber hierauf nicht verlassen, oder auch bey einem so langen Maaßstabe die (§. 65. pract. Geometr.) angeführte Constructionsart eines Tausendtheilchen Maaßstabes nicht anwenden, so könnte man ein kleineres Stäbchen c d (Medialstäbchen) zu Hülfe nehmen, dessen Länge man einem der Theile auf a b gleich nähme, es in 10 gleiche Theile abtheilte, und einem solchen Zehnthel = c m wieder 10 gleiche Theile gäbe.

7. Gesetzt also man fände durch Anlegung des Visirstabes a b an den Durchmesser l k des Gefäßes F, daß l k auf diesem Stabe von dem Theilpunkte 6 bis an den Punkt i zwischen o und a reichte, und o i entweder nach dem Augenmaaße, oder durch Anlegung des Medialstäbchens = 0, 43 wäre, so hätte man $D = 6{,}43$. Fände sich nun eben so die Höhe oder Länge l k des Gefäßes = 8,75 Theilen des Visirstabes a b, so würde der Inhalt des Gefäßes $F = 6{,}43^2 \,.\, 8{,}75 \,.\, f = 361{,}767875 \,.\, f$

wo-

wofür man zunächst 361,8 F nehmen könnte: d. h. F würde das Maaßgefäß F 361,8 mahl enthalten. Wollte man die Multiplication ersparen und durch Logarithmen rechnen, so hätte man überhaupt $\log F = 2 \log D + \log H$.

8. Wenn sich die Kenntnisse der Visirer auf Logarithmen erstreckten, so würde man zur Visirung cylindrischer Gefäße keiner weitern Vorschriften und keiner andern Visirstäbe, als des angegebenen bedürfen. Allein man hat den Visirern, deren Kenntnisse gewöhnlich nicht über die 4 Species hinausgehen, die Sache noch mehr erleichtern wollen, und daher den Visirstäben eine Einrichtung gegeben, wodurch wenigstens eine Multiplication, nemlich die Quadrirung des Durchmessers D erspart wird.

9. Die Theorie davon beruht auf folgenden Gründen. Weil in obiger Formel

$$F = \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{H}{d} \cdot f$$

der Quotient $\frac{D^2}{d^2}$ eine gewisse Zahl ausdrückt, so sey diese Zahl $= N$; so ist $D^2 = N \cdot d^2$, folglich $D = d \cdot \sqrt{N}$.

10. Man trage auf eine gerade Linie BO (Fig. 5), eine Länge OI = d, errichte in O eine

eine Perpendicularlinie OG abfällt $= d$, so ist

$$GI^2 = OI^2 + OG^2 = 2d^2$$

also $GI = d\sqrt{2}$

Man trage GI aus O in II und gedenke sich GII gezogen, so ist

$$GII^2 = OII^2 + OG^2 \text{ d. h.}$$
$$GII^2 = GI^2 + OG^2$$
$$= 2d^2 + d^2 = 3d^2$$

Also $GII = d\sqrt{3}$

Trägt man nun GII aus O in III, so findet sich durch ähnliche Schlüsse

$$GIII^2 = 4d^2 \text{ also}$$
$$GIII = d\sqrt{4}$$

welche man aus O in IV trage. Hierauf wird denn weiter $GIV = d\sqrt{5}$, welche aus O in V getragen werde.

11. So erhält man durch dieses Verfahren einen Maaßstab OB auf welchem, der Ordnung nach, die Weiten

$$OI = d$$
$$OII = d\sqrt{2}$$
$$OIII = d\sqrt{3}$$
$$OIV = d\sqrt{4}$$
$$OV = d\sqrt{5}$$
$$OVI = d\sqrt{6}$$

u. s. w. sind.

12. Will man nun z. B. für den Durchmesser lk des Gefäßes f den Quotienten $\frac{D^2}{d^2}$ oder die Zahl N (9) finden, so trage man den Durchmesser lk auf den Visirstab OB, und sehe zu, wie viel er (von D angerechnet) Theile auf OB fasset, oder lege auch den Anfangspunkt O an den einen Endpunkt l des Durchmessers, und bemerke auf welchen Theilpunkt von OB, der andere Endpunkt k hinfällt. Gesetzt es geschehe dieses auf den 36ten Theilpunkt, so würde $D = d. \sqrt{36}$ also $D^2 = 36 d^2$, mithin $\frac{D^2}{d^2}$ oder N sogleich selbst $= 36$ seyn.

Wäre nun die Höhe $lh = H$ nach dem Maaßstabe ab (6) gemessen $= 5, 6$, so hätte man sogleich $F = 36. 5,6. f = 201, 6 f$, oder das Maaßgefäß f (Visirmaaß) würde in F enthalten seyn 201,6 mahl (5).

13. Man bringt beyde Abtheilungen ab (Fig. 4.) und OB (Fig. 5.) gewöhnlich auf einem und demselben Stabe, nur auf unterschiedenen Seiten desselben an, und nennt dann die Theile oder Theilpunkte auf der Höhenscale ab (6) Höhenpunkte, diejenigen aber auf der Durchmesserscale OB Tiefpunkte.

14. Wenn demnach der Durchmesser lk, eines cylindrischen Gefäßes F auf der Scale der

der Tiefpunkte von O angerechnet N Theile, und die Höhe I II auf der Scale der Höhenpuncte M Theile fasset, so enthält das Gefäß F so viel Visirmaaße f, als das Produkt N . M ausdrückt, und so wäre denn durch einen Visirstab, nach der angeführten Einrichtung, allerdings etwas in Absicht auf die Multiplication erleichtert, weil man nunmehr wenigstens kein D^2 wie in (7) zu berechnen braucht.

15. Selten wird die Anzahl N der Tiefpunkte, welche auf den Durchmesser des Gefäßes kommen, eine ganze Zahl seyn. Es ist also nöthig, daß die Theile, wie OI, III, IIIII ꝛc. noch weiter abgetheilt werden, wobey man sich denn begnügt, jeden solchen Theil OI, III ꝛc. für sich in 10 kleinere gleiche Theile abzutheilen, und die noch kleinern nach dem Augenmaaße zu schätzen.

16. Allein man begreift, daß die Theile auf OI, III, ꝛc. eigentlich nicht einander gleich seyn dürfen, sondern man solche gleichfalls nach der Formel $d\sqrt{N}$ (9. 10) bestimmen muß, wenn in der Visirung eines Gefäßes F nicht einige Fehler entstehen sollen. Man könnte nun zwar für die Unterabtheilungen auch eine Construction angeben, allein sie ist zu mühsam und beschwerlich, als daß man sie in der Ausübung anzu-

wenden pflegt, da selbst schon für die grössern Theile OI, III, ꝛc. die Construction (10) etwas lästig wird, so bald die Hypothenusen wie GV, GVI ꝛc. so groß werden, daß man zum Abfassen derselben, vielleicht mit keinem hinlänglich grossen Stangenzirkel versehen ist.

17. Es wird demnach am besten seyn, bey der Verfertigung der Tiefenscale OB die Theile wie OI, OII, OIII ꝛc. lieber zu berechnen und aufzutragen.

Also wäre z. B. (11)

$$\begin{aligned} OI &= d \\ OII &= d\sqrt{2} = d \cdot 1{,}414 \\ OIII &= d\sqrt{3} = d \cdot 1{,}732 \\ OIV &= d\sqrt{4} = d \cdot 2{,}000 \\ OV &= d\sqrt{5} = d \cdot 2{,}236 \end{aligned}$$

Man fasse also von dem Maaßstabe ab der Höhenpunkte erstlich einen Theil o 1 = d, und trage ihn auf die Tiefenscale aus O in I, dann 1,414 Theile von ab aus O in II; 1,732 aus O in III u. s. w. welches man auch ohne Stangenzirkel dadurch bewerkstelligen kann, daß man den Maaßstab ab an DB anlegt, und die gehörige Zahl von Theilen, wie sie die Rechnung angiebt, auf OB absticht, so wird man auf OB erstlich die Haupttheilung erhalten.

18.

18. Damit man nicht nöthig habe, der Ordnung nach, die Quadratwurzeln aller natürlichen Zahlen selbst zu berechnen, so kann dazu folgendes Täfelchen für die Quadratwurzeln der ersten 100 natürlichen Zahlen dienen, denen denn auch noch die Wurzeln von 5 zu 5 Zehntheilchen, so weit es nöthig ist, beygefügt sind.

Tafel der Quadratwurzeln aller Zahlen von 5 zu 5 Zehnth. bis auf 100.

N	√N	N	√N	N	√N	N	√N
0,5	0,707	17,5	4,183	34,5	5,876	67	8,185
1	1,000	18	4,242	35	5,916	68	8,246
1,5	1,225	18,5	4,302	35,5	5,960	69	8,306
2	1,414	19	4,359	36	6,000	70	8,366
2,5	1,581	19,5	4,417	37	6,082	71	8,426
3	1,732	20	4,472	38	6,164	72	8,485
3,5	1,871	20,5	4,527	39	6,245	73	8,544
4	2,000	21	4,582	40	6,324	74	8,602
4,5	2,121	21,5	4,637	41	6,403	75	8,660
5	2,236	22	4,690	42	6,481	76	8,717
5,5	2,345	22,5	4,745	43	6,557	77	8,775
6	2,449	23	4,796	44	6,633	78	8,831
6,5	2,549	23,5	4,848	45	6,708	79	8,888
7	2,645	24	4,898	46	6,782	80	8,944
7,5	2,738	24,5	4,950	47	6,855	81	9,000
8	2,828	25	5,000	48	6,928	82	9,055
8,5	2,915	25,5	5,050	49	7,000	83	9,110
9	3,000	26	5,099	50	7,071	84	9,165
9,5	3,082	26,5	5,149	51	7,141	85	9,219
10	3,162	27	5,196	52	7,211	86	9,273
10,5	3,241	27,5	5,246	53	7,280	87	9,327
11	3,316	28	5,291	54	7,348	88	9,381
11,5	3,391	28,5	5,340	55	7,416	89	9,434
12	3,464	29	5,385	56	7,483	90	9,487
12,5	3,535	29,5	5,432	57	7,550	91	9,539
13	3,605	30	5,477	58	7,616	92	9,591
13,5	3,675	30,5	5,522	59	7,681	93	9,643
14	3,741	31	5,567	60	7,746	94	9,695
14,5	3,808	31,5	5,612	61	7,810	95	9,746
15	3,873	32	4,657	62	7,874	96	9,798
15,5	3,938	32,5	5,702	63	7,937	97	9,849
16	4,000	33	5,744	64	8,000	98	9,899
16,5	4,063	33,5	5,789	65	8,062	99	9,950
17	4,123	34	5,831	66	8,124	100	10,000

Will man nun die Unterabtheilungen von OI, I II, II III ꝛc. auftragen, so weit es nöthig ist, so fasse man aus obiger Tafel der Ordnung nach die Quadratwurzeln von 0,5; 1,5; 2,5 ꝛc. also 0,707; 1,225; 1,581 ꝛc. Theile des Maaßstabes ab, und trage sie aus O in m; aus O in n ꝛc. theile hierauf jeden Raum wie Om; mI; In; nII ꝛc. für sich in 5 gleiche Theile, die Räume aber, welche über X hinausgehen, schlechtweg nur in 10 gleiche Theile. Ist der Maaßstab bis auf die Zahl N = 100 aufgetragen, so trägt man ihn erforderlichen Falles nur noch für N = 110; 120; ꝛc. bis N = 150 auf, und theilt die erhaltenen Räume in 10 gleiche Theile, so hat man die Tiefpunkte für N = 101; 102; 103 ꝛc. bis 150. Da aber hier die Theile schon klein ausfallen, so läßt man die noch weitere Abtheilung weg, indem man die Tiefpunkte 101,1; 101,2 ꝛc. nach dem Augenmaaße schätzt, und so ist demnach der Tiefenstab, in so weit er zum Gebrauche erforderlich ist, verfertigt.

19. Die Ursache warum man die ganzen Räume OI, III, IIIII bis ohngefähr auf den Xten Tiefpunkt, nicht sogleich auch in 10 gleiche Theile abtheilt, ist, weil diese Intervallen unter sich selbst zu ungleich ausfallen, als daß eine Abtheilung derselben in gleiche Theile nicht vielleicht einen erheblichen Fehler

 im

im Visiren solcher Gefäße, deren Durchmesser noch nicht bis auf den 10ten Tiefpunkt geht, verursachen könnte. Ja wollte man die Tiefenscale wenigstens bis auf N = 10 noch genauer verfertigen, so müßte man die Werthe von $\sqrt{N}$ vielleicht für alle einzeln Zehntheilchen von N berechnen und auftragen, aber das mögte wohl etwas für zu lästig gehalten werden, und darum begnügt man sich bloß mit dem Verfahren (18), welches denn auch für die meisten Fälle hinlänglich genau ist. Ist N größer als 100, so wachsen die Quadratwurzeln so gleichförmig, daß es nur nöthig ist, sie für 10 zu 10 Tiefpunkten zu berechnen und aufzutragen, und dann die kleineren Theile nach (18) zu bestimmen.

20. Um durch ein Beyspiel zu erläutern, wie groß bis zum 10ten Tiefpunkt der Fehler seyn würde, wenn man die Räume OI, I II, II III selbst auch unmittelbar nur in 10 gleiche Theile abtheilte, und nicht nach (18) noch besonders die mittlern Punkte m, n, o, p 2c. bestimmte, so sey z. B. N = 4, so ist für diesen Werth die Distanz OIV = 2,000, aber für N = 5 die Distanz OV = 2,236; also OV — OIV = 0,236 = IV. V; theilte man also dieses Intervall schlechtweg in 10 gleiche Theile, so käme auf den Punkt q zwischen IV und V der Werth $OIV + \frac{0,236}{2} = O.IV + 0,118$

=

= 2,118 hingegen nach der Tafel die Zahl 2,121, welche von 2,118 nur um 0,003 unterschieden ist. Es erhellet hieraus, daß es um so mehr hinlänglich ist, die auf den 10ten Tiefpunkt folgenden Werthe nur nach der Ordnung der ganzen Zahlen d. h. für N bloß = einer ganzen Zahl, aufzutragen, und dann die erhaltenen Intervalle auf der Scale bloß in 10 gleiche Theile abzutheilen.

21. Alles kömmt also bey der Verfertigung des Visirstabes auf den Werth der Längen-Einheit d (4) an, welche man für ein gegebenes Visirmaaß f, nach der Formel (5)

$$d = \sqrt[3]{\frac{4f}{\pi}}$$

berechnet.

Wollte man z.B. den Werth von d für das Göttingische Quartiergefäß (§. 13. 6.) dessen Inhalt f = 50,592 Pariser Cubikzoll ist, berechnen, so hätte man nach §. 13. 6. das dortige K = f gesetzt,

$$\begin{array}{rl} \log f = & 1,7046884 \\ \log 4 = & 0,6020600 \\ \hline & 2,3061484 \\ \log \pi = & 0,4971499 \\ \hline & 1,8089985 \end{array}$$

dividirt mit 3) 0,6029995 = log d

also d = 4,0086 Pariser Zoll.

22.

22. Um nun die Höhenscale a b. (13) richtig zu zeichnen, von der nachher die Maaße für die Tiefenscale abgetragen werden (17), so ist es nicht rathsam, den (21) gefundenen Werth für d, einzeln auf a b von 0 nach 1, von 1 nach 2 u. s. w. aufzutragen, weil bey einem solchen Auftragen einzelner Stücke, sich kleine Fehler sehr leicht häufen; sondern vielmehr ein Vielfaches von d z. B. das Fünffache zu berechnen und aufzutragen, und die erhaltenen Räume in 5 gleiche Theile abzutheilen. Nun ist für obigen (21) gefundenen Werth von d das Fünffache oder 5. d = 20,043 Pariser Zolle = 1'. 8''. 0''',51 Pariser Duodecimalmaaß.

Man trage demnach auf a b von 0 nach 5, von 5 nach 10 u. s. w. immer 1'. 8''. 0'''. 5.. Pariser Maaß, und theile die erhaltenen Räume in 5 gleiche Theile, so erhält man die Höhenpunkte 1, 2, 3.... richtiger, als wenn man nur schlechthin den Werth von d einzeln nach einander auf a b hingetragen hätte. Für einen solchen Theil verfertigt man alsdann noch besonders das Medianstäbchen (6).

23. Einen Visirstab wie (13) pflegt man in der Ausübung selten über 6 Fuß lang zu machen. Die Höhenscale auf ihm würde dann, für den (21) gefundenen Werth von d, bis auf den 18ten Höhenpunkt gehen, und die Tiefenscale bis auf den 324sten Tiefpunkt, weil

d. √

$d . \sqrt{324} = d . 18 = 4 . 18 = 72'' = 6'$ ist, wenn für d bloß 4″ genommen werden. Es werden indessen selten so große Gefäße zu visiren vorkommen, daß es nöthig seyn sollte, die Tiefenscale so weit zu erstrecken, deren Theile denn am Ende auch zu klein ausfallen, um gehörig genau dem Zwecke des Visirens zu entsprechen, indem ein solches Theilchen mehr oder weniger, bey der Bestimmung des Durchmessers lk eines zu visirenden Gefäßes F, auf den daraus abzuleitenden Inhalt schon beträchtlichen Einfluß hat.

So wäre z. B. für $N = 324$; $\sqrt{N} = 18$ und für $N = 323$; $\sqrt{N} = 17{,}972$; also das Intervall vom 323sten bis zum 324sten Tiefpunkt $= d . (\sqrt{324} - \sqrt{323}) = d . 0{,}028 = 0{,}112$ Zoll $= 1{,}3$ einer Pariser Linie, wenn $d = 4$ Zoll gesetzt wird.

Reichte demnach der Durchmesser lk des Gefäßes F bis auf den 324sten Tiefpunkt, und die Höhe hl bis auf den 10ten Punkt der Höhenscale, so würde das Gefäß $F = 324 . 10 = 3240$ Quartieren. Könnte man nun aber für einen Fehler von ohngefähr 1,3 Pariser Linie auf der Tiefenscale nicht gut stehen, oder man hätte auch den Durchmesser lk z. B. nur zu 323 Tiefpunkten angegeben, wie solches sich leicht eräugnen könnte, so würde man statt 3240 Quartiere nur 3230 bekommen, und

also den Inhalt um 10 Quartiere unrichtig angeben.

24. Ohngeachtet man nun in der Ausübung vielleicht einen Fehler zu Gute hält, der nur den 324sten Theil des ganzen Inhalts beträgt, so erhellet doch hieraus überhaupt, bis auf was für kleine Theile der Tiefenscale man mit Sicherheit muß rechnen können, wenn man den Inhalt eines zu visirenden Gefäßes nicht mit merklicher Unrichtigkeit finden soll. Große Gefäße von 3000 und mehreren Quartieren, auf ein einzelnes Quartier richtig bestimmen zu wollen, ist eine Forderung, die man durch keinen Visirstab zu bewerkstelligen wagen wird, und dieß um so weniger, da solche Gefäße nie vollkommen die cylindrische Gestalt haben, die man in der Theorie voraussetzt.

Beym Visiren wird man sich im allgemeinen wohl begnügen, wenn man bis auf den 100sten oder 200sten Theil des zu bestimmenden Inhaltes mit Sicherheit wird rechnen können. Die Arbeiten der gewöhnlichen handwerksmäßigen Visirer werden selten nur eine solche Genauigkeit zulassen.

25. Man sieht zugleich aus den bisherigen Betrachtungen, daß bey Visirstäben, welche nur auf kleinere Maaßgefäße, wie z. B. auf solche, welche nicht viel über 50 Cubikzoll ent-

enthalten, eingerichtet sind, die Intervallen der Tiefpunkte auch sehr bald so klein werden, daß eine Abtheilung derselben in 10 Theile nach (18) nicht einmahl bequem mehr statt findet, und man also diese Theile meistens schon bloß nach dem Augenmaaße wird schätzen müssen, wenn man anders die Tiefenscale nicht durch gar zu nahe zusammenfallende Theilpunkte für die Ausübung unbequem machen will, zumahl da diese Theilpunkte doch eben nicht sehr fein seyn dürfen, wenn sie sich bey dem häufigen Gebrauch der Visirstäbe nicht sehr bald abnutzen sollen. So ist z. B. das Intervall vom 30sten bis zum 31sten Tiefpunkt $= d(\sqrt{31} - \sqrt{30})$ und also für $d = 4''$ (21) nur $= 4\,(5{,}567 - 5{,}477) = 4 \cdot 0{,}090 = 0{,}36$ Zoll, also schon so klein, daß man die Zehntheile davon wohl lieber nach dem Augenmaaße schätzen, als sie unmittelbar auf den Stab tragen wird. Höchstens würde man ein solches Intervall etwa nur noch unmittelbar auf dem Stabe halbiren, um ihn nicht durch gar zu viel Theilpunkte undeutlich zu machen.

Also nur bey Visirstäben, welche auf Maaßgefäße von viel größern Durchmessern eingerichtet werden, wird man die Intervallen der entferntern Tiefpunkte noch in kleinere Theile abtheilen.

26. Einige haben daher, um auf einer Tiefenscale größere Intervallen zu erhalten, als

bey

bey kleinen Maaßgefäßen nach dem bisherigen Verfahren sich ergeben würden, den Vorschlag gethan, den Inhalt des gegebenen Maaßgefäßes f nicht wie (3) in einen Cylinder von gleicher Höhe und Weite zu verwandeln, sondern vielmehr in einen Cylinder, von einem beträchtlich großen Durchmesser, und diesen Durchmesser alsdann als eine Längeneinheit d bey der Construction des Visirstabes nach (10) zum Grunde zu legen. Z. B. es sey f in ein Gefäß zu verwandeln, dessen Durchmesser d = 1 Fuß = 12 Zoll sey, so würde, wenn man die Höhe desselben mit h bezeichnet

$$\tfrac{1}{4}\pi\, d^2 h = f \text{ d. h. } \frac{144}{4}\pi h = f \text{ also}$$

$$h = \frac{4f}{144.\pi} = \frac{f}{36\pi} \text{ Zollen, wenn}$$

f in Cubikzollen gegeben ist.

Nunmehr wäre nach (4) für das zu visirende Gefäß F

$$F:f = \tfrac{1}{4}\pi D^2 H : \tfrac{1}{4}\pi d^2 h$$
$$= D^2.H : d^2.h$$

$$\text{oder } F = \frac{D^2}{d^2}.\frac{H}{h}.f$$

Es ist also begreiflich, daß wenn man jetzt d als eine Längeneinheit für die Bestimmung des Durchmessers D betrachtet, und darnach einen Visirstab nach dem Verfahren (17) aufträgt,

trägt, d. h. OI = 1 Fuß, OII = 1,414 Fuß, OIII = 1,732 Fuß ꝛc. nimt, hierauf eine Höhenscale verzeichnet, worauf die für h gefundene Grösse $h = \frac{f}{36 \cdot \pi}$ Zolle als Längenheit zum Grunde gelegt wird, man alsdann ebenfalls den Inhalt des Gefäßes F bekommen wird, wenn man die beyden Zahlen N und M mit einander multiplicirt, deren erstere N die Anzahl der Tiefpuncte ausdrückt, welche auf den Durchmesser D kommen, und M die Anzahl der Höhenpunkte, welche auf die Höhe H kommen, wenn man sie auf der Höhenscale messen würde.

Für f = 50,592 Pariser Cubikzoll (21) käme für jeden Theil h der Höhenscale der Werth

$$h = \frac{50,592}{36 \cdot 3,1415..} = 0,447.. \text{ Pariser Zoll}$$

welcher denn auf ab (6) von o nach 1; von 1 nach 2 ꝛc. oder noch richtiger nach einem Verfahren wie (22) aufzutragen ist. Ein Medialstäbchen würde aber jetzt kaum mehr nöthig seyn, weil die Theile auf ab schon so klein ausfallen, daß man Hunderttheilchen derselben wohl nur nach dem Augenmaaße schätzen wird.

Die Tiefenscale würde jetzt nur bis zum 36ten Tiefpunkt gehen, wenn der Visirstab nicht über 6 Fuße lang werden soll. Das letzte Inter-

Intervall würde 10 ($\sqrt{36} - \sqrt{35}$) = 0,084′ = 0,84 Zoll, also immer noch groß genug, um auf dem Stabe eine unmittelbare Abtheilung in 10 kleinere Theile zuzulassen. Fast würde man aber nunmehr für die ersten Intervalle O I, I II, rc. auch die Werthe von $\sqrt{N}$ (16) für N = 0, 1; 0, 2; ... 1, 1; 1, 2 rc. berechnen und auftragen müssen. Von N = 3 angerechnet, wird dies aber kaum mehr nöthig seyn.

27. Allerdings erspart man nach dem Verfahren (26) die Berechnung und Auftragung einer so großen Menge von Tiefpunkten, als nach einer kleinern Längeneinheit der Tiefenscale erforderlich ist. Aber für das genauere Visiren der Gefäße wird dadurch doch nicht mehr gewonnen.

28. Ueberhaupt erhellet, daß man auch für jedes vorgegebene Maaßgefäß einen Visirstab wird verfertigen können, wenn man den Durchmesser = δ des Gefäßes sogleich selbst zu einer Einheit der Tiefenscale, und die Höhe desselben zu einer Einheit der Höhenscale annimmt. Um aber alsdann die Werthe von $\delta\sqrt{N}$ auf die Tiefenscale auftragen zu können, muß man für die Einheit δ erst einen gewöhnlichen Maaßstab auf dem alle Theile = δ sind, nebst den Unterabtheilungen desselben in 10 rc. Theile verfertigen, welches bey dem Verfahren (3) nicht

nicht nöthig war, weil, wenn die Einheit der Höhenscale auch = δ ist, diese Höhenscale sogleich selbst wie in (17) zum Abtragen der Tiefenpunkte gebraucht werden kann.

29. Um beym Visiren einen Tiefenstab ganz zu ersparen, so kann man auch, um die Quadrirung des Durchmessers D nach dem Verfahren (7) zu vermeiden, sich der Quadrattafeln bedienen, die man hin und wieder in Sammlungen von Tafeln bis auf die Zahl 1000 vorfindet, wo man denn jedes Quadrat von D etwa nur bis auf die Hunderttheilchen nimmt, um die Multiplication, welche nachher mit der Höhe H vorzunehmen ist, nicht unnöthiger Weise zu erschweren. Findet man z. B. auf der Höhenscale den Durchmesser D wie in (7) = 6,43, so suche man in den Quadrattafeln das Quadrat von 643 = 413449, schneide davon 4 Decimalstellen ab, weil D nicht der ganzen Zahl 643, sondern dem Decimalbruche 6,43 gleich ist, und behalte für D^2 nur 2 Decimalstellen, nemlich 41,34, welches dann mit der Höhe H multiplicirt, den Inhalt F wenigstens so genau als in der Ausübung nöthig ist, geben wird.

30. Um alle Multiplication zu ersparen, und die Berechnung des Inhaltes eines Gefäßes bloß auf eine Addition zu bringen, hat man auch logarithmische Visirmaaßstäbe

stäbe angegeben, deren Einrichtung auf folgenden Gründen beruht.

Man suche aus den Logarithmen-Tafeln der Ordnung nach, die Zahlen, welche gleichen logarithmischen Differenzen entsprechen, z. B. der Differenz 0,05, so würde der Anfang dieser Zahlenreihe auf folgende Art aussehen:

Logarithmen = x	Zahlen = y.
0,00	1,000
0,05	1,122
0,10	1,259
0,15	1,412
0,20	1,585
0,25	1,778
0,30	1,995
0,35	2,239
0,40	2,512
0,45	2,818
0,50	3,163
0,55	3,548
0,60	3,981
0,65	4,467
0,70	5,012
0,75	5,624
0,80	6,310
0,85	7,079
0,90	7,943
0,95	8,913
1,00	10,000
1,05	11,221
1,10	12,590
1,15	14,126
1,20	15,850
1,25	17,783
1,30	19,953
1,35	22,387

31. Nun nehme man den Diameter d, welchen man nach der Formel (3) berechnet habe, und trage ihn (Fig. 6) als Einheit aus a in b; hierauf nehme man weiter der Ordnung nach ac = 1,122; ad = 1,259; ae = 1,412 u. s. w. wie die Werthe y in dem angeführten Täfelchen ausweisen, zu welchem Zwecke man denn den Diameter d = 1 in 1000 gleiche Theile abgetheilt haben muß. Man schreibe hierauf an die Punkte b, c, d, e ꝛc. der Ordnung nach, die Logarithmen von ab, ac, ad ꝛc. d. h. an b die Zahl 0, an c die Zahl 0,05; oder schlechtweg die Zahl 5, an d die Zahl 0,10; oder 10 u. s. w. wie die Zahlen der Logarithmenreihe x ausweisen, so erhält man eine logarithmische Scale at, welche man höchstens bis auf die Zahl y = 20 fortzusetzen nöthig hat, weil dann schon z. B. für den oben gefundenen Werth von d = 4 Pariser Zollen (21) der Maaßstab über 6 Schuh lang ausfallen würde, und derselbe selten länger gemacht zu werden pflegt (23). Man kann hierauf jedes der einzeln Intervalle bc, cd ꝛc. noch weiter in 5 gleiche Theile, und jeden der erhaltenen Theile wieder in 10 abtheilen, um der Ordnung nach die Punkte zu erhalten, denen die Logarithmen 0,06; 0,07; 0,08; 0,09 u. s. w.; dann ferner die Logarithmen, z. B. 0,061; 0,062; ꝛc. oder wenn man bey den noch kleinern Theilen das Augenmaaß zu Hülfe

nehmen will, die Logarithmen z. B. 0,0611; 0,0612 rc. zugehören würden.

32. Um nun mit einem solchen Logarithmenstabe ein cylindrisches Gefäß F (Fig. 3) zu visiren, so bedarf der Visirer nur noch eines Hülfstäfelchens, welches darin besteht, daß es die Logarithmen aller Zahlen bis höchstens auf die Zahl 1000 enthält, weil wohl selten Gefäße über 1000 Quartiere oder Visirmaaße f zum Visiren vorkommen, wobey es denn hinlänglich ist, wenn dieß Täfelchen die Logarithmen nur bis zur 4ten Decimalstelle enthält, da es denn vielleicht nur einen Raum von ei paar Quartblättern einnehmen würde.

Soll nun das Gefäß F visiret werden, s untersuche man, wie viel Theile der Logarith menscale at, von a angerechnet, auf den Durch messer lk = D; und auf die Höhe lh = H kommen. Gesetzt lk reiche auf der gedachte Scale, von a bis auf denjenigen Punkt, we chem der Logarithme 0,7123 entsprechen würd und die Höhe lh erstrecke sich von a b an den Punkt 0,9756 der Scale; weil nu $\log F = 2 \log D + \log H$ (5) so addire d Visirer zur Zahl welche auf die Höhe lh g kommen ist, zweymahl diejenige welche auf d Durchmesser lk kam, nemlich

0,9756
0,7123
0,7123
2,4002

und suche die Summe 2,4002 in dem Hülfstäfelchen auf, so werden zunächst 258 Quartiere oder Maaßgefäße f auf den Inhalt F kommen.

33. Solche logarithmische Visirstäbe mit einer geringen Abänderung in Rücksicht auf die Art, wie die Zahlen auf die Scale geschrieben werden und das Hülfstäfelchen eingerichtet ist, hat mein Vater im mathematischen Atlas (Augsburg 1745) auf Tab. XV. angegeben. Man s. auch Bions mathematische Werkschule, (1712.) S. 69, wo diese Art des Visirens Hrn. Sauveur zugeschrieben wird. Aehnliche Vorschriften ertheilt auch Herr Déz in der Encyclopédie methodique. (Paris 1785) Mathematiques unter dem Artikel Jaugeage.

34. Weil in dem obigen Täfelchen (30) die Logarithmen x um gleiche Differenzen fortgehen, so ist klar, daß die ihnen entsprechenden Zahlen y eine geometrische Progression ausmachen. Hieraus folgt denn, daß die einzelnen Intervalle der Scale at gleichfalls nach einer geometrischen Progression fortgehen, und daher sehr bald so groß werden, daß wenn jedes einzelne Intervall in 5 gleiche Theile, und dann jeder solcher Theil wieder in 10 abgetheilt worden, die Schätzung von noch kleinern Theilen sich ohne Mühe, und mit hinlänglicher Genauigkeit wird bewerkstelligen lassen, so daß man

man in einer logarithmischen Grösse, wie z. B. 0,9756 im vorigen Beyspiele (32) nicht leicht um eine Einheit in der letzten Ziffer zur rechten unsicher seyn wird. Gesetzt indessen, man habe selbst um 2 solcher Theilchen, sowohl in der Höhe als in dem Durchmesser des Gefäßes gefehlt, und also statt obiger Zahlen 0,9756; 0,7123; die abgeänderten 0,9754; 0,7121 genommen, so würde man statt obiger Summe 2,4002 jetzt 2,3996, mithin statt des Inhalts von 252 Quartieren jetzt beynahe 251 Quartiere erhalten, also nur 1 Quartier weniger, welches für die Ausübung ganz unerheblich ist.

35. Nur für die kleinern Intervalle am Anfang der Scale, würde es schwer halten, in den logarithmischen Werthen x, die Ziffern bis zur 4ten Decimalstelle auf der Scale anzugeben. Aber es ist klar, daß in diesen Fällen eine solche Genauigkeit für die gewöhnliche Ausübung auch gar nicht nöthig ist, weil der Gebrauch der Anfangsintervallen jener Scale nur Gefäße von nicht sehr großen Durchmessern betrifft, die man dennoch immer bis auf ein Quartier wird richtig bestimmen können, wenn die logarithmischen Grössen auf der Scale, auch nur bis auf die zweyte Decimalstellerichtig angegeben würden.

Gesetzt der Durchmesser des zu visirenden Gefäßes F reiche auf der Logarithmenscale bis

zum

zum Punkt 0,572; die Höhe auf den Punkt 0,781, so wäre der Inhalt logarithmisch = 0,572 + 0,572 + 0,781 = 1,925 also in Quartieren = 84,14. Hätte man aber statt des Durchmessers angegeben 0,570; und statt der Höhe 0,780, so wäre der Inhalt logarithmisch 1,920 oder in Quartieren 83,17; also der Fehler auch nur ohngefähr 1 Quartier.

36. Um der Logarithmenscale eine noch grössere Genauigkeit zu geben, könnte man wenigstens von dem Werthe x = 1,00 angerechnet, eine kleinere logarithmische Differenz, z. B. statt 0,05 wie oben (30) angenommen worden, etwa 0,02 zum Grunde legen, die zugehörigen Werthe von y berechnen und auftragen. Allein für den gewöhnlichen Gebrauch des Visirstabes mögte dieß kaum nöthig seyn.

37. Aus dem bisher beygebrachten wird nun auch erhellen, unter welchen Umständen der logarithmische Visirstab Vorzüge vor dem gewöhnlichen (10) hat. Weil nemlich auf dem logarithmischen Stabe die Intervallen wachsend, auf dem gewöhnlichen (10) aber abnehmend sind, solche Intervalle aber, welche sehr klein werden, nicht gut Unterabtheilungen zulassen, so erhellet, daß der logarithmische Visirstab Vorzüge bey Visirung großer Gefäße hat, der gewöhnliche Visirstab aber vortheilhafter bey

 klei=

man in einer logarithmischen Sc… über
0,9756 im vorigen Beyspiele (…
um eine Einheit in der letzter…
ten unsicher seyn wird. Ges…
habe selbst um 2 solcher T…
der Höhe als in dem Du…
gefehlt, und also statt …
0,7123; die abgeänd…
genommen, so würd…
2,4002 jetzt 2,399…
von 252 Quartie… …, 3, 4, 5
tiere erhalten, … … entsprechen
welches für di… …, 25 ꝛc. welche
…nen der Höhenscale

35. Nu… …t jedem andern Punkt
Anfang der … …mahl auf der Tiefenscale
den loga… …cht, dessen Zahl das Quadrat
bis zur … ist, welche dem Punkte der Hö-
zugeben … …hört.
eine …

Aus … demnach der Durchmesser eines zu
Ge… …n Gefäßes reiche auf der Tiefenscale
… den Punkt 26,8; und die Höhe des
… auf der Höhenscale bis an den Punkt
… Von diesen beyden Zahlen nehme man
… 13,4; 7,3 addire und subtrahire sie,
… man 20,7; 6,1. Diese beyden Zahlen
suche man auf der Höhenscale auf, so findet
man auf der Tiefenscale die entsprechenden
Zahlen 429 und 37 (die Decimaltheile wegge-
lassen),

welche von einander abgezogen für den
Gefäßes 391 Quartiere geben.

dieser Vorschrift gründet sich
nan von zwey Zahlen z. B.
halbe Summe 20,7 und
adrirt, (also die den
nscale, entsprechen
Tiefenscale auf-
r Quadrate, dem
enen Zahlen 26,8 und
uß, und eben dieses Pro-
Inhalt des Gefäßes aus. (14)

Diese von Lambert angegebene Vorschrift könnte den Visirern die nicht multipliciren können, wohl brauchbar seyn; in jedem Falle wird man aber ein paar Zahlen wie 26,8; 14,6 geschwinder in einander multipliciren, als ihre Hälften nehmen, und die ihrer Summe und Differenz entsprechenden Zahlen auf der Tiefenscale aufsuchen. Will man einmahl den Visirern so wenig zumuthen, daß sie nicht einmahl sollen multipliciren können, so lehre man sie lieber den Gebrauch des logarithmischen Visirstabes, oder lasse sie zu solchen Geschäften lieber gar nicht zu.

40. Man hat noch Visirstäbe, welche cubische Visirstäbe genannt werden.

4) nemlich kleinen Gefäßen, z. B. fr
100 Quartiere enth

38. Bey de ... H = mD; so
Visirstabes c ... erhältniß des Dia=
den Inha ... ßes ausdrücke, so
Fußes oh
den M
scale (13 ... f
sches I
bisher ... F das Visirmaaß f so oft
der H ... Produkt m . D^3 ausdrückt,
wür ... des Durchmessers D, der
Za ... (3) zur Einheit angenommen
für
d

... nun einen Visirstab zu verfertigen, ... seine Abtheilungen, und die dabey ... Zahlen, die Werthe von D^3 ... selbst angiebt, so setze man $D^3 = N$;

... $D = \sqrt[3]{N}$. d. h. eigentlich $D = d . \sqrt[3]{N}$, ... d die Einheit ist, nach welcher D gemessen werden soll.

Man nehme nun der Ordnung nach N = 1; 2; 3; 4; so wird

für

= 1	D = 1 . d = d.
2	= = $d.\sqrt[3]{2} = d.\ 1{,}259$
3	= = $d.\sqrt[3]{3} = d.\ 1{,}442$
4	= = $d.\sqrt[3]{4} = d.\ 1{,}587$
5	= = $d.\sqrt[3]{5} = d.\ 1{,}709$
6	= = $d.\sqrt[3]{6} = d.\ 1{,}817$
7	= = $d.\sqrt[3]{7} = d.\ 1{,}913$
8	= = $d.\sqrt[3]{8} = d.\ 2{,}000$
	u. s. w.

Wer diese Rechnung weiter fortsetzen will, kann sich dazu des Täfelchens der Cubikwurzeln aller Zahlen bis auf 100 bedienen, welches in Vega's logarithmischen, trigonometrischen und andern, zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten, Tafeln und Formeln. (Wien, 1783. 2te Ausg. Leipz., 1797 bey Weidmann) zu finden ist.

42. Nun trage man (Fig. 8) auf die Linie oz, von o aus, in 1, 2, 3 ec. der Ordnung nach, die für D gefundenen Werthe nach der in 1000 gleiche Theile getheilten Einheit d, so erhält man denjenigen Visirstab, welchen man den cubischen Visirstab nennt, und auf welchem die erhaltenen Intervalle von o nach 1 ec.

von 1 nach 2; von 2 nach 3 u. s. w. noch wei-
ter abgetheilt werden können.

43. Ist nun z. B. ein Gefäß F (Fig. 3) zu visiren für welches in (40) m = 1; also D = H wäre, so darf man nur den Durchmesser desselben lk, auf den (42) erwähnten Maaßstab aus o in k tragen, und die bey k stehende Zahl wird sogleich ohne weitere Rechnung den Inhalt des Gefäßes, nach dem zur Einheit angenommenen Visirmaaße f ausdrücken. Dieser Maaßstab würde also überhaupt zur Visirung aller Gefäße dienen, deren Höhe dem Durchmesser gleich ist.

44. Aber für ein anderes Verhältniß der Höhe zum Durchmesser, d. h. wenn m nicht = 1; würde man dennoch eine Multiplication nöthig haben, den Inhalt F zu finden. Man würde nemlich die Zahl, welche für den Durchmesser lk sich auf dem Visirstabe ergiebt, noch mit m multipliciren müssen, um F zu bekommen, welches zwar für den Fall, wenn m eine ganze Zahl und nicht groß ist, eben so beschwerlich nicht wäre, jedoch für andere Fälle, diesem Visirstabe keinen grossen Vorzug vor anderen bereits angeführten Stäben ertheilen würde.

45. Indessen kann diese Multiplication durch folgende Betrachtungen, auch auf eine bloße Addition gebracht werden.

Weil das Produkt $D^2 . H$ den Inhalt des Gefäßes F nach dem zur Einheit angenommenen Visirmaaße f ausgedrückt (5) und

$$(H + D)^3 = H^3 + 3H^2 . D + 3HD^2 + D^3$$

$$(H - D)^3 = H^3 - 3H^2 . D + 3HD^2 - D^3$$

so wird

$$(H + D)^3 + (H - D)^3 = 2 H^3 + 6D^2 . H$$

Also

$$D^2 . H \text{ oder } F = \frac{(H + D)^3 + (H - D)^3 - 2H^3}{6}$$

Demnach wäre der Inhalt F durch lauter Würfel ausgedrückt.

Weil nun die Zahlen auf dem cubischen Visirstabe oz die Würfel von denjenigen ausdrücken, welche auf einer neben dem cubischen Visirstabe gezeichneten Höhenscale ov (13) vorkommen, so messe man D und H mit der Höhenscale; addire H und D, und subtrahire auch D von H; suche hierauf die Zahlen H + D und H − D, auf der Höhenscale ov auf, so hat man auf der darneben befindlichen cubischen Scale oz die Würfel von H + D und H − D. Dann suche man auch H auf der Höhenscale auf, um darneben auf der cubischen Scale den Würfel von H zu erhalten. Von der Summe der ersten beyden Würfel subtrahire man das doppelte des letztern Würfels, und dividire den Rest mit 6, so hat man den Inhalt

halt des Gefäßes F so genau als ihn ein Visirstab dieser Art geben kann.

146. Will ein Visirer Cubiktafeln bey sich führen, so kann er durch diese den Inhalt noch genauer erhalten. Nur dürften bey dem Gebrauche der gewöhnlichen Cubiktafeln, die nicht über die Zahl 1000 hinausgehen, die Werthe von H und D nicht über 3 Ziffern (die Decimalstellen mit eingerechnet) enthalten. Von jedem Würfel, welcher denn in den Tafeln aufgesucht wird, schneidet man von der rechten Hand gegen die linke dreymahl so viel Decimalstellen ab als die Würzel enthält; behält aber alsdann von diesen Decimalstellen des aufgesuchten Würfels höchstens nur die zwey nächsten hinter dem Comma.

Wäre z. B. H = 9,23, D = 5,11 gefunden worden; so ist H + D = 14,34; H – D = 4,12; weil H + D hier schon 4 Ziffern enthält, so suche man nur den Würfel von 143 auf, und man findet für 14,3 den Würfel 2924,207; wofür man nur 2924,20 setzt. Hierauf den Würfel von 4,12 = 69,934528, wofür man nur 69,93 nimmt. Endlich den Würfel von H oder 9,23 welcher der Zahl 786,330467 gleich ist, statt welcher man nur 786,33 nimmt, wovon das Doppelte 1572,66 beträgt. Demnach der Inhalt des Gefäßes

F =

$$F = \frac{2924{,}20 + 69{,}93 - 1572{,}66}{6} = \frac{1421{,}47}{6}$$

$= 236{,}91.$

47. Wenn F ein cylindrisches Gefäß bedeutet, dessen Durchmesser zur Höhe oder $D:H = 1:m$, so kann man einen cubischen Visirstab verfertigen, welcher durch seine Abtheilungen sogleich den Inhalt F selbst angiebt, wenn man die Visir-Einheit f selbst auch in einen Cylinder verwandelt, dessen Durchmesser zur Höhe sich wie $1:m$ verhält, und nun diesen Durchmesser als Einheit zur Construction des cubischen Stabes a. z. anwendet.

48. Gesetzt man, wolle einen cubischen Visirstab für alle Gefäße F verfertigen, deren Durchmesser zur Höhe sich wie $1:3$ verhielte, und die Visir-Einheit f sey z. B. das Quartiergefäß (§. 13. 6.) dessen Inhalt $= 50{,}592$ Cubikzoll Pariser Maaß war. Soll nun dieser Inhalt f durch einen Cylinder ausgedrückt werden, dessen Durchmesser $= \delta$, und folglich die Höhe $= m\delta = 3 \cdot \delta$, so hat man

$$f = \tfrac{1}{4}\pi\delta^2 \cdot m\delta = \tfrac{1}{4}\pi m \delta^3$$

Demnach den gesuchten Durchmesser

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{4f}{\pi m}};$$ also für $m = 3$ und $f = 50{,}592$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 50{,}592}{3 \cdot \pi}} = 2{,}7795 \text{ Pariser Zoll}$$

wie man leicht durch Logarithmen findet.

49. Man nehme also auf dem cubischen Visirstabe az (Fig. 8) o i = δ = 2,7795 Pariser Zoll und construire nun nach dieser Einheit wie in (41) den Stab selbst, so wird dieser Stab sogleich den Inhalt eines jeden Gefäßes wie (48) geben; wenn man den Durchmesser D dieses Gefäßes auf den Stab aus b in k trägt, oder den Stab selbst an den Durchmesser anlegt, und nachsieht auf welchen Punkt der Scale der Punkt k hintrifft. Denn es ist klar, daß, weil die Visir-Einheit f, durch die angeführte Rechnung in einen Cylinder verwandelt worden ist, welcher dem gegebenen F ähnlich ist, man nach dem Satze, daß ähnliche Körper sich wie die Würfel gleichnahmigter Linien verhalten, haben wird

$$F : f = D^3 : \delta^3$$

$$\text{also } F = \frac{D^3 . f}{\delta^3}$$

Wird demnach auf dem cubischen Stabe die gefundene Größe δ zur Einheit genommen, so wird F schlechtweg durch den Werth von D^3, welchen man auf der Scale bey k angezeigt findet, wenn D aus o in k getragen wird, ausgedrückt, versteht sich nach solchen Einheiten, als das Visirmaaß f darstellt.

50. Ein cubischer Stab dieser Art wird nun freylich nur für diejenige Gattung von cylin-

cylindrischen Gefäßen gebraucht werden können, für welche er construirt worden, also der gegenwärtige z.B. nur für alle solche Gefäße deren Durchmesser zur Höhe = 1 : 3. Für eine andere Gattung von Gefäßen würde der Stab auch eine andere Abtheilung bekommen. Aber auf jedem Stabe werden doch die Abtheilungen, von 0 angerechnet, immer in dem Verhältniß der Cubikwurzeln (41) fortgehen, und folglich alle Maaßstäbe dieser Art einander ähnlich seyn; so daß gleichnahmigte Theile in Absicht auf ihre absolute Länge sich wie die Durchmesser δ verhalten, die denn weiter in dem umgekehrten Verhältniß der Cubikwurzeln von m stehen (48) d. h. sich verhalten wie $\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$ oder wie $\sqrt[3]{\frac{D}{H}}$.

Wenn man dieß letztere in Erwägung zieht, so wird sich hieraus ein Verfahren ableiten, auch mit einem cubischen Visirstabe, welcher bloß für m = 1, und also nach der in (3) berechneten Einheit d construirt worden ist, alle Gefäße zu visiren, was auch $m = \frac{H}{D}$ für einen andern Werth haben mag.

51. Man gedenke sich nemlich erstlich (Fig. 9) durch den Anfangspunkt o oder A des für die Einheit AB = d construirten cubischen Stabes AR eine gerade Linie AS dergestalt gezo-

gezogen, daß ein Perpendikel BC durch den Punkt B sich zu AB verhalten würde $\frac{1}{\sqrt[3]{m}} : 1$

d. h. wie $\sqrt[3]{\frac{D}{H}} : 1 = \sqrt[3]{D} : \sqrt[3]{H}$, so würde BC die Einheit δ für den cubischen Maaßstab (47) darstellen; weil AB die Einheit d für den cubischen Stab (41) bedeutet, und $d : \delta = 1 : \frac{1}{\sqrt[3]{m}}$

$= 1 : \sqrt[3]{\frac{D}{H}} = \sqrt[3]{H} : \sqrt[3]{D}$.

52. Um demnach AS in der gehörigen Lage zeichnen zu können, muß man bey einem vorgegebenen Gefäße F das Verhältniß H:D wissen. Dieß ergiebt sich denn sogleich daraus, daß man nach einem beliebigen Maaßstabe, (man kann sich dazu auch eines nach der Einheit d construirten Stabes wie (6) bedienen), die Grössen H und D misset. Ich will setzen man habe H = 13,5; D = 4 gefunden.

53. Man suche nun diese Zahlen (oder statt ihrer auch andere die sich eben so verhalten würden, z. B. 27 und 8) auf dem cubischen Stabe AR auf, also sogleich den Punkt 27 bey T, und den Punkt 8 bey L, gedenke sich durch T ein Perpendikel, und auf demselben TY = AL genommen, so ist, weil die absoluten Längen

Längen von AE und AL sich wie die Cubikwurzeln der bey T und L stehenden Zahlen verhalten (41), AT : AL oder AT : TY $= \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{8}$ $= \sqrt[3]{H} : \sqrt[3]{D}$, demnach auch AB : BC = AT : TY $= \sqrt[3]{H} : \sqrt[3]{D}$ d. h. $d : \delta = \sqrt[3]{H} : \sqrt[3]{D}$ folglich AS in der gehörigen Lage gegen AR.

54. Weil nun die cubischen Maaßstäbe, welche nach den Einheiten d und δ construirt worden, allemahl einander ähnlich sind, und gleichnamigte Linien auf beyden Stäben sich wie die Einheiten d und δ selbst gegen einander verhalten (41.), so ist klar, daß wenn z. B. eine Linie wie AM auf dem cubischen Stabe AQ der für die Einheit AB = d construirt worden, bis zum Punkt 45 gehen würde, das durch M gehende Perpendikel MN bis auf den eben so vielten Punkt 45 einer cubischen Scale, welche für eine Einheit δ = BC gezeichnet worden wäre, reichen würde.

Hieraus ergiebt sich nunmehr, wie man eines Gefäßes F Inhalt (47) finden würde, ohne des besondern nach der Einheit δ zu construirenden Maaßstabes zu bedürfen.

Man würde nemlich in der nach (53) bestimmten Richtung AS einen Faden ausspannen, und an den nach der Einheit d (40) construirten Maaßstab AR rechtwinklicht einen andern

...gen, auf welchem von Q nach ...messer D des zu visirenden Ge... ...ragen worden ist, und hierauf diesen ...winklicht längst RA so lange fort... ..., bis Z in die Richtung des ausge... ...en Fadens fällt, so wird man bey Q auf ... cubischen Stabe AR des Gefäßes In... ... finden.

Für das Verhältniß H:D = 13,5:4 trifft hier der Punkt Q auf 216; also würde das Gefäß F die Visireinheit f 216mahl enthalten, wenn der Durchmesser dieses Gefäßes = QZ wäre; wäre derselbe = MN, so würde das Gefäß 45 Visireinheiten enthalten, bey demselben Grundverhältniß H:D u. s. w.

55. Man hat demnach außer einem solchen cubischen Stabe AR, der in seinem Anfangspunkte A mit einem Faden versehen ist, nichts nöthig als noch einen andern Stab QK, welcher in Q mit einem kurzen rechtwinklichten Ansatze QD versehen ist, um QK längst AR rechtwinklicht verschieben zu können. Auf diesen Stab QK kann denn die Einheit AB = d (3) nebst Theilen derselben, so oft getragen werden, als es die Länge von QK verstattet, die man, so wie auch AR, nicht leicht über 4 bis 5 Fuß groß nehmen wird, wenn die Einheit d etwa 4 bis 5 Zolle beträgt, weil sonst auf der cubischen Eintheilung AR die End-

inter-

intervalle gar zu klein ausfallen würden. Will man dann neben dieser gleichtheiligten Scale QK auch noch die cubische verzeichnen, welche man auf AR hat; so kann man durch Verschiebung des Stabes QK in TY, auch sogleich auf ihm den Punkt Y bemerken, welcher zur anfänglichen Bestimmung der Lage des Fadens AV erforderlich ist. Ist dann diese Lage für ein gegebenes Verhältniß H:D einmahl bestimmt, so muß nur AR unverändert liegen bleiben, während man DQK weiter so verschiebt, daß QZ dem Durchmesser des zu visirenden Gefäßes gleich ist.

56. Diesen Gebrauch des cubischen Visirstabes, den Inhalt cylindrischer Gefäße von allerley Verhältnissen H:D, ohne weitere Rechnung damit zu bestimmen, erinnere ich mich nicht bey Schriftstellern, welche vom Visiren der Gefäße handeln, gelesen zu haben. Die dazu erforderliche Ausspannung des Fadens, und das Verschieben des Hülfsstabes könnte zwar für etwas weitläuftig gehalten werden. Man wird aber diese Arbeit nach einiger Uebung eben nicht sehr beschwerlich finden, wenn man nur dafür sorgt, daß AR unverrückt liegen bleibt, während man den Stab DQK längst AR verschiebt, wozu man leicht einen hinlänglich ebenen Boden findet. Den Faden in einer unverrückten Lage zu erhalten, kann leicht ein

Stift V vielen, den man in den Boden befestiget.

57. Statt des Fadens AV könnte auch eine um A bewegliche Regel AV gebraucht werden, die sich in A feststellen läßt, so bald sie die gehörige Lage hat. Auch sieht man leicht, daß ein Visirstab überhaupt auch weit kleiner gemacht werden kann, als man sie gewöhnlich zu verfertigen pflegt, weil es nicht nöthig ist, daß man die Einheit AB = d in ihrer natürlichen oder wahren Größe z. B. für das Quartiergefäß (21) 4 Pariser Zoll groß nimmt. Man könnte AB nur halb so groß nehmen, und so gleichsam einen verjüngten Visirstab verfertigen, auf dessen Abtheilungen man denn auch mehr Fleiß verwenden kann, indem nunmehr der Visirstab ohne große Kosten auf Messing gezeichnet werden kann. Auf QK würde dann ebenfalls die verjüngte Einheit d getragen werden müssen. So erhielte man denn ein an jedem Orte leicht zu behandelndes Werkzeug, aus zwey beweglichen Regeln AV, AR, und einem längst AR zu verschiebenden Winkelhaken DQK, der so wie AR höchstens eine Länge von 2 Fußen haben dürfte. Das Verhältniß D:H bey einem zu visirenden Gefäße zu bestimmen, könnte nun zwar jeder beliebige Maaßstab gebraucht werden; da man inzwischen auch die absolute Grösse des Durchmessers

sers D in solchen Einheiten, als d ausdrückt, wissen muß, damit man nachher auf dem Winkelhaken QK aus Q in Z den Durchmesser D, in verjüngten Einheiten d abzählen kann, so kann man leicht einen hölzernen Maaßstab, worauf die wahre Einheit d nebst ihren Abtheilungen abgetragen ist, zur Messung der Grössen H und D anwenden und bey sich führen; oder es könnte auch auf einer andern Seite von QK die wahre Einheit d zur Messung von H und D verzeichnet seyn.

58. Aus allem erhellet, daß aber auch die Kosten eines Werkzeugs wie (56.57) erspatet werden können, wenn man bloß eine einzige cubische Scale wie (41) hat, und bey der Visirung solcher Gefäße, für welche m (40) nicht = 1 ist, die einem Visirer leicht zuzumuthende Forderung macht, daß er die Multiplication mit m für die Ausübung nicht zu schwer und weitläuftig finde. Wer eine solche Multiplication nicht scheuet, der wird aber beym Visiren der Gefäße überhaupt weit richtiger und besser nach den Methoden (5) oder (12) verfahren, als einen cubischen Stab anwenden, der doch nie sehr weit gehen kann, weil die Theile auf ihm bald so klein werden, daß der Gebrauch solcher Werkzeuge in den Händen gewöhnlicher Visirer zu erheblichen Fehlern Gelegenheit geben kann.

59. Was sonst etwa noch bei Anwendung der Visirstäbe auf das Visiren der Fässer, zu dessen Behufe man hauptsächlich diese Stäbe erfunden hat, zu bemerken ist, wird unten in einem besondern Kapitel erörtert werden.

Andere Visirstäbe, z. B. (Fig. 3) aus der Diagonallinie kh eines Gefäßes und dem Verhältniß entweder lk : kh, oder lh : kh des Gefäßes Inhalt zu finden, sogenannte Diagonalstäbe, übergehe ich, da sie mit den bisherigen theils auf einerley Princip beruhen, nemlich daß ähnliche Körper wie F, f in (47) sich auch wie die Würfel von kh und kη (Fig. 3) verhalten, theils auch ihr Gebrauch keine besonderen Vorzüge vor den bereits angeführten Visirstäben hat.

Auch diejenigen Visirstäbe, welche den Inhalt eines Gefäßes nach Pfunden Wassers, welches ihren Raum erfüllen würde, angeben, dergleichen Ignaz Pikel (Abhandlung von Verbesserung und allgemeinen Gebrauch der Visirstäbe. Eichstädt 1782) beschreibt, scheinen mir von keinen besonders großen Nutzen zu seyn, daher ich sie hier gleichfalls übergehe.

60. Ueber die Visirstäbe überhaupt kann man außer den bereits angeführten Schriften noch folgende nachlesen:

Stereo-

Stereometriae inanium nova et facilis ratio. — Auctore *Jo. Hartmanno Bayero*, reipubl. Francofurtensis Medico. Francofurthi 1603.

La theorie et la Pratique du Jaugeage des Tonneaux, des navires et de leurs segments par feu *P. Pezenas* sec. edit. augmentée de deux memoires sur la nouvelle Jauge par Mr. *Dez.* Avignon 1778.

Lamberts Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin 1765. 1ter Theil. S. 314 u. f.

Stereometrie or the art of practical gauging — by *Everard Smith.* London,

Joh. Leonhard Späth Abhandlung von runden, ovalen, Ey- und Polygonalfässern. Nürnberg 1794.

Auch desselben practische Anweisung allerley Arten von Brau-, Brenn- und Farbgefäßen, so wie auch runde, ovale, Ey- und Polygonalfässer zu visiren. Nürnberg 1794.

Zweytes Kapitel.

Stereometrie prismatischer Körper.

§. 19.

Aufgabe.

Den Cubikinhalt eines vorgegebenen senkrechten oder schiefen Prisma zu finden.

Aufl. I. Die Grundfläche ABCDEF = abcdef des vorgegebenen Prisma (Fig. 10) sey, welche geradlinigte oder krummlinigte Figur man will, so berechne man den Quadratinhalt derselben, entweder durch Zerlegung in Dreyecke oder parallele Trapezien. (Pract. Geometrie. III. Th. §. 276 ff.)

II. Man nehme wo man es am bequemsten findet, entweder innerhalb der obern Grundfläche abcdef z. B. bey h, oder an ihrem Umfange bey d, oder auch außerhalb der Grundfläche, indem man sich solche als eine ebene Fläche nach allen Seiten verlängert vorstellen kann, einen Punkt i an, und fälle von h, d, oder i ein Perpendikel h H, oder d D, oder i I

auf

auf die gegenüberstehende Grundfläche ABCDEF, oder deren Verlängerung.

III. Man messe diese Höhe, und drücke sie in eben solchen Längeneinheiten aus, als welchen Nahmen die Flächeneinheiten haben, wodurch man den Inhalt der Grundfläche angegeben hat. z. B. diese Höhe in Fußen, wenn die Grundfläche in Quadratfußen ausgedrückt ist, in Zollen wenn die Grundfläche in Quadratzollen u. s. w. gegeben ist.

IV. Man multiplicire die beyden Zahlen, wodurch Grundfläche und Höhe des Prisma gleichnahmigt ausgedrückt sind, in einander, so wird das Produkt den cubischen Inhalt des Prisma in Würfeln von derselben Benennung geben, als welche die Grundfläche des Prisma führte, d. h. in Cubikfußen, Cubikzollen, je nachdem die Grundfläche in Quadratfußen, Quadratzollen ausgedrückt war.

Den Beweis dieser Aufgabe setze ich aus der Elementargeometrie als bekannt zum voraus.

Exempel. Wäre die Grundfläche 57□' 28□'' 5□''' oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung 57' 28'' 05''' (§. 3. 1.) die Höhe des Prisma 5' 2'' alles nach Decimalmaaß, und man verlangte den Inhalt des Prisma in Cubikfußen, so drücke man die Grund-

fläche bloß durch Quadratfuße und Decimaltheile derselben und die Höhe durch Längenfuße und Decimaltheile aus, nemlich

Grundfläche = 57,2805 (§. 3.)
Höhe = 5,2

1145610
2864025

Produkt = 297,85860 = dem Inhalte des Prisma in Cubikfußen.

Verlangte man den Inhalt durch Cubikzolle ausgedrückt, so würde nichts nöthig seyn als das Comma in dem Produkt noch um 3 Stellen weiter gegen die rechte Hand zu rücken (§. 3.), so käme der Inhalt in Cubikzollen = 297858,60, und so ferner in Cubiklinien = 297858600; in Cubikruthen hingegen = 0,29785860; und durch höhere und niedrigere Einheiten zugleich

$297^{c'}$ $858^{c''}$ $600^{c'''}$.

§. 20.

Nennt man die Grundfläche des Prisma überhaupt = B; die Höhe = h, so ist der Cubikinhalt den ich mit P bezeichnen will allgemein P = B . h.

Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, und zwar ein rechtwinklichtes, so wird B = a . b,

wenn

wenn a die Länge und b die Breite oder Höhe, mithin a und b die beyden Seitenlinien des Parallelogramms ausdrücken. Ist nun die Höhe h = c, so ist a . b . c der cubische Inhalt des Prisma, welches sich für diesen Fall in ein Parallelepipedum verwandelt, und zwar in ein rechtwinklichtes, wenn die Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht stehen, in welchem Falle denn die dritte Seitenlinie c des Parallelepipedi zugleich die Höhe selbst ist. Ist aber das Parallelepipedum schief, so muß die Höhe c erst durch Fällung eines Perpendikels von der obern Grundfläche auf die untere bestimmt werden.

§. 21.

1. Wenn ein Parallelepipedum oder Prisma nicht groß ist, so mögte die Fällung eines Perpendikels, wie z. B. dD oder il, wohl in der Ausübung so schwer nicht seyn, wenn man sich dazu des in der Geometrie bekannten Verfahrens (m. s. Kästners Arithm. u. Geom. den 46. Satz. Zus. 3. 4.) oder noch bequemer eines Stabes ND bedient, mit welchem unten bey D zwey andere kürzere DM, DL rechtwinklicht und fest verbunden sind, so daß NDM = LDN = 90°; (MDL braucht nicht nothwendig auch = 90° zu seyn). Man setzt nun das Prisma auf einen Tisch oder sonst eine ebene Fläche, und schiebt die Vorrichtung

NDML

fläche bloß durch Quadratfuße und ... maltheile derselben und die Höhe durch ... genfuße und Decimaltheile aus, ...

Grundfläche = 57,2805 (§. 3

Höhe = 5,2

1145610

2864025

Produkt = 297,85860 = ... des Prisma in Cubikfußen.

Verlangte man den Inh... zolle ausgedrückt, so würde ... als das Comma in dem ... 3 Stellen weiter gegen ... rücken (§. 3.), so käme ... zollen = 297858,60, ur... linien = 297858600; ... gen = 0,29785860; ... niedrigere Einheiten ...

297c' 858c' ... eines ... an man ... gegeben an-

Nennt man ... überhaupt = B ... Cubikinhalt de... allgemein P = ... gabe.

...em Prisma wir (Fig.

Ist die ... itenlinien Bb = Cc = ... und zwar ein... r Neigungswinkel eines ... von

rallelogrammen z. B.
die Grundfläche
abcdef, so wie
Winkeln des
h c gegeben
es Pris-

die
jer-
so ist
Winkel
ne BCbc
des Prisma,
eren Verlänge-
herabgefället wor-

en gegebenen Winkel
gungswinkel cMG $= \eta$;
at man
c. sin α und folglich
$=$ c. sin α sin η.

§. 23.

Zusatz I.

Sind die um einen gegebenen Punkt C der Grundfläche herumliegenden Winkel BCc $= \alpha$; cGD $= \beta$; BCD $= \gamma$ nebst Cc gegeben, und soll daraus die Höhe h berechnen, so hat man

genug

$$\sin\eta = \frac{2\sqrt{(\sin K \sin L \sin M \sin N)}}{\sin\alpha \sin\gamma}$$

6. Mithin die Höhe des Prisma (§. 22.) oder

$$h = \frac{2c\sqrt{(\sin K \sin L \sin M \sin N)}}{\sin\gamma}$$

welches sich also leicht durch Logarithmen rechnen läßt.

Man addirt also erstlich alle drey Winkel um den Punkt C herum, dann zieht man von jedem Paare derselben allemahl den dritten Winkel ab; nimmt die Sinusse der Hälften dieser Summen und Differenzen, und addirt ihre Logarithmen. Man halbirt die Summe dieser Logarithmen und addirt solche zum Logarithmen der doppelten Seitenlinie c des Prisma, subtrahirt hierauf den Logarithmen des Sinus des Winkels ACD = γ in der Grundfläche, so hat man den Logarithmen der gesuchten Höhe h.

Anmerkung. Stat L kann auch noch bequemer gesetzt werden K — β; statt M, K — γ; und statt N, K — α.

Exempel.

Es sey c = 15 Fuß und α = 120°. 8'; β = 65°. 19'; γ = 150° 36' gemessen worden; so ist, wenn man die Secunden wegläßt, welches in der Ausübung ohne merklichen Fehler verstattet seyn mag.

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 168°. 1'$; $\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = 17°. 25'$
$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) = 102. 42$ $\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = 47. 53$

Dem-

Demnach durch Logarithmen

$$\begin{array}{rcl}
l\sin 168^\circ.1' = l\sin 11^\circ.59' & = & 9,31728-10 \\
l\sin 102.42 = l\sin 77.18 & = & 9,98924-10 \\
l\sin 17.25 & = & 9,47613-10 \\
l\sin 47.53 & = & 9,87027-10 \\
\hline
\text{Summe} & = & 0,65292-2 \\
\text{halb} & = & 0,32646-1 \\
\text{addirt } \log 2c = \log 30 & = & 1,47712 \\
\hline
\text{Summe} & = & 0,80358 \\
l\sin 150.56 = l\sin 29.4 & = & 9,68648-10 \\
\hline
\log h & = & 1,11710. \\
\text{also } h & = & 13,09 \text{ Fuß.}
\end{array}$$

7. Man sieht aus diesem Beyspiele, daß die Berechnung der Höhe eines Prisma aus den bekannten Winkeln an einem der Eckpunkte der Grundfläche, und aus der Seitenlinie des Prisma eben nicht sehr beschwerlich ist.

8. Die dazu erforderlichen Winkel lassen sich, so genau als es für die Ausübung nöthig ist, entweder durch unmittelbare Anlegung eines Transporteurs messen, oder man kann jeden solchen Winkel wie z.B. BCc auch auf das Papier zeichnen und dann messen, indem man in einem Dreyecke wie BCc, die drey Seiten BC, Cc, Bc misset, und sie nach einem verjüngten Maaßstabe aufträgt. Dieß Verfahren würde insbesondere für den Fall brauchbar seyn, wenn die Eckseiten oder Kanten

BC, Cc ꝛc. an einem in der Natur vorkommenden Prisma nicht so scharf begränzt seyn sollten, als zur genauen Anlegung eines Transporteurs erforderlich ist.

9. Da für die Höhe h immer einerley Werth herauskommen muß, man mag die Winkel an der Ecke C, oder an einer jeden andern B, A bey der Rechnung zum Grunde legen, so kann eine zweyte Bestimmung der Höhe z. B. aus den Winkeln am A, der ersten Bestimmung zur Probe dienen, ob man richtig gearbeitet hat, und aus den beyden Resultaten, wenn man es nöthig findet, etwa ein Mittel nehmen.

10. Am kürzesten käme man freylich davon, den Neigungswinkel η unmittelbar zu messen. Man könnte sich dazu etwa ein paar dünner Liniale cb, ca (Fig. 12) von Holz oder noch besser von Messing bedienen, welche um einen Zapfen bey c beweglich wären, und auf welchen aus dem Mittelpunkte c des Zapfens ein paar gerade Linien cb, ca, mit den Schärfen mn, mq beyder Liniale parallel giengen. Man würde sodann auf diesen Linialen cb = ca nehmen, und eine von diesen Linien z. B. ca etwa in 1000 Theile theilen, oder auch nur in 100, und die noch kleinern Theile nach dem Augenmaaße schätzen. Nun würde man auf die Kante BC (Fig. 10) durch einen beliebigen Punkt s zwey Linien sk, st senkrecht ziehen, jene

senkrecht in der Ebene des Parallelogramms BCbc und letztere st in der Ebene der Grundfläche ABCD, hierauf das Werkzeug (Fig. 12) so weit öffnen, daß wenn man die Kante mq an die Linie st legt, die Kante mn die Linie sk decket, so ist dann die Oeffnung beyder Liniale, also der Winkel nmq, oder bca gleich dem Neigungswinkel kst = cMG = η.

Um demnach die Grösse desselben zu erhalten, fasse man auf den Linialen den Abstand der beyden Punkte b, a, und messe ihn auf dem Maaßstabe ca, so hat man die Sehne des Winkels bca in Tausendtheilen des Halbmessers cb = ca. Hievon nimmt man die Hälfte, so hat man den Sinus der Hälfte des Winkels bca, den man alsdann in den Sinustafeln aufsucht, und daraus $\frac{1}{2}$bca also $\frac{1}{2}\eta$ selbst findet, welches denn duplirt den verlangten Neigungswinkel so genau geben wird, als es in der Ausübung nöthig ist.

11. Kann man den Neigungswinkel an der Kante BG nicht bequem messen, so kann man ihn auch an der gegenüberstehenden bc bestimmen, welcher aber alsdann das Complement des untern kst zu 180 Graden seyn wird.

12. Ein solches Werkzeug Neigungswinkel von Seitenflächen an Körpern zu messen, ist in manchen Fällen zur Ausübung sehr nützlich.

Begreiflich kann dieses Werkzeug gebraucht werden, auch die Winkel wie BCc, cCD, BCD, welche zu der Rechnung (6, erfordert wurden, zu messen, wozu es denn wohl bequemer und richtiger als der gewöhnliche Transporteur angewandt wird.

§. 25.

Zusatz III.

1. Ist das (§. 22.) betrachtete Prisma ein **schiefes Parallelepipedum** (Fig. 13) in welchem die Winkel $BCc = \alpha$; $cCD = \beta$; $BCD = \gamma$; die Seite $Cc = c$; $BC = a$; $CD = b$; so hat man in der Grundfläche BCED, für das Perpendikel von D auf BC, oder deren Verlängerung, den Ausdruck $b \sin \gamma$. Also ist der Quadratinhalt der Grundfläche $B = ab \sin \gamma$; wird dieß in den Ausdruck für die Höhe h (§. 24.) multiplicirt, so erhält man für den Inhalt des Parallelepipedi die Formel $P = 2abc\sqrt{(\sin K . \sin L . \sin M . \sin N)}$.

2. Ist das **Parallelepipedum rechtwinklicht** also $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, so wird $K = 90° + 45°$; $L = M = N = 45°$, und $\sin K = \sin L = \sin M = \sin N = \sin 45°$ demnach

$$P = 2abc\sqrt{(\sin 45°)^4} = 2abc(\sin 45°)^2 = abc$$

wegen $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

§. 26.

Zusatz IV.

Der Inhalt eines dreyeckigten Prisma BCDbcd über dem Dreyeck BCD als Grundfläche, wäre bloß der Hälfte des für P (§. 25.) gefundenen Ausdruckes gleich.

§. 27.

Zusatz V.

1. Man nenne den Neigungswinkel welchen jede von den parallelen Seitenlinien Cc, Bb u. des Prisma (Fig. 10) mit der Grundfläche machen würde $= i$, so ist dieser Winkel $=$ cCG, wenn man sich von C nach dem Punkte G wo ein von c herabgefälltes Perpendikel die Grundfläche treffen würde, eine gerade Linie CG gezogen vorstellet. Man hat demnach in dem rechtwinklichten Dreyeck cCG, Sin cCG oder

$$\sin i = \frac{cG}{Cc} \text{ d. h. } (\S. 24. 6.)$$

$$\sin i = \frac{2 \cdot \sqrt{(\sin K \cdot \sin E \cdot \sin M \cdot \sin N)}}{\sin \gamma}$$

oder auch aus (§. 24. 5.)

$$\sin i = \sin \alpha \sin \eta$$

2. Es bestimmt sich also dieser Neigungswinkel i oder die sogenannte Schiefe eines Prisma, aus dem Neigungswinkel η einer von den Seitenflächen z. B. BCbe gegen die Grund-

Grundfläche, und dem Winkel BCc oder bBC, welchen in jener Seitenfläche die Seitenlinien Cc, Bb mit der Grundlinie BC machen. Es ist also in einem gegebenen schiefen Prisma das Product $c . \sin \gamma$ immer einer beständigen Größe gleich, von welcher Seitenfläche auch die Rede seyn mag.

3. Also kann man den Inhalt eines Prisma auch durch die Formel

$$P = B . c . \sin i$$

ausdrücken.

§. 28.

Zusatz VI.

1. Ist die Grundfläche B ein Kreis dessen Durchmesser = d, so verwandelt sich das Prisma in einen Cylinder, und die Grundfläche wird $\frac{1}{4} d^2 \pi = 0{,}7853981 . d^2$ wegen $\pi = 3{,}141592\ldots$ Also der cubische Inhalt des Cylinders, den ich mit C bezeichnen will

$$C = 0{,}785\ldots d^2 c \sin i$$

wo c die Seitenlinie des Cylinders und i die Schiefe desselben gegen die Grundfläche bedeutet.

2. Will man mit Logarithmen rechnen, so wird wegen $\log 0{,}785\ldots = \log \pi - \log 4 = 0{,}8950899 - 1$

log

$$\log C = 2 \log d + \log c + 1 \sin i + 0{,}8950899 - 1$$

Wenn in dieser Gleichung von den 4 Grössen C, c, d, i drey gegeben sind, so läßt sich daraus allemahl die vierte finden; durch diese Formel lassen sich demnach allerley Aufgaben, welche bey Cylindern vorkommen können, leicht auflösen.

3. Wenn man sich durch die Axe Kk des Cylinders (Fig. 14) einen auf die Grundfläche senkrechten Schnitt kKcC gedenkt, und darin cG senkrecht auf KC, so ist die Schiefe kKC des Cylinders auch dem Neigungswinkel der Axe Kk gegen die Grundfläche gleich, oder cCG = kKG.

4. Man kann auch von welchem Punkte γ des obern Umfanges man will, ein Perpendikel γG′ auf die Grundfläche herabfällen. Ist nun γC′ eine Seitenlinie des Cylinders, so ist auch γC′G′ = cCG = kKC die Schiefe des Cylinders.

5. Um diese zu messen legt man die scharfe Kante cr des Werkzeugs (Fig. 12) an die Seitenlinie cC oder γC′ des Cylinders (Fig. 14) und öffnet beyde Liniale so weit, daß die scharfe Kante cs des Linials ca längst CG, oder C′G′ falle, so wird der Winkel b c a beyder Liniale, den man wie (§. 140 zc.) durch Mittel

 Chorde

Grundfläche, und dem Winkel BCc od
welchen in jener Seitenfläche die Se
Cc, Bb mit der Grundlinie BC ma
ist also in einem gegebenen schiefen
Produkt sin α sin η immer ein
Grösse gleich, von welcher
die Rede seyn mag.

3. Also kann man den
... auch durch die Form
... p ... B. c. ...
ausdrücken.

... gleich der

3

... Ist die
Durchmesser ...
... in einen
Fläche wird ... $\frac{1}{4\pi}$ ... $\frac{1}{\pi}$ ... 0,15783096 ...
$\pi = 3{,}14$ ...
des Cyl ... 4 ... Demnach
$= 0{,}0795774 \cdot p^2 c \sin i$
wo c ... Logarithmen wegen ... 5. Um
Schi ... $(\log \pi + \log 4) = 1{,}0992099$
den ...
$= 2 \log p + \log c + l \sin i - 1{,}0992099$

3. Will man die Höhe cG des Cylinders
... messen, und in der Rechnung brauchen,
so

man ziel den gefundenen Kern
nur geradezu die Höhe selbst

[illegible]

... so findet m[illegible]
... 976. [illegible]
... die Körper
Hülfe der
haben noch
[illegible]
beiden Fall weit
[illegible] auf diejenige
[illegible] nöthig gefunden
Grundflächen solcher Körper
...n für die Kreisflächen zu
...en. Dergleichen findet man z. B. in
...ers Conometria Mauritiana oder
...euem stereometrischen Tractat von
[illegible] und [illegible]
ten Visirung des vollen und leeren
Gefäßes oder Theils (eines) Wein-
fasses, samt denen dazu gehörigen
Längen und Circeltheilen [illegible]
[illegible] Circul [illegible]
[illegible] Frankfurt 1699 S. 27. [illegible]
[illegible] S. 18. [illegible]
Schrift Practische Anweisung [illegible] und
mehreren andern. Diese Tafeln enthalten die
Kreisflächen vom Durchmesser 1 bis auf 1000 [illegible]

nenne

$$\sin\eta = \frac{2\sqrt{(\sin K \sin L \sin M \sin N)}}{\sin\alpha \sin\gamma}$$

6. Mithin die Höhe des Prisma (§. 22.) oder

$$h = \frac{2c\sqrt{(\sin K \sin L \sin M \sin N)}}{\sin\gamma}$$

welches sich also leicht durch Logarithmen rechnen läßt.

Man addirt also erstlich alle drey Winkel um den Punkt C herum, dann zieht man von jedem Paare derselben allemahl den dritten Winkel ab; nimmt die Sinusse der Hälften dieser Summen und Differenzen, und addirt ihre Logarithmen. Man halbirt die Summe dieser Logarithmen und addirt solche zum Logarithmen der doppelten Seitenlinie c des Prisma, subtrahirt hierauf den Logarithmen des Sinus des Winkels ACD $= \gamma$ in der Grundfläche, so hat man den Logarithmen der gesuchten Höhe h.

Anmerkung. Stat L kann auch noch bequemer gesetzt werden $K - \beta$; statt M, $K - \gamma$; und statt N, $K - \alpha$.

Exempel.

Es sey $c = 15$ Fuß und $\alpha = 120^0.\ 8'$; $\beta = 65^0.\ 19'$; $\gamma = 150^0\ 36'$ gemessen worden; so ist, wenn man die Secunden wegläßt, welches in der Ausübung ohne merklichen Fehler verstattet seyn mag.

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 168^0.\ 1'$; $\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = 17^0.\ 25'$
$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) = 102.\ 42$ $\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha) = 47.\ 53$

Dem-

Demnach durch Logarithmen

$$
\begin{aligned}
l\sin 168^\circ.1' = l\sin 11^\circ.59' &= 9{,}31728\text{-}10 \\
l\sin 102.42 = l\sin 77.18 &= 9{,}98924\text{-}10 \\
l\sin 17.25 &= 9{,}47613\text{-}10 \\
l\sin 47.53 &= 9{,}87027\text{-}10 \\
\text{Summe} &= 0{,}65292\text{-}2 \\
\text{halb} &= 0{,}32646\text{-}1 \\
\text{addirt } \log 2c = \log 30 &= 1{,}47712 \\
\text{Summe} &= 0{,}80358 \\
l\sin 150.56 = l\sin 29.4 &= 9{,}68648\text{-}10 \\
\log h &= 1{,}11710. \\
\text{also } h &= 13{,}09 \text{ Fuß.}
\end{aligned}
$$

7. Man sieht aus diesem Beyspiele, daß die Berechnung der Höhe eines Prisma aus den bekannten Winkeln an einem der Eckpunkte der Grundfläche, und aus der Seitenlinie des Prisma eben nicht sehr beschwerlich ist.

8. Die dazu erforderlichen Winkel lassen sich, so genau als es für die Ausübung nöthig ist, entweder durch unmittelbare Anlegung eines Transporteurs messen, oder man kann jeden solchen Winkel wie z.B. BCc auch auf das Papier zeichnen und dann messen, indem man in einem Dreyecke wie BCc, die drey Seiten BC, Cc, Bc misset, und sie nach einem verjüngten Maaßstabe aufträgt. Dieß Verfahren würde insbesondere für den Fall brauchbar seyn, wenn die Eckseiten oder Kanten

BC, Cc. an einem in der Natur vorkommenden Prisma nicht so scharf begränzt seyn sollten, als zur genauen Anlegung eines Transporteurs erforderlich ist.

9. Da für die Höhe h immer einerley Werth herauskommen muß, man mag die Winkel an der Ecke C, oder an einer jeden andern B, A bey der Rechnung zum Grunde legen, so kann eine zweyte Bestimmung der Höhe z. B. aus den Winkeln um A, der ersten Bestimmung zur Probe dienen, ob man richtig gearbeitet hat, und aus den beyden Resultaten, wenn man es nöthig findet, etwa ein Mittel nehmen.

10. Am kürzesten käme man freylich davon, den Neigungswinkel η unmittelbar zu messen. Man könnte sich dazu etwa ein paar dünner Liniale cb, ca (Fig. 12) von Holz oder noch besser von Messing bedienen, welche um einen Zapfen bey c beweglich wären, und auf welchen aus dem Mittelpunkte c des Zapfens ein paar gerade Linien cb, ca, mit den Schärfen mn, mq beyder Liniale parallel giengen. Man würde sodann auf diesen Linialen cb = ca nehmen, und eine von diesen Linien z. B. ca etwa in 1000 Theile theilen, oder auch nur in 100, und die noch kleinern Theile nach dem Augenmaaße schätzen. Nun würde man auf die Kante BC (Fig. 10) durch einen beliebigen Punkt s zwey Linien sk, st senkrecht ziehen,

jene

fernen sk in der Ebene des Parallelogramms BCbc und leztere st in der Ebene der Grundfläche ABCD, hierauf das Werkzeug (Fig. 12) so weit öffnen, daß wenn man die Kante mq an die Linie st legt, die Kante mn die Linie sk decket, so ist dann die Oeffnung beyder Liniale, also der Winkel nmq, oder bca gleich dem Neigungswinkel kst = cMG = η.

Um demnach die Grösse desselben zu erhalten, fasse man auf den Linialen den Abstand der beyden Punkte b, a, und messe ihn auf dem Maaßstabe ca, so hat man die Sehne des Winkels bca in Tausendtheilen des Halbmessers cb = ca. Hievon nimmt man die Hälfte, so hat man den Sinus der Hälfte des Winkels bca, den man alsdann in den Sinustafeln aufsucht, und daraus $\frac{1}{2}$bca also $\frac{1}{2}\eta$ selbst findet, welches denn duplirt den verlangten Neigungswinkel so genau geben wird, als es in der Ausübung nöthig ist.

11. Kann man den Neigungswinkel an der Kante BG nicht bequem messen, so kann man ihn auch an der gegenüberstehenden bc bestimmen, welcher aber alsdann das Complement des untern kst zu 180 Graden seyn wird.

12. Ein solches Werkzeug Neigungswinkel von Seitenflächen an Körpern zu messen, ist in manchen Fällen zur Ausübung sehr nützlich.

Begreiflich kann dieses Werkzeug gebraucht werden, auch die Winkel wie BCc, cCD, BCD, welche zu der Rechnung (6) erfordert wurden, zu messen, wozu es denn wohl bequemer und richtiger als der gewöhnliche Transporteur angewandt wird.

§. 25.

Zusatz III.

1. Ist das (§. 22.) betrachtete Prisma ein schiefes Parallelepipedum (Fig. 13) in welchem die Winkel $BCc = \alpha$; $cCD = \beta$; $BCD = \gamma$; die Seite $Cc = c$; $BC = a$; $CD = b$; so hat man in der Grundfläche BCED, für das Perpendikel von D auf BC, oder deren Verlängerung, den Ausdruck $b \sin \gamma$. Also ist der Quadratinhalt der Grundfläche $B = ab \sin \gamma$; wird dieß in den Ausdruck für die Höhe h (§. 24.) multiplicirt, so erhält man für den Inhalt des Parallelepipedi die Formel $P = 2abc\sqrt{(\sin K . \sin L . \sin M . \sin N)}$.

2. Ist das Parallelepipedum rechtwinklicht also $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, so wird $K = 90^\circ + 45^\circ$; $L = M = N = 45^\circ$, und $\sin K = \sin L = \sin M = \sin N = \sin 45^\circ$ demnach

$$P = 2abc\sqrt{(\sin 45^\circ)^4} = 2abc(\sin 45^\circ)^2 = abc$$

wegen $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

§. 26.

§. 26.

Zusatz IV.

Der Inhalt eines dreyeckigten Prisma BCDbcd über dem Dreyeck BCD als Grundfläche, wäre bloß der Hälfte des für P (§. 25.) gefundenen Ausdruckes gleich.

§. 27.

Zusatz V.

1. Man nenne den Neigungswinkel welchen jede von den parallelen Seitenlinien Cc, Bb u. des Prisma (Fig. 10) mit der Grundfläche machen würde $= i$, so ist dieser Winkel $= cCG$, wenn man sich von C nach dem Punkte G wo ein von c herabgefälltes Perpendikel die Grundfläche treffen würde, eine gerade Linie CG gezogen vorstellet. Man hat demnach in dem rechtwinklichten Dreyeck cCG, Sin cCG oder

$$\sin i = \frac{cG}{Cc} = \frac{h}{c} \text{ d. h. (§. 24. 6.)}$$

$$\sin i = \frac{2 \cdot \sqrt{(\sin K \cdot \sin E \cdot \sin M \cdot \sin N)}}{\sin \gamma}$$

oder auch aus (§. 24. 5.)

$$\sin i = \sin \alpha \sin \eta$$

2. Es bestimmt sich also dieser Neigungswinkel i oder die sogenannte Schiefe eines Prisma, aus dem Neigungswinkel η einer von den Seitenflächen z. B. BCbc gegen die

 Grund-

Grundfläche, und dem Winkel BCc oder bBC, welchen in jener Seitenfläche die Seitenlinien Cc, Bb mit der Grundlinie BC machen. – Es ist also in einem gegebenen schiefen Prisma das Produkt sin α sin η immer einer beständigen Grösse gleich, von welcher Seitenfläche auch die Rede seyn mag.

3. Also kann man den Inhalt eines Prisma auch durch die Formel

$$P = B \cdot c \cdot \sin i$$

ausdrücken.

§. 28.

Zusatz VI.

1. Ist die Grundfläche B ein Kreis dessen Durchmesser = d, so verwandelt sich das Prisma in einen Cylinder, und die Grundfläche wird $\frac{1}{4} d^2 \pi = 0{,}7853981 \cdot d^2$ wegen $\pi = 3{,}141592\ldots$ Also der cubische Inhalt des Cylinders, den ich mit C bezeichnen will

$$C = 0{,}785\ldots d^2 c \sin i$$

wo c die Seitenlinie des Cylinders und i die Schiefe desselben gegen die Grundfläche bedeutet.

2. Will man mit Logarithmen rechnen, so wird wegen $\log 0{,}785\ldots = \log \pi - \log 4 = 0{,}8950899 - 1$

log

$\log C = 2 \log d + \log c + l \sin i$
$+ 0{,}8950899 - 1$

Wenn in dieser Gleichung von den 4 Grössen C, c, d, i drey gegeben sind, so läßt sich daraus allemahl die vierte finden; durch diese Formel lassen sich demnach allerley Aufgaben, welche bey Cylindern vorkommen können, leicht auflösen.

3. Wenn man sich durch die Are KK des Cylinders (Fig. 14) einen auf die Grundfläche senkrechten Schnitt kKcC gedenkt, und darin cG senkrecht auf KC, so ist die Schiefe kKC des Cylinders auch dem Neigungswinkel der Are KK gegen die Grundfläche gleich, oder cCG = kKG.

4. Man kann auch von welchem Punkte γ des obern Umfanges man will, ein Perpendikel γG' auf die Grundfläche herabfällen. Ist nun γC' eine Seitenlinie des Cylinders, so ist auch γC'G' = cCG = kKC die Schiefe des Cylinders.

5. Um diese zu messen legt man die scharfe Kante cr des Werkzeugs (Fig. 12) an die Seitenlinie cC oder γC' des Cylinders (Fig. 14) und öffnet beyde Liniale so weit, daß die scharfe Kante cs des Linials ca längst CG, oder C'G' falle, so wird der Winkel n b c a, bey der Liniale, den man wie (§. 140 u.), durch Hülfe

 Chorde

Grundfläche, und dem Winkel BCc oder b
welchen in jener Seitenfläche die Seiten
Cc, Bb mit der Grundlinie BC machen
ist also in einem gegebenen schiefen Pris
Produkt sin. α. sin. η immer einer be
Grösse gleich, von welcher Seitenfl
die Rede seyn mag.

3. Also kann man den Inhal
ma auch durch die Formel
P = B . c . sin
ausdrücken.

§. 28.

Zusatz.

1. Ist die Grundfläch
Durchmesser = d, so ver
nun in einen Cylinde
fläche wird $\frac{1}{4}$ d² π = 0
π = 3,141592 ... A
des Cylinders, den ich
C = 0,78
wo c die Seitenlini
Schiefe desselben
deutet. ,2099
1,0992099
2. Will man
wird wegen log des Cylinders
= 0,8950899 nung brauchen,
so



man in den gefundenen For
geradezu die Höhe selbst

Körper

gefund
der Körp
flächen
det man z. B
Mauritiana o
chen Tractat
ten und gewün
es vollen und le
Theils eines M
denen dazu gehö
Circulruthen an
Circulstücken-Fl
1769. S. 17.
oben (§. 18. 58.) an
sche Anweisung
Diese Tafeln ent
Durchmesser 1 bis

und die Kreisflächen selbst sind bis auf Hunderttausendtheilchen angegeben.

Der Gebrauch dieser Tafeln ist folgender: Gesetzt der Durchmesser eines Kreises sey 9,76 Fuß, so findet man in der Tafel für den Durchmesser 976 die Kreisfläche 748151,44089; weil nun $9{,}76 = \frac{976}{100}$, und sich die Kreisflächen wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, so muß man die für 976 angegebene Kreisfläche mit dem Quadrate von 100, also mit 10000, dividiren, um diejenige für den Durchmesser 9,76 zu erhalten. Demnach wird diese letztere = 74,815 ungefähr Quadratfuß, und so in andern Fällen.

Zusatz VIII.

Um Stücke vom Cylinder genau zu berechnen, z. B. einen cylindrischen Ausschnitt (Fig. 45) zwischen zwey durch die Axe Kk des Cylinders gelegten Ebenen KkNn, KkMm, oder einen cylindrischen Schnitt zwischen den beyden gleichen Kreissegmenten NTM, ntm, der durch einen mit der Axe Kk parallel geführten Schnitt entsteht, dienen folgende Vorschriften:

I. Für den cylindrischen Ausschnitt KNM sey die Länge des Bogens NTM,

oder ntm, gemessen worden. Man nenne solche $= v$, und den Halbmesser NK $= r$, so wird die Fläche des Kreisausschnitts NKMT $= \frac{1}{2} r v$, demnach der Cubikinhalt des cylindrischen Ausschnitts I

$$A = \frac{1}{2} r . v . h$$

wenn h die Höhe des Cylinders, zu welchem der Ausschnitt gehöret, bedeutet.

II. Ist statt des Bogens NTM, der Winkel NKM $= \varphi$ gemessen worden, so hat man erstlich für den Halbmesser r den ganzen Umkreis $p = 2 r \pi$ und folglich wenn φ in Graden gegeben ist

$$360 : \varphi = 2 r \pi : v$$

Also $v = \frac{2 r \pi \varphi}{360} = \frac{r \pi \varphi}{180}$

Ist φ in Minuten gegeben, so wird

$$v = \frac{r \pi \varphi}{180 . 60}$$

Und so wenn φ durch Secunden ausgedrückt wäre $v = \frac{r \pi \varphi}{180 . 60 . 60}$

Also

$A = \frac{1}{2} r^2 h . \frac{\pi \varphi}{180}$ wenn φ in Graden gegeben ist

$A = \frac{1}{2} r^2 h . \frac{\pi \varphi}{180 . 60}$ wenn φ in Minuten gegeben ist

I

A =

und die Kreisflächen selbst sind bis Zehntausendtheilchen angegeben.

Der Gebrauch dieser Tafel[illegible]

Gesetzt der Durchmesser eines [illegible] Fuß, so findet man in der [illegible] messer 976 die Kreisfläch[illegible] [illegible] flächen wie die Quadrat[illegible] haben, so muß man [illegible] Kreisfläche mit dem [illegible] Durchmesser 9,76 [illegible] diese letztere [illegible] [illegible] hat für einen [illegible] mahl erst diese Aus[illegible] [illegible] w. selbst zu berechnen, so kann [illegible] der Tafeln bedienen, welche die [illegible] Minuten rc. gegebenen Bögen in [illegible] des Halbmessers 1 darstellen, der[illegible] in verschiedenen Büchern vorfindet. [illegible] Vegaischen Sammlung von Ta[illegible] 1797. ist es die erste im Anhang. In [illegible] Zusätzen zu den logarithmischen [illegible] die Tab. 23. So ist z. B. für $\varphi = 15^{\circ}$; [illegible] $= 0,261799$. Für $\varphi = 15^{\circ}, 12', 17''$ [illegible]

[illegible] man den Bogen in Decimaltheilen des [illegible] wie folget

15°

$15^{0} = 0,26179938..$
$2' = 0,00349065..$
$'' = 0,00008241..$
$= 0,26537244$

...ird man jedoch, um
... zu finden, lieber
...ie Multiplication
...e vornehmen.

...og 180

$= 0,2418774 - 2;\ (\alpha)$

$... = \log \pi - \log 180.60$

$= 0,4637261 - 4;\ (\beta)$

$\log \frac{\pi}{180.60^2} = \log \pi - \log 180.60^2$

$= 0,6855749 - 6;\ (\gamma)$

Und daher für den körperlichen Raum des Cylinderausschnitts

$\log A = 2 \log r + \log h + \log \varphi - 1\mathfrak{2} + 1 \text{Const}.$

wo statt log Const entweder der Ausdruck (α) oder (β) oder (γ) gesetzt wird, je nachdem φ in Graden, Minuten oder Secunden ausgedrückt ist.

VI. Dieß giebt denn, wenn φ in Graden gegeben ist:

log.

$\log A = 2\log r + \log h + \log \varphi - 2{,}0591526$

Wenn φ in Minuten gegeben ist

$\log A = 2\log r + \log h + \log \varphi - 3{,}8373039$

Wenn φ in Sekunden gegeben ist

$\log A = 2\log r + \log h + \log \varphi - 5{,}6154551$

VII. Den körperlichen Inhalt E des cylindrischen Abschnitts zwischen den beyden gleichen Kreissegmenten NTM, ntm, (Fig. 15) zu finden, messe man in der Grundfläche die Sehne MN und das Perpendikel TV von dem Halbirungspunkte des Bogens NTM auf diese Sehne.

Daraus muß nun erstlich die Fläche des Kreissegments NTM, als Grundfläche des cylindrischen Abschnitts, gefunden werden.

Nun ist, wenn man TV bis zum Mittelpunkte K sich verlängert gedenkt, und TV = b; NV = ½ NM = ½ a nennt

$NV^2 + VK^2 = NK^2$ d. i. $\frac{1}{4}a^2 + (r - b)^2 = r^2$

Demnach $\frac{1}{4}a^2 - 2rb + b^2 = 0$, und der Halbmesser

$$NK = r = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}$$

Aus diesem Halbmesser ergiebt sich nun der Winkel NKM $= \varphi$; denn man hat sin NKV

$$= \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{NV}{NK} = \frac{4ab}{a^2 + 4b^2} = \frac{\frac{1}{2}a}{r}$$

Wer-

Werden nun die diesem Winkel zugehörige Grade, Minuten ꝛc. nach (III. ꝛc.) in Decimaltheilen des Halbmessers 1 ausgedrückt, so wird für den Halbmesser KM = r die Länge des Bogens

$NTM = v = r.\varphi.$

Mithin der Kreisausschnitt NKM = $\frac{1}{2} r . r . \varphi = \frac{1}{2} r^2 . \varphi$; die Fläche des Dreyecks NKM = $\frac{1}{2}$ NM . KV = NV . KV = $r \sin \frac{1}{2}\varphi . r \cos \frac{1}{2}\varphi = r^2 \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi$ und die Fläche des Kreisabschnitts NTM = $\frac{1}{2} r^2 \varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin \varphi)$; folglich wenn die Höhe des Cylinderschnitts über diesem Kreisabschnitte mit h bezeichnet wird, der Cubikinhalt des cylindrischen Abschnitts NTMntm

$$E = \frac{1}{2} r^2 h (\varphi - \sin \varphi)$$

Exempel. Es sey NM = a = 7; b = 1; h = 12; so wird $r = \frac{53}{8}$; $\sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{a}{2r} = \frac{28}{53}$

log 28 = 1,4471580
log 53 = 1,7242759

log sin $\frac{1}{2}\varphi$ = 9,7228821
$\frac{1}{2}\varphi$ = 31°. 53' zunächst
also φ = 63. 46

Nun aus den oben angeführten Vegaischen Tafeln

63^{0} in Decimaltheilen des Halbm. $= 1,09955$
$46'$ . . . . $= 0,01338$

also φ . . . . $= 1,11293$
$\sin\varphi = \sin 63^{0}.46'$ . . $= 0,89700$

$\varphi - \sin\varphi = 0,21593$

$\log(\varphi - \sin\varphi) = 0,3343130 - 1$
$\log\frac{1}{2}h = 0,7781513$
$2\log r = 1,6423718 = 2(\log 53 - 18)$

$\log E = 1,7548361$

Also der cylindrische Abschnitt $E = 56,864$ z. B. Cubikfuße, wenn a, b, h in Längenfußen gegeben sind.

VIII. Für $r = 1$ würde das Kreissegment $NTM = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi)$; man darf also für einen andern Halbmesser r dieses Segment nur mit r^2 multipliciren, um das ähnliche Segment für den Halbmesser r also die Grundfläche des Cylinderabschnitts zu erhalten.

IX. Man hat Tafeln, wodurch man die Berechnung der Kreisabschnitte erleichtert zu haben glaubt, und nennt sie Cirkulschnitztafeln. Man drückt in diesen Tafeln die Kreisabschnitte gewöhnlich durch Decimaltheile der ganzen Kreisfläche, zu denen sie gehören, aus.

Nennt man diese Kreisfläche G und das Segment S, so hat man wegen $G = r^2\pi$ und $S = \frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin\varphi)$

S

$$\frac{S}{G} = \frac{\varphi - \sin\varphi}{2\pi}$$

Nun ist wenn $TV = b$ und $KM = r$ gegeben sind, wegen $r \cos\frac{1}{2}\varphi = KV = r - b$

$$1 - \cos\frac{1}{2}\varphi = \frac{b}{r} \text{ oder } 2 \sin\frac{1}{4}\varphi^2 = \frac{b}{r}$$

Mithin $\sin\frac{1}{4}\varphi = \sqrt{\frac{b}{2r}}$.

Wenn man also angiebt, was der so genannte Pfeil TV für ein Theil des Halbmessers KM oder auch des Durchmessers ist d. h. wenn der Bruch $\frac{b}{r}$ oder auch $\frac{b}{2r}$ gegeben ist, so hat man hieraus den Werth von $\sin\frac{1}{4}\varphi$, und folglich den Winkel φ, woraus sich denn weiter der Werth von $\frac{S}{G}$ d. h. was für ein Theil der Abschnitt S von der ganzen Kreisfläche G ist, nach der gefundenen Formel ergiebt.

X. Eine solche Circulschnitztafel (Canon areae segmentorum circuli) findet man in Beyers oben (§. 30.) angeführter Conometria Mauritiana. Er setzt darin den Durchmesser $2r = 100$, und giebt die Höhe oder den Pfeil b durch alle Hunderttheile des Durchmessers an, nebst den zugehörigen

63^{b} in Decimaltheilen des Halbm. =
$46'$ . . . .
also φ . . . .
$\sin\varphi = \sin 63^{b}. 46'$ . .

φ — ſ

$\log(\varphi - \sin\varphi) = 0{,}3343130$
$\log\frac{1}{2}h = 0{,}778151$
$2\log r = 1{,}64237$

$\log E = 1{,}7548$

Also der cylindrische
z. B. Cubikfuße, wenn
gegeben sind.

VIII. Für r =
NTM = $\frac{1}{2}$ (φ -
einen andern S … $\frac{b}{2r}$ = 0,08.
mit r^2 multipl… …rtionaltheile anwenden
für den Hal…
Cylinderab… …on $\frac{S}{G}$ für $\frac{b}{2r}$ = 0,07547 zu

IX.
Berechn… …det für den Tafelpfeil 0,07 den
haben … $\frac{S}{G}$ = 0,03077.., und für den Ta-
tafel…
Kr…
der ge… 0,08 den Werth $\frac{S}{G}$ = 0,03748 . . ;
…aus wird für 0,07547 der Werth von
… 0,03444..

Diese

fundene Zahl müßte man

für den Durchmesser
ltipliciren, um den
Segments S,
rhalten. Diese
r aus einer
, aber es
e dabey
bst in

nen, mögte

erlich seyn, daher
ng der Kreisabschnitte
würklich eben nicht sehr
man nicht die Logarithmen zu
n will, die freylich zu Beyers
wenig gebraucht wurden.

XI. Ich will den Ausdruck $\frac{\varphi - \sin\varphi}{2\pi}$, des-
en Werth man für jeden gegebenen Tafelpfeil
n den Tafeln aufsucht $= \mu$ nennen: so ist

$$\frac{S}{G} = \mu$$

und (wegen $G = r^2\pi$) $S = r^2\mu\pi$; also durch
Logarithmen

$$\log S = 2\log r + \log\pi + \log\mu$$

In so fern können also die Circulschnitztafeln dienen, daß man sich durch dieselben gewissermaaßen die Berechnung des Ausdrucks φ — Sin φ in dem obigen Beyspiele (VII) erleichtert, und also nicht nöthig hat, den Bogen φ erst selbst zu berechnen, und in Decimaltheile des Halbmessers zu verwandeln.

XII. Vortheilhafter als Beyers Circulschnitztafeln sind diejenigen, welche in *John Smith* Stereometrie or the art of practical Gauging. (London 1678.) vorkommen, weil sie die Werthe von $\frac{S}{G}$ von 10 zu 10 Zehntausendtheilchen des Durchmessers angeben, wodurch die Anwendung der Proportionaltheile kürzer und genauer wird, als nach Beyers Tafeln. Auch die Oberreitische Tafel welche sich unter andern in Rosenthals Encyclopädie der reinen Mathematik II. B. (Gotha 1795) S. 172 findet, ist zu empfehlen.

Kleinere Tafeln zum Behuf der Weinvisirer, denen bey der Berechnung nicht ganz voller Fässer auch Kreissegmente nöthig sind, findet man in Lamberts Beyträgen zur Mathematik I. Th. S. 346. In Hrn. Hofr. Späths oben (§. 18. 60.) angeführten Buche S. 183 u. a. Schriften.

Die Lambertische s. m. unten bey dem Visiren der Fässer.

§. 32.

§. 32.

Zusatz IX.

Berechnung cylindrischer Ringe oder Röhren.

I. Wenn (Fig. 16) ABCD, abcd, zwey Cylinder sind, welche eine gemeinschaftliche Axe kK und einerley Höhe haben, so nennt man den Raum zwischen der Seitenfläche des innern und äußern Cylinders einen cylindrischen Ring oder Röhre. Nennt man nun den Durchmesser AB des ganzen Cylinders $= D$, und den Durchmesser ab der innern cylindrischen Höhlung $= d$, die Höhe des Ringes $= h$, so ist der körperliche Inhalt des ganzen Cylinders $= \frac{1}{4} D^2 . \pi . h$, und der innern Höhlung $= \frac{1}{4} d^2 . \pi h$. Mithin des cylindrischen Ringes oder der Röhre

$$R = \frac{1}{4} D^2 \pi h - \frac{1}{4} d^2 \pi h$$
$$= \frac{1}{4} \pi h (D^2 - d^2)$$
$$= \frac{1}{4} \pi h (D + d) . (D - d)$$

II. In dieser Formel drückt $D - d$ die doppelte Breite oder Dicke Cc des Ringes aus. Man setze $Cc = Dd = e$ so ist $d = D - 2e$ und $D + d = 2(D - e)$; demnach

$$R = \frac{1}{4} \pi h . 2 (D - e) . 2e$$
$$\text{oder } R = \pi h (D - e) e$$

welche Formel also den Inhalt des Ringes aus dem Durchmesser D desselben, seiner Höhe h und

und Dicke e, darstellt, und leicht durch Logarithmen berechnet werden kann, wenn man es nöthig findet.

III. Ist e sehr klein in Vergleichung mit D, so ist ohne merklichen Fehler

$$R = \pi h D e$$

Hier ist nun $\pi . D$ der Umfang der Grundfläche, und wenn die cylindrische Röhre auf der Grundfläche senkrecht steht, $h . \pi . D$. die krumme äußere Seitenfläche der Röhre, welche man demnach nur mit der Dicke der Röhre multipliciren darf um den Cubikinhalt der Röhre zu erhalten, im Fall die Dicke derselben nur sehr gering ist.

IV. Allgemein aber ist in der Formel

$$R = \tfrac{1}{4}\pi h (D+d)(D-d)$$

$$= \pi h . \frac{D+d}{2} . \frac{D-d}{2}$$

$$= \pi h . \frac{D+d}{2} . e$$

der Ausdruck $\pi h . \frac{D+d}{2}$ das arithmetische Mittel zwischen der äußern und innern Seitenfläche der Röhre, im Falle die Röhre auf der Grundfläche senkrecht ist. Man darf also in diesem Falle nur die mittlere Cylinderfläche mit der

G der

der Dicke e der Röhre multipliciren, um ihren körperlichen Inhalt zu erhalten.

V. Ist (Fig. 17) A ein Stück von einer cylindrischen Röhre, deren Seitenlinien wie LH = h auf der Grundfläche senkrecht stehen, und gehen Ll, Mm verlängert durch den Mittelpunkt K des Kreises dem die Bögen LM oder lm zugehören, so messe man die Länge der Bögen LM, lm vermittelst einer herumgelegten Schnur, oder eines Riemens, so ist (IV) $\frac{LM + lm}{2} \cdot h$ die mittlere krumme Seitenfläche des Röhrenstücks, mithin dessen körperlicher Inhalt $A = \frac{LM + lm}{2} \cdot h \cdot e$, wenn die Dicke $Mm = Ll = e$.

VI. Die Formeln IV. V. gelten begreiflich auch, wenn die Seitenlinien der Röhre oder des Röhrenstücks auf der Grundfläche nicht senkrecht stehen. Dann bezeichnet aber h nicht mehr die schiefe Seitenlinie, sondern die senkrechte Höhe der Röhre oder des Röhrenstücks, und folglich ein Ausdruck wie $\pi h \cdot \frac{D + d}{2}$ oder $h \cdot \frac{LM + lm}{2}$ nicht die mittlere krumme Seitenfläche des schief stehenden Körpers, sondern eines geraden, der mit dem schiefen gleiche Höhe haben würde.

§. 33.

Zusatz X.

Berechnung hufförmiger Abschnitte von cylindrischen Körpern.

I. Ein senkrechter Cylinder (Fig. 18. Tab. II.) werde unter einem gewissen Winkel gegen die Grundfläche ALBN mit einer ebenen Fläche LMN durchschnitten, welche auf der Seitenfläche des Cylinders die krumme Linie LMN bilde. Was von dem Cylinder zwischen der schneidenden Ebene und der Grundfläche enthalten ist, wird wegen der Aehnlichkeit mit einer Hufe (ungula) ein hufförmiger Abschnitt des Cylinders genannt, dessen körperlicher Raum auf folgende Art gefunden werden kann.

II. LN sey die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene mit der Grundfläche, und von dem Mittelpunkte K auf LN senkrecht der Halbmesser KB = r, welcher LN in C halbiren wird.

III. In der Ebene LMN ziehe man durch C auch CM auf LN senkrecht, so ist MCB = η der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Grundfläche.

IV. Die Ebene dieses Neigungswinkels steht auf der Grundfläche senkrecht, und schneidet

det die krumme Seitenfläche des Cylinders in der geraden Linie MB.

V. Durch einen beliebigen Punkt c in LN ziehe man cm parallel mit CM, und in der Grundfläche cb parallel mit CB, so steht auch die Ebene mcb auf der Grundfläche senkrecht, und schneidet die Cylinderfläche in der geraden Linie mb, welche mit MB parallel, und wie diese auf der Grundfläche senkrecht stehen wird.

VI. Also ist das Dreyeck cbm dem CBM ähnlich.

VII. Nun sey eben so durch einen Punkt γ unendlich nahe, bey c, $\gamma\mu$ parallel mit CM, $\gamma\beta$ parallel mit CB, so ist auch das Dreyeck $\gamma\mu\beta$ dem CBM ähnlich, und zwischen beyden Dreyecken cbm, $\gamma\beta\mu$ ein unendlich dünnes Scheibchen enthalten, welches für ein prismatisches Scheibchen gelten kann, und ein Differential des zwischen den Dreyecken CBM und cbm enthaltenen Stückes des hufförmigen Abschnittes darstellt.

VIII. Man ziehe durch den Mittelpunkt K des Kreises ALBN den Durchmesser QH parallel mit LN, und verlängere bc, $\beta\gamma$ bis sie QH in p und q durchschneiden, so ist $pq = c\gamma$ das Differential der Abscisse Kp, welche man mit x; so wie die Ordinate pb für den Punkt b mit y bezeichne.

also $CB = r - g$;
... die Fläche des Dreyecks
$= A$ bezeichnen will $=$

... ist wegen der Aehnlichkeit der
... BM, cbm (VI) und wegen $cb =$
$= y - g$.

$CBM : \Delta cbm = CB^2 : cb^2$

$$= (r - g)^2 : (y - g)^2$$

Demnach $\Delta cbm = \frac{(y - g)^2}{(r - g)^2} \cdot A$.

Und das dünne Scheibchen (VII), oder das Element des zwischen CBM und cbm enthaltenen Stückes des hufförmigen Abschnitts $= dx \cdot \Delta cbm$.

X. Es sey also dieses Stück $= U$, so hat man $dU = dx \cdot \Delta cbm$

oder $dU = \frac{(y - g)^2}{(r - g)^2} A\, dx$

XI. Nun ist aber nach der Gleichung des Kreises $y^2 = r^2 - x^2$.

XII. Dieß in den Ausdruck des Differentials (X) substituirt, nachdem man in demselben $(y - g)^2 = y^2 - 2gy + g^2$ gesetzt hat, giebt

dU

$$dU = \frac{((r^2 + g^2) - x^2 - 2g\sqrt{(r^2 - x^2)})\, A\, dx}{(r+g)^2}$$

Hievon ist das Integral wegen $\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$ $= \frac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{1}{2} r^2$ Bog. sin $\frac{x}{r}$ (S. Integralf. §. XVI. 1.)

$$U = \left[(r^2 + g^2)x - \tfrac{1}{3}x^3 - gx\sqrt{(r^2 - x^2)} - g r^2 \text{ B. sin } \frac{x}{r}\right] \frac{A}{(r+g)^2}$$

Hierzu ist keine beständige Grösse oder Const zu addiren, weil für $x = 0$ auch $U = 0$ wird.

XIII. Um nun den hufförmigen Abschnitt von C bis L zu erhalten, muß man $x = LC = k$ setzen. Zugleich muß aber der Ausdruck für U so dargestellt werden, daß er bloß solche Grössen enthält, welche sich an dem hufförmigen Abschnitt sogleich selbst messen lassen, d. h. es müssen r und g daraus weggeschafft, und dafür andere Grössen, welche an dem Abschnitte selbst vorkommen, substituirt werden.

XIV. Hier können nun $LC = k$, $BM = h$, und $BC = f$ diese Grössen seyn.

Man hat demnach erstlich $KC^2 + LC^2 = KL^2$ oder $g^2 + k^2 = r^2$, und $g = r - f$ demnach $(r - f)^2 + k^2 = r^2$ oder $\frac{f^2 + k^2}{2f} = r$

und $g = \frac{k^2 - f^2}{2f}$.

XV.

XV. Setzt man nun für den hufförmigen Abschnitt von C bis L nach (XIII.) $x=k$, so erhält man wegen $\sqrt{(r^2-x^2)}$ oder $\sqrt{(r^2-k^2)}=g$, und wegen $r-g=f$ diesen Abschnitt

$$U=\left(r^2 k-\tfrac{1}{3}k^3-g.r^2 \,\mathfrak{B}\sin\frac{k}{r}\right)\frac{A}{f^2}$$

in welche Formel man demnach statt r und g nur noch die (XIV) gefundenen und durch k und f zu bestimmenden Werthe setzen dürfte.

Verlangt man den hufförmigen Abschnitt über der ganzen Grundfläche NBL, so darf man den eben gefundenen Ausdruck nur noch verdoppeln.

XVI. Der Ausdruck $\mathfrak{B}\sin\frac{k}{r}$ bedeutet allemahl einen Bogen, dessen Sinus $=\frac{k}{r}$ seyn würde, in Decimaltheilen des Halbmessers genommen, und dieser Bogen würde dem Winkel BKL am Mittelpunkte zugehören, weil dessen Sinus $=\frac{LC}{KL}=\frac{k}{r}$.

Eben dieser Winkel würde auch $\frac{KC}{KL}$ oder $\frac{g}{r}$ zum Cosinus haben; so erhielte man demnach auch

$$U=\left(r^2 k-\tfrac{1}{3}k^3-gr^2 \,\mathfrak{B}\cos\frac{g}{r}\right)\frac{A}{f^2}$$

XVII. Für den Fall, daß die Linie NL durch den Mittelpunkt K geht, wird $f = k = r$, $g = 0$ und demnach $U = \frac{2}{3} r A$ d. h. die Fläche des Dreyecks KBM ($= \frac{1}{2} h . r$) in $\frac{2}{3}$ des Halbmessers KB multiplicirt, oder $U = \frac{2}{3} r . \frac{1}{2} h . r$ $= \frac{1}{3} r^2 h$, und folglich der hufförmige Abschnitt QMH über der halben Kreisfläche QBH $= \frac{2}{3} r^2 h$.

XVIII. Rückt die Durchschnittslinie LN über QH hinaus in qh, so ist allemahl $f > k$, weil jetzt $f = BC'$ und $BC' > r$. In diesem Falle ist also $\mathfrak{B} \cos \frac{g}{r}$ grösser als 90°, weil $\frac{g}{r} = \frac{k^2 - f^2}{k^2 + f^2}$ als Cosinus negativ wird, wegen $f > k$.

XIX. Geht qh durch A, so wird $k = 0$, $g = -r$; und $f = 2r$, demnach $\mathfrak{B} \cos \frac{g}{r}$ oder $\mathfrak{B} \cos \frac{k^2 - f^2}{k^2 + f^2} = \mathfrak{B} \cos - 1 = 180°$ oder (in Decimaltheilen des Halbmessers) $= \pi$ $= 3,1415 \ldots$ Demnach für diesen Fall

$$U = \tfrac{1}{8} f \pi A = \tfrac{1}{4} r \pi A$$

Aber A ist jetzt gleich der Fläche des Dreyecks ABM $= r . h$, folglich

$$U = \tfrac{1}{4} r^2 \pi h,$$ und der hufförmige Abschnitt AσMτA über der ganzen

Kreis-

Kreisfläche ANBLA = 2U = $\frac{1}{2}r^2\pi h$ d. h. die Kreisfläche ANBLA multiplicirt in die halbe Höhe BM oder h.

XX. Der Inhalt des Dreyecks CBM ist überhaupt $A = \frac{1}{2}hf$, demnach

$$\frac{A}{f^2} = \frac{1}{2}\frac{h}{f} = \frac{1}{2}\tang\eta \text{ (III.)}$$

Also ist auch

$$U = \frac{1}{2}F \cdot \tang\eta$$

wenn F den Ausdruck bedeutet, welcher in (XV) in den Werth von $\frac{A}{f^2}$ multiplicirt ist, welches denn für den ganzen hufförmigen Abschnitt über LBN den Ausdruck F tang η giebt.

XXI. Der Schnitt gehe durch QH, so ist $g = 0$, und das der Abscisse $Kq = x$ zugehörige Stück des hufförmigen Abschnitts über $KqB\beta$ nach (XII) $= (r^2 x - \frac{1}{3}x^3)\frac{A}{r^2}$; aber der ganze Abschnitt für $x = KQ = r$ ist nach (XVII) $= \frac{2}{3}rA$; also das Stück des hufförmigen Abschnitts über dem Kreissegment $Qq\beta = \frac{2}{3}rA - (r^2 x - \frac{1}{3}x^3)\frac{A}{r^2}$.

Man setze $x = r - Qq = r - t$, so wird der hufförmige Abschnitt über $Qq\beta = \frac{A}{r^2}(rt^2 - \frac{1}{3}t^3)$.

Nun

Nun ist aber $\frac{A}{r^2} = \frac{1}{2} \tang \eta = \frac{1}{2} \tang MKB$
$= \frac{1}{2} \tang \mu q \beta$, und $y^2 = 2rt - t^2$, oder
$r = \frac{y^2 + t^2}{2t}$; also der Abschnitt über $Qq\beta$,
(worin $Qq = t$ und $qe = y$) = dem Werthe
$\frac{1}{2} \tang \eta (\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} t^2) t$, welches, wenn $\beta\mu = z$
genannt wird, wegen $\tang \eta = \frac{z}{y}$, sich in
$\frac{1}{2} \frac{t.z}{y} (\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{6} t^2)$. verwandelt.

§. 34.

Berechnung cylindrischer Abschnitte überhaupt.

I. Ein senkrechter Cylinder werde von einer Ebene LMN unter dem Neigungswinkel η dergestalt geschnitten, daß die Parallellinien LN, ln (Fig. 19) in beyden gegeneinander überstehenden Grundflächen die Durchschnittslinien der schneidenden Ebene LNln mit diesen Grundflächen darstellen, so ist allgemein für jedes Cylinder-segment, zwischen den Grundflächen LBN, lbn, der körperliche Raum gleich dem Unterschiede der hufförmigen Abschnitte LNBM, lnbM, wo die Buchstaben K, C, B, M mit denen in (Fig. 18) und im vorhergehenden § gleiche Bedeutung haben, und KB, kb, parallel sind.

II. Setzt man nun $cb = f'$; $lc = k'$ und nennt den Werth von F (§. 33. XX.) für den hufförmigen Abschnitt $lnbM = F'$, wo denn F' aus f' und k' eben so bestimmt wird, wie F aus f und k, so erhält man für das Cylindersegment zwischen den Grundflächen LBN, lbn den Ausdruck $(F - F')$ tang η, weil auch für den hufförmigen Abschnitt über lbn der Winkel $Mcb = MCB = \eta$.

III. Geht ein Cylinderschnitt durch alle Seitenlinien des Cylinders wie $\lambda\mu\tau\sigma$, so daß $B\mu$ die größte, und $D\lambda$ die kleinste Höhe des Schnitts über der Grundfläche des Cylinders bezeichnen, so darf man sich durch λ nur einen Parallelschnitt $\lambda\nu$ mit der Grundfläche gedenken, so ist der körperliche Inhalt zwischen diesem Parallelschnitt $\lambda\nu$ und der Grundfläche $DB = r^2\pi \,.\, B\nu$, und der hufförmige Abschnitt zwischen der Kreisfläche $\lambda\nu$, und der Schnittfläche $\lambda\mu = \frac{1}{2} r^2\pi \,.\, \mu\nu$ (§. 33. XIX.) Demnach der körperliche Raum zwischen dem Schnitt $\lambda\mu$ und der Grundfläche $DB = r^2\pi\left(B\nu + \frac{\mu\nu}{2}\right) =$

$r^2\pi \,.\, \frac{D\lambda + B\mu}{2}$ weil $\frac{1}{2}\,\mu\nu = \frac{B\mu - D\lambda}{2}$ und

$B\nu = D\lambda$. Es ist also dieser körperliche Raum $\lambda\mu BD$ gleich einem Cylinder, dessen Grundfläche derjenigen DB des vorgegebenen Cylinders,

ders, und die Höhe der mittleren arithmetischen Proportionale zwischen $D\lambda$ und $B\mu$ gleich ist.

IV. 1. In Fig. 76. Nro. 1. (Tab. VI.) sey $A\tau M\sigma$ ein Schnitt des Cylinders (I) durch den Anfangspunkt A des Durchmessers AB der Grundfläche, unter dem Neigungswinkel MAB $= \eta$. $QH\sigma\tau$ sey ein Cylinderschnitt senkrecht auf die Grundfläche und auf die Ebene des Neigungswinkels, welche von $QH\sigma\tau$ in Kk geschnitten werde. Sind nun QH, $\sigma\tau$, die Durchschnittslinien der Ebenen QAH, $\sigma A \tau$ mit der Ebene $QH\sigma\tau$; und $H\tau$, $Q\sigma$ die Durchschnitte dieser Ebene mit der Seitenfläche des Cylinders, so sind Kk, $H\tau$ parallel und gleich, so wie auch KH und $k\tau$ parallell und von gleicher Grösse sind. Man verlangt das zwischen den Ebenen AKk, $KHk\tau$, AKH und der krummen Fläche $AH\tau$ enthaltene Stück = Q des Cylinders.

2. Man nenne jetzt AK = f; KH = k, den Halbmesser AC der Grundfläche = r, und KC = r — f = g. Die senkrechten Coordinaten At = x, th = y. Steht nun die Ebene tmnh auf der Grundfläche senkrecht, so ist, wie sich leicht nach einiger Betrachtung ergiebt, mthn ein rechtwinklichtes Parallelogramm, dessen Höhe, tm = x tang η, und die Linie th = y, also die Fläche = x . y . tang η ist.

3. Dieß Parallelogramm ist ein Schnitt des körperlichen Raumes (2) den man sucht. Stellt man sich nun neben diesem Schnitt einen andern $\mu\nu\lambda$ vor, welcher von jenem um das Differential der Abscisse At abstehe, so ist zwischen beyden ein körperliches Scheibchen enthalten, dessen Inhalt $=$ tang η . $x y dx$.

4. Rechnet man nun den körperlichen Raum Q von A an, so hat man $dQ = \tan\eta . xydx$, und folglich wegen $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$

$$Q = \tan\eta \int x dx \sqrt{(2rx - x^2)}$$

$$= \tan\eta \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{3}(2rx - x^2)\sqrt{(2rx - x^2)} \\ -\frac{1}{2}r(r-x)\sqrt{(2rx - x^2)} \\ +\frac{r^3}{2}\,\mathfrak{B}\sin\frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r} \end{array} \right\}$$

wozu keine Const zu addiren ist, weil für $x = 0$ auch wie sichs gehört $Q = 0$ wird. (Integralf. §. XIX.)

5. Für den ganzen körperlichen Raum bis an die Schnittfläche $KHk\tau$ setzt man $x = AK = f$, so ist $2rx - x^2 = 2rf - f^2 = k^2$; $r - x = r - f = g$; und folglich

$$Q = \tan\eta \left(-\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}rgk + \frac{r^3}{2}\,\mathfrak{B}\sin\frac{k}{r} \right)$$

wo denn der zur Berechnung nöthige Halbmesser $r = \frac{k^2 + f^2}{2f}$ ist.

§. 35.

§. 35.

Von dem körperlichen Raume prismatischer Abschnitte.

I. Ueber der Grundfläche ABCDE (Fig. 20) gedenke man sich ein gerades Prisma, dessen auf der Grundfläche senkrecht stehenden Seitenlinien der Ordnung nach A1, B2, C3, D4, E5 ꝛc. seyen.

II. Dieß Prisma werde schief gegen die Grundfläche mit einer Ebene durchschnitten, und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ sey die Durchschnittsfigur, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\alpha\varepsilon$ die Durchschnitte jener Ebene, mit den über AB, BC, CD ꝛc. stehenden Seitenflächen des Prisma. Man verlangt den körperlichen Inhalt zwischen der Grundfläche ABCDE, und der Schnittfläche $\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon$.

III. Durch denjenigen Winkelpunkt a der Durchschnittsfigur, welcher der Grundfläche am nächsten ist, gedenke man sich einen Schnitt abcde, welcher der Grundfläche parallel und also derselben gleich und ähnlich ist, so besteht der gesuchte körperliche Inhalt (II.) aus dem zwischen abcde und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ enthaltenen prismatischen Abschnitt, und einem Prisma, welches zwischen den beyden Grundflächen ABCDE und abcde enthalten seyn würde.

IV. Um nun erstlich das erwähnte prismatische Stück zu finden, so gedenke man sich aus dem Punkte a (III.) die Diagonalen ac, ad ꝛc. und nun auch in der Schnittfigur, die correspondirenden Diagonalen $a\gamma$, $a\delta$ ꝛc. gezogen, so zerfällt das prismatische Stück zwischen abcde und $a\beta\gamma\delta\varepsilon$, in lauter viereckigte Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze in a, und deren Grundflächen der Ordnung nach die Vierecke oder Trapezien $bc\beta\gamma$; $c\gamma d\delta$; $d\delta e\varepsilon$; seyn würden, wie nach einiger Betrachtung ohne Mühe erhellen wird.

V. Die Höhen dieser Pyramiden würden der Ordnung nach, die Perpendikel von a auf bc oder deren Verlängerung, von a auf cd oder deren Verlängerung u. s. w. seyn, weil jene Trapezien alle auf der Schnittfigur abcde senkrecht stehen, und die Perpendikel von a auf jene Trapezien, nothwendig auf die Durchschnitte dieser Trapezien mit der Figur abcde, d. h. auf die Linien bc, cd, de ꝛc. treffen müssen.

VI. Man gedenke sich zuerst das dreyeckigte Prisma zwischen den Dreyecken ABC, abc und das Perpendikel al auf bc, welches zugleich die Höhe der Pyramide über der Grundfläche $b\beta c\gamma$ ist. Die Seitenflächen dieser Pyramide sind die Dreyecke $ab\beta$, abc, $a\beta\gamma$, $ac\gamma$.

So ist die Fläche des $\triangle ABC$ oder $abc = \frac{bc.al}{2}$; also der körperliche Inhalt des Prisma $ABCabc = \frac{bc.al}{2} . Aa$.

Der senkrechte Abstand der beyden Parallelen $b\beta$, $c\gamma$ ist $= bc$, also der Inhalt des Trapezii $b\beta c\gamma$ oder die Grundfläche der Pyramide $ab\beta c\gamma = \frac{b\beta + c\gamma}{2} . bc$, folglich der körperliche Inhalt dieser Pyramide $= \frac{b\beta + c\gamma}{2} . bc . \frac{al}{3} = \frac{b\beta + c\gamma}{3} . \frac{al.bc}{2}$, mithin der körperliche Raum zwischen den Dreyecken ABC und $ab\gamma =$ Prisma $ABCabc +$ Pyram. $ab\beta c\gamma = \left(Aa + \frac{b\beta + c\gamma}{3}\right) . \frac{al.bc}{2}$

$= \left(Aa + \frac{b\beta + c\gamma}{3}\right) . \triangle ABC$. Nun ist aber $b\beta = B\beta - Aa$, $c\gamma = C\gamma - Aa$. Demnach, wenn diese Werthe substituirt werden, der körperliche Raum zwischen den Dreyecken ABC und $a\beta\gamma = \frac{Aa + B\beta + C\gamma}{3} . \triangle ABC$ oder die Fläche des Dreyecks ABC multiplicirt in den dritten Theil der Summe der drey Höhen Aa, $B\beta$, $C\gamma$, welche durch die Winkelpunkte A, B, C, bis an die Schnittfläche $a\beta\gamma$

 herauf

...ittel

IV. Um nun erstlich das erwäh... tische Stück zu finden, so ge... aus dem Punkte a (III.) die ...de Weise ad 2c. und nun auch in der ... Dreyecken correspondirenden Diagon... δε u. s. w. gen, so zerfällt das pris... und nennt abcde und αβγδε, ...chen A a = a; ramiden, deren Ge... d, E ε = e u. s. w. und deren Grundf... Dreyecke ABC = A; Vierecke oder F... u. s. w. so erhält man seyn würden. ...chen Inhalt des Pris- ohne Mühe ...schnitts W zwischen

V. F... fläche ABCDE.. und der der Dr... fläche αβγδε... die Formel

$$\frac{a+b+c}{3}.A + \frac{a+c+d}{3}.B + \frac{a+d+e}{3}.C \text{ u. s. w.}$$

VIII. Wäre das vorgegebene Prisma kein gerades sondern ein schiefes, und man wollte den zwischen der Grundfläche ABCDE und der Schnittfläche αβγδε enthaltenen körperlichen Raum bestimmen, so gedenke man sich durch einen beliebigen Punkt a' in einer von den Seitenlinien einen Schnitt a' b' c' d' e' senkrecht auf die Seitenflächen des Prisma, und in diesem Schnitte die Diagonallinien a' c', a' d' 2c. gezogen, so

daß

dadurch die Dreyecke $a'c'b'$; $a'c'd'$;
rhält, deren Quadratinhalte der
mit A'; B'; C' ꝛc. bezeichnet
r körperliche Inhalt zwischen
r Schnittfläche $a\beta\gamma\delta\varepsilon$ =

$$\frac{a'a + c'\gamma + d'\delta}{3} . B'$$

..f eine ähnliche Art der
..m zwischen dem Schnitt
..nd der Grundfläche ABCDE =

$$\frac{+ Cc'}{3} . A' + \frac{Aa' + Cc' + Dd'}{3} . B' \text{ ꝛc.}$$

Demnach der körperliche Raum zwischen ABCDE und $a\beta\gamma\delta\varepsilon$

$$= \frac{Aa' + a'a + Bb' + b'\beta + Cc' + c'\gamma}{3} . A'$$

$$+ \frac{Aa' + a'a + Cc' + c'\gamma + Dd' + d'\delta}{3} . B'$$

u. s. w.

d. h. wenn man jetzt die schiefen Seitenlinien

$A\alpha = Aa' + a'a = a$

$B\beta = Bb' + b'\beta = b$

$C\gamma = Cc' + c'\gamma = c$

$D\delta = Dd' + d'\delta = d$

u. s. w.

nennt, so ist der körperliche Raum zwischen der Grundfläche ABCDE und der Schnittfläche $a\beta\gamma\delta\varepsilon$,

$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, den ich jetzt mit W' bezeichnen will, durch die Formel

$$W' = \frac{a+b+c}{3} \cdot A' + \frac{a+c+d}{3} B' \text{ u. s. w.}$$

bestimmt.

Es kömmt also bey einem solchen Abschnitt W' eines schiefen Prisma darauf an, daß man die Quadratinhalte der Dreyecke a'b'c', a'c'd' u. s. w. in einem durch das schiefe Prisma senkrecht durchgeführten Schnitte a'b'c'd'e zu berechnen weiß. Dieß kann auf folgende Art geschehen.

IX. 1. Es seyen (Fig. 21) Aa, Cc, Bb die parallelen Seitenlinien eines schief gegen die Grundfläche ABC stehenden dreyeckigten Prisma, und a'b'c' ein Schnitt des Prisma senkrecht auf seine Seitenflächen, und durch a' ein Schnitt a'nm parallel mit der Grundfläche ABC, also Δa'mn gleich und ähnlich dem ΔABC.

2. Man ziehe b'm, c'n; so erhält man zwey Pyramiden, eine deren Grundfläche das Dreyeck a'b'n, und die Spitze in c', und eine deren Grundfläche gleichfalls jenes Dreyeck und die Spitze in m seyn würde. Beyde Pyramiden müssen gleichen Inhalts seyn, weil ihre Spitzen in eine Linie Cc fallen, welche der Ebene AaBb, worin das Dreyeck a'b'n liegt, parallel ist.

Nimmt

Nimmt man nunmehr in der Pyramide $a'b'nc'$, das Dreyeck $a'b'c'$ zur Grundfläche an, so ist n die Spitze, und $b'n$ die Höhe, weil der Schnitt $a'b'c'$, auf den Seitenlinien Aa, Bb, Cc senkrecht ist.

3. Also der körperliche Inhalt der Pyramide $a'b'nc' = \triangle . a'b'c' . \frac{1}{3} b'n$

4. Eben so nehme man in der Pyramide $a'b'nm$ jetzt das Dreyeck $a'nm$ zur Grundfläche an, so ist b' die Spitze, und ein Perpendikel von b' auf die Ebene des Dreyecks $a'nm$ die Höhe;

Diese Höhe würde dem Produkt aus $b'n$ in den Sinus des Neigungswinkels dieser Linie gegen die Ebene $a'nm$, d. h. in den Sinus des Neigungswinkels der Linie Bb, gegen die Grundfläche ABC gleich seyn, weil $a'mn$ parallel mit ABC ist.

5. Nennt man also den Neigungswinkel, den die parallelen Seitenlinien des schiefen Prisma mit der Grundfläche desselben machen $= \eta$, so ist

Pyramide $a'b'nm = \triangle a'nm . \frac{1}{3} b'n . \sin \eta$

6. Weil nun beyde Pyramiden (3. 5) einander gleich sind (2), so hat man

$$\triangle a'b'c' . \frac{1}{3} b'n = \triangle a'nm . \frac{1}{3} b'n . \sin \eta$$
$$= \triangle ABC . \frac{1}{3} b'n . \sin \eta$$

Also $\triangle a'b'c' = \triangle ABC . \sin \eta$.

Man darf also in einem schiefen dreyeckigten Prisma nur die Grundfläche in den Sinus des Neigungswinkels der Seitenlinien des Prisma gegen die Grundfläche multipliciren, um die Fläche eines auf die Seitenlinien senkrechten Schnittes zu erhalten. Einiges Nachdenken wird zeigen, daß diese Vorschrift auch für ein vielseitiges Prisma gelten muß.

X. Man setze nun in (VIII) die Flächen der Dreyecke ABC = A, ACD = B, ADE = C, den Neigungswinkel des schiefen Prisma = η, so wird $A' = A \sin \eta$; $B' = B \sin \eta$; $C' = C \sin \eta$, mithin der (VIII.) erwähnte Abschnitt des schiefen Prisma zwischen der Grundfläche ABCDE und der Schnittfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ d. h.

$$W = \left(\frac{a+b+c}{3} A + \frac{a+c+d}{3} B \text{ u. s. w.}\right) \sin \eta.$$

XI. Hieraus lassen sich leicht die Vorschriften für einzelne Fälle ableiten. Ist das schiefe Prisma z. B. ein Parallelepipedum, so ist A = B, folglich der Abschnitt eines solchen Parallelepipedi $= \frac{b + 2(a+c) + d}{3} A \sin \eta$.

XII. Es sey (Fig. 22) das Prisma ein gerades, die Grundfläche ABCD ein Trapezium dessen Seiten AD, BC parallel, und auf CD senkrecht sind; der schiefe Schnitt $\alpha\beta\gamma\delta$ sey so durchgeführt, daß die Parallelen $C\gamma = B\beta$;

$D\delta = A\alpha$, also die Vierecke $B\beta C\gamma$; $AD\alpha\delta$ Parallelogrammen sind. Man ziehe die Diagonalen DB, $\delta\beta$; so ist, wenn man $A\alpha = D\delta = b$; $B\beta = C\gamma = a$ den Triangel $ADB = B$; den Tr. $BDC = A$ nennt, der körperliche Raum

$$DBC\delta\beta\gamma = \frac{a+a+b}{3} . A = \frac{2a+b}{3} . A$$

und eben so der körperliche Raum $ABD\alpha\beta\delta = \frac{2b+a}{3} . B$; demnach der körperliche Raum

$$ABCD\alpha\beta\gamma\delta = \frac{2a+b}{3} . A + \frac{2b+a}{3} . B$$
$$= (A+B)a + (A+2B)\tfrac{1}{3}\alpha$$
$$= (a+\tfrac{1}{3}\alpha)(A+B) + \tfrac{1}{3}B\alpha$$

wenn man der Kürze halber den Unterschied $b - a = \alpha$ nennt.

Diese Formeln sind unter andern bey Berechnung von **Festungswerken** sehr nützlich.

XIII. Ist nun noch überdem die Grundfläche ABCD ein Parallelogramm, mithin der Körper ein Parallelepipedum, durch welches der Schnitt auf die (XII) erwähnte Art geführt worden, so ist $A = B$, und der Raum $ABCD\alpha\beta\gamma\delta = (a+b)A = \frac{1}{2}(a+b)\,2A$ d. h. die Grundfläche $2A$ multiplicirt in die mittlere arithmetische Proportionale zwischen a und b.

§. 36.

§. 36.

Anmerkung.

Von der Berechnung schief abgeschnittener Prismen handelt auch Herr Prof. Rothe in dem Leipziger Archiv der reinen und angewandten Mathematik, VI. Heft. 1797. S. 195. Er zeigt, daß wenn H (Fig. 20) der Schwerpunkt der Grundfläche eines schief abgeschnittenen senkrechten Prisma ist, und man durch H ein Perpendikel auf die Grundfläche setzt, welches die Schnittfläche in dem Punkte h trifft, auch h der Schwerpunkt dieser Schnittfläche, und der körperliche Inhalt $ABCDE\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = ABCDE \cdot Hh$ oder dem Produkt aus der Grundfläche in dieses Perpendikel Hh gleich seyn werde.

Ich halte diese Vorschrift für keine besondere Erleichterung der Berechnung schief abgeschnittener Prismen, als nur in dem Falle, wenn die Grundfläche eine Figur ist, deren Schwerpunkt man ohne viel Rechnung aus einer leichten geometrischen Betrachtung ableiten kann, wie wenn z. B. die Grundfläche ein Dreyeck, ein Parallelogramm, oder eine reguläre Figur ist. Außerdem mögte es denn in der Ausübung auch nicht leicht seyn, die Höhe Hh, da sie innerhalb des Körpers fällt, zu messen, und sie durch Rechnung zu finden, mögte noch weitläuftiger seyn. Es ist also die Betrachtung

des

des Schwerpunkts bey der Bestimmung des körperlichen Raumes schief abgeschnittener Prismen mehr sinnreich als nützlich; daher ich diese Untersuchung hier nicht weiter ausführe, und sie meinen Lesern a. a. O. selbst nachzusehen überlasse.

§. 37.

Zusatz.

Andere Abschnitte von prismatischen Körpern zu berechnen, als die bisher erwähnten, mögte in der Ausübung eben nicht vorkommen, Indessen werden sich Vorschriften für andere Fälle nach einigem Nachdenken immer leicht aus dem bisherigen ableiten lassen. Ein Beyspiel giebt die 23ste Figur, wo der Schnitt $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ so durch das Prisma geführt ist, daß er nicht, wie bisher, durch alle Seitenflächen, sondern nur durch einige derselben und übrigens auch durch die obere Grundfläche geht, welche er in der Linie $\beta\gamma$ schneidet. Verlangte man also den körperlichen Inhalt zwischen der Grundfläche ABCDE und der Schnittfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, so gedenke man sich von den Punkten β, γ auf den Seitenflächen ABab, CDcd, die Linien $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ parallel mit den Seitenlinien des Prisma herabgezogen, so ist $\beta'\gamma' = \beta\gamma$ und der körperliche Raum $B\beta'C\gamma'b\beta c\gamma$ ein Prisma dessen Grundflächen $B\beta'C\gamma' = b\beta c\gamma$;

addirt

addirt man nun hiezu den körperlichen Raum zwischen der Grundfläche $A\beta'\gamma'DE$ und der Schnittfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, den man als einen schiefen Abschnitt eines Prisma über der Grundfläche $A\beta'\gamma'DE$ nach der bisherigen Vorschrift berechnen kann, nemlich

$$A\beta'\gamma'DE\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \frac{A\alpha + \beta'\beta + \gamma'\gamma}{3} \cdot \triangle A\beta'\gamma'$$

$$+ \frac{A\alpha + \gamma'\gamma + D\delta}{3} \cdot \triangle A\gamma' D$$

u. s. w.

so erhält man den ganzen Abschnitt des Prisma zwischen der Grundfläche ABCDE und dem Schnitte $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$. Zöge man diesen Abschnitt von dem körperlichen Raume des ganzen Prisma ab, so erhielte man den Abschnitt zwischen dem Theile $a\beta\gamma\delta e$ der Grundfläche $a b c d e$, und der Schnittfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ u. s. w.

Prismen deren Grundflächen durch krumme Linien von gegebenen Gleichungen begränzt werden.

§. 38.

I. Es sey (Fig. 24) kLBN eine beliebige krumme Linie, AB die Abscissenlinie, und A der Anfangspunkt der Abscissen, LC, lc zwey parallele auf der Abscissenlinie senkrecht

recht stehende Ordinaten, und der zwischen den Ordinaten LC, lc enthaltene Flächenraum LClc die Grundfläche eines Prisma, dessen Höhe = h, so ist der körperliche Inhalt des Prisma = dem Flächenraum LClc multiplicirt in die Höhe h.

II. Diesen Flächenraum zu finden sey y = PM eine beliebige Ordinate der krummen Linie, und die zugehörige Abscisse AP = x, so ist y.dx, oder das Produkt der Ordinate in das Differential der Abscisse, das Element oder Differential des Flächenraums LCPM. Nennt man also diesen Flächenraum = B, so hat man

$$dB = y\,dx$$ und

folglich durch Integration

$$B = \int y\,dx + \text{Const.}$$

wo denn die beständige Grösse Const dadurch bestimmt werden kann, daß für y = LC oder x = AC die Fläche B = o werden muß. Hat man nun diese Const. nach dieser Voraussetzung bestimmt, und setzt hierauf in das erhaltene Integral $\int y\,dx$, die Abscisse x = Ac, oder die Ordinate y = lc, so erhält man das Stück Fläche welches zwischen LC und lc enthalten ist, die sogenannte Quadratur von LClc.

Bey=

Beyspiele von verschiedenen Quadraturen.

§. 39.

Erstes Beyspiel. 1. Es sey (Fig. 25) die krumme Linie ALl eine Parabel, A der Scheitelpunkt, AB die Axe, b der Parameter, und die Ordinaten auf der Abscissenlinie senkrecht, so ist die Gleichung zwischen x und y

$$y^2 = bx$$

oder $y = \sqrt{bx}$; mithin

$$dB = dx\sqrt{bx} = dx.b^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}$$

und das Integral

$$B = \tfrac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{bx} + Const.$$

2. Verlangt man nun das parabolische Stück Fläche sogleich vom Scheitelpunkt A bis an die Ordinate LC, so hat man für $x = 0$ auch $B = 0$ demnach die beständige Grösse Const auch $= 0$, und schlechtweg

$$B = \tfrac{2}{3}x\sqrt{bx}$$

wo statt x die bestimmte Abscisse AC gesetzt werden muß.

3. Wegen $\sqrt{bx} = y$ wird auch $B = \tfrac{2}{3}xy$. Also ist das parabolische Stück Fläche ACL $= \tfrac{2}{3}$ des Rechtecks zwischen der Abscisse AC $= x$, und der Ordinate CL $= y$.

4. Ver-

4. Verlangte man aber das parabolische Stück Fläche zwischen den beyden Ordinaten LC, lc, so muß die Const des Integrals (1) so bestimmt werden, daß für x = AC die Fläche B = 0 wird, weil diese Fläche sich von der Ordinate LC anfangen soll. Man setze demnach in die Gleichung (1) B = 0, x = AC, so muß seyn

$$0 = \frac{2}{3} AC \sqrt{(b . AC)} + Const$$

also Const $= -\frac{2}{3} AC \sqrt{(b . AC)}$. Folglich die Fläche B oder LClc für jede beliebige Abscisse $x = \frac{2}{3} x \sqrt{bx} - \frac{2}{3} AC \sqrt{(b . AC)} = \frac{2}{3} xy - \frac{2}{3} AC . LC$. Setzt man also x = Ac; y = lc, so erhält man den bestimmten Flächenraum CLcl.

5. Wenn ein Prisma vorgegeben ist, dessen Grundfläche das parabolische Stück Fläche CLcl ist, so muß man dieses Stück Fläche aus den Grössen LC, lc, Cc, die man an demselben sogleich unmittelbar selbst messen kann, zu bestimmen suchen, weil hier der Scheitelpunkt A der Parabel nicht gegeben ist, von dem man die Abscissen Ac, AC, messen könnte. Dazu dient nun folgendes.

Erstlich ist für die Abscisse AC, und Ordinate LC, $LC^2 = b . AC$; oder $AC = \frac{LC^2}{b}$;

und eben so $Ac = \frac{lc^2}{b}$.

Demnach das Stück-Fläche LClc oder

$$B = \frac{2}{3} Ac \cdot lc - \frac{2}{3} AC \cdot LC$$
$$= \frac{2}{3} \frac{lc^3}{b} - \frac{2}{3} \frac{LC^3}{b}$$
$$= \frac{2}{3} \frac{lc^3 - LC^3}{b}$$

Um aber aus dieser Formel auch den Parameter b wegzuschaffen, und ihn durch gegebene Grössen auszudrücken, so hat man

$$LC^2 = b \cdot AC$$
$$lc^2 = b(AC + Cc)$$

Demnach $lc^2 - LC^2 = b \cdot Cc$ und

$$b = \frac{lc^2 - LC^2}{Cc}$$

Mithin $B = \frac{2}{3} \frac{lc^3 - LC^3}{lc^2 - LC^2} \cdot Cc$

welcher Ausdruck diese Fläche durch lauter Grössen darstellt, welche sich an derselben unmittelbar messen lassen.

6. Verlängert man die Ordinaten LC, lc, unterhalb der Abscissenlinie, so ist $CN = CL$; $cn = lc$ und der Flächenraum $LANL = 2 \cdot LACL = \frac{4}{3} AC \cdot CL$; ferner der Flächenraum $LNln = 2 \cdot CLcl = \frac{4}{3} \frac{lc^3 - LC^3}{lc^2 - LC^2} \cdot Cc$.

Man

Man nenne also $LN = m$, $ln = n$, $Cc = e$; also $LC = \frac{1}{2}m$, $lc = \frac{1}{2}n$, so wird das parabolische Stück Fläche $LNln = \frac{2}{3}\,\frac{n^3 - m^3}{n^2 - m^2}\,.\,e$ und folglich ein Prisma von der Höhe h über dieser Grundfläche $= \frac{2}{3}\,\frac{n^3 - m^3}{n^2 - m^2}\,e\,.\,h$.

§. 40.

Zweytes Beyspiel. 1. Die krumme Linie sey eine Ellipse (Fig. 26) deren große Axe $AB = a$; kleine $EF = c$. Der Anfangspunkt der Abscissen in A, und die Ordinaten y auf den Abscissen senkrecht, so ist die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{c^2}{a}x - \frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$$

2. Demnach

$$dB = y\,dx = \frac{c}{a}\,dx\sqrt{(ax - x^2)}$$

wovon das Integral (nach Integralf. §. XVI. 2).

$$B = -\frac{(a - 2x)c}{4a}\sqrt{(ax - x^2)} + \frac{ac}{8}\,\mathfrak{B}\sin\frac{2\sqrt{(ax - x^2)}}{a} + \text{Const}$$

 oder

oder auch

$$B = -\frac{a-2x}{4}.y + \frac{ac}{8}\mathfrak{B}\sin\frac{2y}{c} + Const$$

ist, wegen $\surd(ax - x^2) = \frac{ay}{c}$.

3. Verlangt man nun erstlich das Stück Fläche ACL von A bis an eine beliebige Ordinate CL = y, so muß dieß Integral so bestimmt werden, daß es für x = 0 verschwindet. Dieß giebt demnach für diesen Fall die beständige Grösse Const selbst = 0, und also schlechtweg

$$B = -\frac{a-2x}{4}y + \tfrac{1}{8}ac\mathfrak{B}\sin\frac{2y}{c}$$

wo statt x die Abscisse AC und statt y die Ordinate CL gesetzt werden muß.

4. Weil aus der Gleichung (1) auch

$$x^2 - ax = -\frac{a^2}{c^2}y^2$$

so wird durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung auch

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \surd(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}y^2$$

$$= \tfrac{1}{2}a \pm \frac{a}{c}\surd(\tfrac{1}{4}c^2 - y^2)$$

Also $\frac{a-2x}{4} = \pm\frac{a}{2c}\surd(\tfrac{1}{4}c^2 - y^2)$

Folg-

Folglich auch

$$B = \pm \frac{ay}{2c} \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - y^2)} + \tfrac{1}{8} ac . \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c}$$

diese Fläche bloß durch die Ordinate y ausgedrückt, wobey denn das obere Zeichen zu nehmen ist, so bald $2x > a$ also $a - 2x$ (3) negativ wird.

5. Um die (2) gefundene Formel zur würklichen Berechnung in Zahlen bequemer einzurichten, so suche man einen Winkel oder Bogen ψ dessen Cosinus $= \frac{a - 2x}{a}$, so daß $\cos \psi = \frac{a - 2x}{a}$; dann wird $\sin \psi = \frac{2\sqrt{(ax - x^2)}}{a}$ und folglich $\psi = \mathfrak{B} \sin \frac{2\sqrt{(ax - x^2)}}{a}$; diese Werthe in die obige Formel (2) substituirt geben

$$B = -\tfrac{1}{8} ac \sin \psi \cos \psi + \tfrac{1}{8} ac \psi$$

oder wegen $\sin \psi \cos \psi = \tfrac{1}{2} \sin 2\psi$

$$B = \tfrac{1}{16} ac (2\psi - \sin 2\psi)$$

6. Verlangte man die Fläche des elliptischen Quadranten ANE, so ist für denselben $x = \frac{1}{2} a$, also $\cos \psi = 0$ oder $\psi = 90^0$ d. h. in Decimaltheilen des Halbmessers $\psi = \frac{1}{2} \pi$; ferner $\sin 2\psi = \sin 180^0 = 0$; folglich die Fläche des Quadranten $= \frac{1}{16} ac\pi$.

Mithin die Fläche der ganzen Ellipse $= \frac{1}{4} ac.\pi =$ der Fläche eines Kreises dessen Durchmesser $d = \sqrt{ac} =$ der mittlern geometrischen Proportionallinie zwischen der kleinen und großen Axe der Ellipse seyn würde.

7. Ist ψ in Graden 2c. gegeben, so muß man den Bogen 2ψ allemahl in Decimaltheilen des Halbmessers ausdrücken wie (§. 31. III.) Durch ein Zahlen-Beyspiel die Formel (5) zu erläutern wird kaum nöthig seyn, da eine ähnliche Rechnung schon bey Kreisabschnitten (§. 31. VII.) vorgekommen ist.

8. Ist $2x > a$, so wird $\cos\psi$ negativ, also ψ größer als 90^0, folglich $2\psi > 180^0$, und $\sin 2\psi$ negativ. In diesem Falle wird also der subtractive Theil in der Formel zu einem additiven.

9. Wenn ein Prisma vorgegeben ist, dessen Grundfläche das elliptische Stück Fläche ACL ist, so muß man die beyden Axen der Ellipse entweder als bekannt voraus setzen, oder sie doch aus gewissen Abmessungen, die man an dem Stücke ACL macht, berechnen können, wenn sich der Quadratinhalt von ACL nach der Formel (4) soll bestimmen lassen.

10. Um diese Axen der Ellipse durch Rechnung zu finden, müssen außer der Abscisse $AC = x$, und Ordinate $LC = y$, noch für einen andern Punkt H die Abscisse $AG = X$

und

und Ordinate GH = Y gemessen werden; so hat man erstlich aus (1)

$a^2 y^2 = c^2 (a-x) x$ und

eben so $a^2 Y^2 = c^2 (a-X) X$

demnach $c^2 = \frac{a^2 y^2}{ax - x^2} = \frac{a^2 Y^2}{aX - X^2}$

folglich $\frac{y^2}{ax-x^2} = \frac{Y^2}{aX-X^2}$ woraus

$$a = \frac{Y^2 x^2 - y^2 X^2}{Y^2 x - y^2 X}$$

11. Ist nun diese große Axe a gefunden, so erhält man die kleine $c = \frac{ay}{\sqrt{(ax - x^2)}}$. und man kann nun nach (4) den Quadratinhalt des elliptischen Flächenstücks ACL, und folglich auch des ganzen Segments LAL = 2ACL finden, wenn dieses als Grundfläche eines Prisma vorgegeben wäre.

12. In der Ausübung ist es wohl am besten, die Ordinate GH für eine Abscisse $AG = \frac{1}{2} AC$ zu messen; dieß gäbe $X = \frac{1}{2} x$ und folglich

$$a = \frac{Y^2 x^2 - \frac{1}{4} y^2 x^2}{Y^2 x - \frac{1}{2} y^2 x} = \frac{Y^2 - \frac{1}{4} y^2}{Y^2 - \frac{1}{2} y^2} . x$$

oder auch $a = \frac{4Y^2 - y^2}{2Y^2 - y^2} . \frac{1}{2} x$

welches die Rechnung etwas abkürzt.

13. Aus dem bisherigen leitet man nun auch leicht den **Flächeninhalt** eines **zwischen zwey Ordinaten** LC, lc **enthaltenen elliptischen Segments** ab, wenn für dasselbe die Abscissen AC, Ac, und Ordinaten LC, lc gegeben sind. Denn aus AC und CL findet sich erstlich das Segment ACL, und dann aus Ac, cl das Segment Acl, und daraus CLcl=Acl—ACL.

14. Wollte man die Fläche LClc bloß durch Grössen ausdrücken, die sich an ihr selbst unmittelbar messen lassen, und daraus unter andern auch erst die große und kleine Axe berechnen, welche man zur Berechnung der Segmente (13) nöthig hat, so würde dieß auf einen sehr zusammengesetzten Ausdruck führen, welcher für die Ausübung von keinem großen Nutzen seyn würde. Da es nun in dieser auf Kleinigkeiten nicht ankömmt, so kann man sich begnügen, einen Flächenraum wie CLcl bloß durch Näherung zu finden, und da ist es denn, im Fall der Bogen Ll nicht groß ist, hinreichend den Raum CLcl bloß als ein Trapezium zu berechnen, und folglich den Inhalt $=\frac{CL+cl}{2}.Cc$ zu setzen. Oder man messe auch eine Ordinate $\gamma\lambda$, welche zwischen beyden LC, lc in die Mitte fällt, so wird der Flächenraum LCcl auch beynahe $=\gamma\lambda.Cc$ seyn.

15. Ist aber der Bogen Ll so groß, daß man ihn nicht ohne merklichen Fehler für eine gerade Linie nehmen kann, so theile man (Fig. 27) den Abstand Cc der beyden Ordinaten LC, lc, in so viel kleine gleiche Theile $C\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta$ ꝛc. daß die Ordinaten y, y', y'', y''' ꝛc. durch C, α, β, γ ꝛc. die krumme Linie in Bögen abtheilen, die man ohne merklichen Fehler für gerade Stücken halten darf.

Man messe nun die Ordinaten $y, y' y'', y'''$ ꝛc. und setze Cc = c sey (am besten durch fortgesetzte Halbirung) in 2 m gleiche Theile getheilet, die letzte Ordinate cl heiße y^{2M}; also die vorletzte y^{2M-1} u. s. w. so ist der Inhalt des ersten Trapezii über $C\alpha = \left(\frac{y+y'}{2}\right)\frac{c}{2m}$

$= (y+y')\frac{c}{4m}$; und so des zweyten $=$

$(y'+y'')\frac{c}{4m}$ des dritten $= (y''+y''')$

$\frac{c}{4m}$ ꝛc. des 2mten $= (y^{2M-1}+y^{2M})\frac{c}{4m}$

demnach die Summe aller d. h. der Flächenraum

$$CLcl = (y + 2y' + 2y'' + 2y''' \ldots + 2y^{M-1} + y^{2M})\frac{c}{4m}$$

$$= \left(\frac{y+y^{2M}}{2} + y' + y'' + y''' \ldots + y^{2M-1}\right)\frac{c}{2m}$$

d. h. zur halben Summe der ersten und letzten

Ordinate addire man die Summe aller übrigen, und multiplicire das ganze in den Abstand c dividirt durch die Anzahl der Theile in die man den Abstand c getheilt hat.

16. Ist ℒF der unterhalb der Abscissen-Linie Cc fallende elliptische Bogen, so ist das Stück Fläche CcℒF = CLcl, daher man den (15) gefundenen Raum nur dupliren darf, um das elliptische Segment ℒLFl zu finden, wenn dieses als Grundfläche eines Prisma gegeben wäre.

17. Es sey LD (Fig. 26) parallel mit CN, so hat man ein Segment LDE durch einen Schnitt parallel mit der großen Axe der Ellipse. Der Flächen-Inhalt desselben ist = dem Inhalte des elliptischen Quadranten ANE — dem Segment ACL — dem Parallelogramm CNLD. Nun sind aber der elliptische Quadrant und das Segment ACL aus (5—6) bekannt, und der Inhalt des Parallelogramms CNLD ist = CN . CL =

$$(AN - AC)\, CL = (\tfrac{1}{2} a - x)\, y = \frac{(a - 2x)\, y}{2}$$

also Segm. $LDE = \frac{1}{16} a c \pi + \frac{(a - 2x)\, y}{4}$

$$- \tfrac{1}{8} a c\, \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} - \frac{(a - 2x)\, y}{2} = \tfrac{1}{16} a c \pi$$

$- \tfrac{1}{8} a c$

$$-\tfrac{1}{8} a c \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} - \frac{\pi(a - 2x)}{4} \cdot y = \tfrac{1}{16} a c \pi,$$

$$-\tfrac{1}{8} a c \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} + \pi \frac{\tfrac{1}{2} a - x}{2} \cdot y.$$

Nun ist aber $\frac{1}{16} a c \pi = \frac{1}{8} a c \cdot \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{8} a c \mathfrak{B} \sin 1$ und $\mathfrak{B} \sin 1 - \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} = \mathfrak{B} \sin \sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{c^2}\right)} = \mathfrak{B} \cos \frac{2y}{c}$. Ferner $y = LC = ND = \frac{1}{2} c - ED = \frac{1}{2} c - w$, wenn $ED = w$ gesetzt wird, also $\mathfrak{B} \cos \frac{2y}{c} = \mathfrak{B} \cos \frac{c - 2w}{c}$.

Ferner $\frac{1}{2} a - x = AN - AC = CN = LD$, welches $LD = u$ genannt werde.

Substituirt man also die gefundenen Werthe, so wird

$$\text{Segm. } EDL = \tfrac{1}{2} a c \mathfrak{B} \cos \frac{c - 2w}{c} - \tfrac{1}{2} u \frac{c - 2w}{2}$$

wovon das doppelte ein Segment wie LEIL geben würde. Diese Formel ist der (3) ganz ähnlich, und kann wegen $u = \frac{a}{c} \sqrt{(cw - w^2)}$ auch wie (5) ausgedrückt werden, wenn man jetzt $\frac{c - 2w}{c} = \cos \psi$ setzt.

18.

18. Elliptische Ausschnitte, wie ANL oder LNE zu berechnen, addirt man zu den Abschnitten ACL oder LDE nur die Dreyecke LCN oder LND. Nun ist aber z. B.

$\triangle LCN = \frac{1}{2}y . CN = (\frac{1}{2}a - x)\frac{1}{2}y = \frac{(a-2x)}{4}y$.

Dieß zu dem Abschnitt ACL = B (3) addirt giebt den Ausschnitt $ANL = \frac{1}{8}ac . \mathfrak{B}\sin\frac{2y}{c}$

$= \frac{1}{8}ac . \mathfrak{B}\cos\frac{a-2x}{a}$ (5) und eben so den Ausschnitt $LNE = \frac{1}{8}ac . \mathfrak{B}\cos\frac{c-2w}{c}$.

19. Andere Stücken von elliptischen Flächen z. B. schiefe Abschnitte wie TBV zu berechnen u. d. gl. mögte in der Ausübung eben nicht vorkommen. Auch würden die Formeln dazu, für den Gebrauch zu zusammengesetzt ausfallen. Daher man sich begnügen kann, den Inhalt solcher Segmente etwa nach einem Verfahren wie (15) nur durch eine Näherung zu finden; wo man denn z. B. TV in gleiche Theile theilen, und durch diese Theilpunkte senkrechte Ordinaten y, y', y'' ꝛc. für die krumme Linie TBV ziehen und messen könnte; die Ordinaten für die Punkte T und V, also y und y^{2M} würden dann in dem Ausdrucke (15) = 0 zu setzen seyn.

§. 41.

§. 41.

Drittes Beyspiel. Hyperbolische Segmente zu berechnen.

1. Es sey (Fig. 25) LAN ein hyperbolischer Bogen, AB die Abscissenlinie durch den Scheitelpunkt A des hyperbolischen Bogens, so ist die Gleichung der krummen Linie zwischen AC = x und LC = y

$$y^2 = \frac{c^2}{a} x + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

wenn a die grosse Axe der Hyperbel und c die kleine Axe bedeutet.

2. Demnach wie bey der Ellipse (§. 40. 2.)

$$B = \frac{c}{a} \int dx \sqrt{(ax + x^2)}$$

und folglich integrirt (Integralf. §. XIII. 1.)

$$B = \frac{(2x + a) c}{4a} \sqrt{(ax + x^2)}$$

$$- \frac{ac}{8} \log \frac{2x + a + 2\sqrt{(ax + x^2)}}{a}$$

oder auch

$$B = \frac{2x + a}{4} y - \frac{ac}{8} \log \frac{2(cx + ay) + ac}{ac}$$
$$+ \text{Const.}$$

wo die Const sogleich selbst = o wird, wenn für x = o auch B = o werden soll, und man

also

oder auch

$$B = -\frac{a-2x}{4}\cdot y + \frac{ac}{8}\,\mathfrak{B}\sin\frac{2y}{c} + Const$$

ist, wegen $\sqrt{(ax - x^2)} = \frac{ay}{c}$.

3. Verlangt man nun erstlich das Stück Fläche ACL von A bis an eine beliebige Ordinate CL = y, so muß dieß Integral so bestimmt werden, daß es für x = 0 verschwindet. Dieß giebt demnach für diesen Fall die beständige Grösse Const selbst = 0, und also schlechtweg

$$B = -\frac{a-2x}{4}\,y + \tfrac{1}{8}ac\,\mathfrak{B}\sin\frac{2y}{c}$$

wo statt x die Abscisse AC und statt y die Ordinate CL gesetzt werden muß.

4. Weil aus der Gleichung (1) auch

$$x^2 - ax = -\frac{a^2}{c^2}y^2,$$

so wird durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung auch

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}y^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a \pm \frac{a}{c}\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - y^2)}$$

Also $\frac{a-2x}{4} = \pm\frac{a}{2c}\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - y^2)}$

Folg-

Folglich wäre:

$B = $ [illegible]

diese [illegible] die [illegible] ausge- drückt, [illegible] Zeichen zu neh- men ist, so wird $x = \frac{1}{2}a$ oder $a - 2x$ [illegible] ganz [illegible]

5. Um die (1) gefundene Formel zur wirk- lichen Berechnung in Zahlen bequemer einzu- richten, so nehme man einen Winkel oder Bogen ϕ dessen Cosinus $= \frac{a-2x}{a}$, so daß $\cos\phi = \frac{a-2x}{a}$; dann wird $\sin\phi = \frac{2\sqrt{(ax-x^2)}}{a}$ und folglich $\phi = B \sin \frac{2\sqrt{(ax-x^2)}}{a}$; diese Werthe in die obige Formel (3) substituirt geben

$$B = -\tfrac{1}{8}ac \sin\phi \cos\phi + \tfrac{1}{8}ac\phi$$

oder wegen $\sin\phi \cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$

$$B = \tfrac{1}{16}ac(2\phi - \sin 2\phi)$$

6. Verlangte man die Fläche des el- liptischen Quadranten ANE, so ist für denselben $x = \frac{1}{2}a$, also $\cos\phi = 0$ oder $\phi = 90^0$ d. h. in Decimaltheilen des Halb- messers $\phi = \frac{1}{2}\pi$; ferner $\sin 2\phi = \sin 180^0 = 0$; folglich die Fläche des Quadranten $= \frac{1}{16}ac\pi$.

Mithin die Fläche der ganzen Ellipse $= \frac{1}{4} a c . \pi =$ der Fläche eines Kreises dessen Durchmesser $d = \sqrt{ac} =$ der mittlern geometrischen Proportionallinie zwischen der kleinen und großen Axe der Ellipse seyn würde.

7. Ist ψ in Graden rc. gegeben, so muß man den Bogen 2ψ allemahl in Decimaltheilen des Halbmessers ausdrücken wie (§. 31. III.) Durch ein Zahlen-Beyspiel die Formel (5) zu erläutern wird kaum nöthig seyn, da eine ähnliche Rechnung schon bey Kreisabschnitten (§. 31. VII.) vorgekommen ist.

8. Ist $2x > a$, so wird $\cos\psi$ negativ, also ψ größer als 90^0, folglich $2\psi > 180^0$, und $\sin 2\psi$ negativ. In diesem Falle wird also der subtractive Theil in der Formel zu einem additiven.

9. Wenn ein Prisma vorgegeben ist, dessen Grundfläche das elliptische Stück Fläche ACL ist, so muß man die beyden Axen der Ellipse entweder als bekannt voraus setzen, oder sie doch aus gewissen Abmessungen, die man an dem Stücke ACL macht, berechnen können, wenn sich der Quadratinhalt von ACL nach der Formel (4) soll bestimmen lassen.

10. Um diese Axen der Ellipse durch Rechnung zu finden, müssen außer der Abscisse $AC = x$, und Ordinate $LC = y$, noch für einen andern Punkt H die Abscisse $AG = X$ und

und Ordinate GH $= Y$ gemessen werden; so hat man erstlich aus (1)

$a^2 y^2 = c^2 (a - x) x$ und

eben so $a^2 Y^2 = c^2 (a - X) X$

demnach $c^2 = \frac{a^2 y^2}{a x - x^2} = \frac{a^2 Y^2}{a X - X^2}$

folglich $\frac{y^2}{ax - x^2} = \frac{Y^2}{aX - X^2}$ woraus

$$a = \frac{Y^2 x^2 - y^2 X^2}{Y^2 x - y^2 X}$$

11. Ist nun diese große Axe a gefunden, so erhält man die kleine $c = \frac{a y}{\sqrt{(a x - x^2)}}$.

und man kann nun nach (4) den Quadratinhalt des elliptischen Flächenstücks ACL, und folglich auch des ganzen Segments $LAL = 2 ACL$ finden, wenn dieses als Grundfläche eines Prisma vorgegeben wäre.

12. In der Ausübung ist es wohl am besten, die Ordinate GH für eine Abscisse $AG = \frac{1}{2} AC$ zu messen; dieß gäbe $X = \frac{1}{2} x$ und folglich

$$a = \frac{Y^2 x^2 - \frac{1}{4} y^2 x^2}{Y^2 x - \frac{1}{2} y^2 x} = \frac{Y^2 - \frac{1}{4} y^2}{Y^2 - \frac{1}{2} y^2} . x$$

oder auch $a = \frac{4 Y^2 - y^2}{2 Y^2 - y^2} . \frac{1}{2} x$

welches die Rechnung etwas abkürzt.

 13.

13. Aus dem bisherigen leitet man nun auch leicht den Flächeninhalt eines zwischen zwey Ordinaten LC, lc enthaltenen elliptischen Segments ab, wenn für dasselbe die Abscissen AC, Ac, und Ordinaten LC, lc gegeben sind. Denn aus AC und CL findet sich erstlich das Segment ACL, und dann aus Ac, cl das Segment Acl, und daraus CLcl = Acl — ACL.

14. Wollte man die Fläche LClc bloß durch Grössen ausdrücken, die sich an ihr selbst unmittelbar messen lassen, und daraus unter andern auch erst die große und kleine Axe berechnen, welche man zur Berechnung der Segmente (13) nöthig hat, so würde dieß auf einen sehr zusammengesetzten Ausdruck führen, welcher für die Ausübung von keinem grossen Nutzen seyn würde. Da es nun in dieser auf Kleinigkeiten nicht ankömmt, so kann man sich begnügen, einen Flächenraum wie CLcl bloß durch Näherung zu finden, und da ist es denn, im Fall der Bogen Ll nicht groß ist, hinreichend den Raum CLcl bloß als ein Trapezium zu berechnen, und folglich den Inhalt $= \frac{CL + cl}{2} . Cc$ zu setzen. Oder man messe auch eine Ordinate $\gamma\lambda$, welche zwischen beyden LC, lc in die Mitte fällt, so wird der Flächenraum LCcl auch beynahe $= \gamma\lambda . Cc$ seyn.

15.

15. Ist aber der Bogen Ll so groß, daß man ihn nicht ohne merklichen Fehler für eine gerade Linie nehmen kann, so theile man (Fig. 27) den Abstand Cc der beyden Ordinaten LC, lc, in so viel kleine gleiche Theile $C\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta$ rc. daß die Ordinaten y, y', y'', y''' rc. durch C, α, β, γ rc. die krumme Linie in Bögen abtheilen, die man ohne merklichen Fehler für gerade Stücken halten darf.

Man messe nun die Ordinaten y, y', y'', y''' rc. und setze $Cc = c$ sey (am besten durch fortgesetzte Halbirung) in $2m$ gleiche Theile getheilet, die letzte Ordinate cl heiße y^{2M}; also die vorletzte y^{2M-1} u. s. w. so ist der Inhalt des ersten Trapezii über $C\alpha = \left(\frac{y+y'}{2}\right) \frac{c}{2m}$ $= (y+y') \frac{c}{4m}$; und so des zweyten $= (y'+y'') \frac{c}{4m}$ des dritten $= (y''+y''') \frac{c}{4m}$ rc. des 2mten $= (y^{2M-1} + y^{2M}) \frac{c}{4m}$ demnach die Summe aller d. h. der Flächenraum

$$CLcl = (y + 2y' + 2y'' + 2y''' .. + 2y^{M-1} + y^{2M}) \frac{c}{4m}$$

$$= \left(\frac{y+y^{2M}}{2} + y' + y'' + y''' .. + y^{2M-1}\right) \frac{c}{2m}$$

d. h. zur halben Summe der ersten und letzten Ordi-

Ordinate addire man die Summe aller übrigen, und multiplicire das ganze in den Abstand c dividirt durch die Anzahl der Theile in die man den Abstand c getheilt hat.

16. Ist ℓF der unterhalb der Abscissen-Linie Cc fallende elliptische Bogen, so ist das Stück Fläche CcℓF = CLcl, daher man den (15) gefundenen Raum nur dupliren darf, um das elliptische Segment ℓLFl zu finden, wenn dieses als Grundfläche eines Prisma gegeben wäre.

17. Es sey LD (Fig. 26) parallel mit CN, so hat man ein Segment LDE durch einen Schnitt parallel mit der großen Axe der Ellipse. Der Flächen-Inhalt desselben ist = dem Inhalte des elliptischen Quadranten ANE — dem Segment ACL — dem Parallelogramm CNLD. Nun sind aber der elliptische Quadrant und das Segment ACL aus (5—6) bekannt, und der Inhalt des Parallelogramms CNLD ist $= CN . CL =$

$$(AN - AC)\, CL = (\tfrac{1}{2} a - x)\, y = \frac{(a - 2x)\, y}{2}$$

also Segm. $LDE = \frac{1}{16} a c \pi + \frac{(a - 2x)\, y}{4}$

$$- \tfrac{1}{8} a c \,\mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} - \frac{(a - 2x)\, y}{2} = \tfrac{1}{16} a c \pi$$

$- \frac{1}{8} a c$

$$-\frac{1}{8} a c \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} - \frac{(a - 2x)}{4} . y = \frac{1}{16} a c \pi,$$

$$-\frac{1}{8} a c \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} + \frac{\frac{1}{2}a - x}{2} . y.$$

Nun ist aber $\frac{1}{16} a c \pi = \frac{1}{8} a c . \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{8} a c \mathfrak{B} \sin 1$ und $\mathfrak{B} \sin 1 - \mathfrak{B} \sin \frac{2y}{c} = \mathfrak{B} \sin \sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{c^2}\right)} = \mathfrak{B} \cos \frac{2y}{c}$. Ferner $y = LG = ND = \frac{1}{2} c - ED = \frac{1}{2} c - w$, wenn $ED = w$ gesetzt wird, also $\mathfrak{B} \cos \frac{2y}{c} = \mathfrak{B} \cos \frac{c - 2w}{c}$.

Ferner $\frac{1}{2} a - x = AN - AC = CN = LD$, welches $LD = u$ genannt werde.

Substituirt man also die gefundenen Werthe, so wird

$$\text{Segm. } EDL = \frac{1}{2} a c \mathfrak{B} \cos \frac{c - 2w}{c} - \frac{1}{2} u \frac{c - 2w}{2}$$

wovon das doppelte ein Segment wie LEIL geben würde. Diese Formel ist der (3) ganz ähnlich, und kann wegen $u = \frac{a}{c} \sqrt{(cw - w^2)}$ auch wie (5) ausgedrückt werden, wenn man jetzt $\frac{c - 2w}{c} = \cos \psi$ setzt.

18. Elliptische Ausschnitte, wie ANL oder LNE zu berechnen, addirt man zu den Abschnitten ACL oder LDE nur die Dreyecke LCN oder LND. Nun ist aber z. B. $\Delta LCN = \frac{1}{2}y . CN = (\frac{1}{2}a - x)\frac{1}{2}y = \frac{(a-2x)}{4}y$.

Dieß zu dem Abschnitt ACL = B (3) addirt giebt den Ausschnitt $ANL = \frac{1}{8}ac.\mathfrak{B}\sin\frac{2y}{c}$ $= \frac{1}{8}ac.\mathfrak{B}\cos\frac{a-2x}{a}$ (5) und eben so den Ausschnitt $LNE = \frac{1}{8}ac.\mathfrak{B}\cos\frac{c-2w}{c}$.

19. Andere Stücken von elliptischen Flächen z. B. schiefe Abschnitte wie TBV zu berechnen u. d. gl. mögte in der Ausübung eben nicht vorkommen. Auch würden die Formeln dazu, für den Gebrauch zu zusammengesetzt ausfallen. Daher man sich begnügen kann, den Inhalt solcher Segmente etwa nach einem Verfahren wie (15) nur durch eine Näherung zu finden; wo man denn z. B. TV in gleiche Theile theilen, und durch diese Theilpunkte senkrechte Ordinaten y, y', y'' ꝛc. für die krumme Linie TBV ziehen und messen könnte; die Ordinaten für die Punkte T und V, also y und y^{2m} würden dann in dem Ausdrucke (15) $=0$ zu setzen seyn.

§. 41.

§. 41.

Drittes Beyspiel. Hyperbolische Segmente zu berechnen.

1. Es sey (Fig. 25) LAN ein hyperbolischer Bogen, AB die Abscissenlinie durch den Scheitelpunkt A des hyperbolischen Bogens, so ist die Gleichung der krummen Linie zwischen AC = x und LC = y

$$y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

wenn a die große Axe der Hyperbel und c die kleine Axe bedeutet.

2. Demnach wie bey der Ellipse (§. 40. 2.)

$$B = \frac{c}{a}\int dx\sqrt{(ax+x^2)}$$

und folglich integrirt (Integralf. §. XIII. 1.)

$$B = \frac{(2x+a)c}{4a}\sqrt{(ax+x^2)}$$

$$-\frac{ac}{8}\log\frac{2x+a+2\sqrt{(ax+x^2)}}{a}$$

oder auch

$$B = \frac{2x+a}{4}y - \frac{ac}{8}\log\frac{2(cx+ay)+ac}{ac}$$
$$+\text{Const.}$$

wo die Const sogleich selbst = o wird, wenn für x = o auch B = o werden soll, und man

also

das hyperbolische Stück Fläche ACL, vom Punct A bis an eine beliebige Ordinate verlangt.

3. Für ein hyperbolisches Stück Fläche zwischen zwey Ordinaten CL, cl, verfährt man wie bey der Ellipse (13 — 16) gezeigt worden ist.

4. Für ganze Abschnitte wie LAN, oder LNln duplirt man nur die Werthe für ACL (2) oder CLcl (3).

5. Den hyperbolischen Flächenraum zwischen einem Bogen AL und seiner Sehne zu finden, ziehet man von dem Inhalte des hyperbolischen Raumes ACL (2) den Inhalt des Triangels ACL $= \frac{1}{2} x . y$ ab, so wird der Flächenraum zwischen Bogen und

$$\text{Sehne} = \frac{1}{4} a y - \frac{1}{8} ac \log \frac{2 (cx + ay) + ac}{ac}$$

6. Sind a und c nicht bekannt, oder müßte man sie erst aus gewissen gemessenen Stücken auf eine mühsame Art berechnen, so findet man den Inhalt eines jeden hyperbolischen Segments am bequemsten nach dem oben (19) bey der Ellipse gezeigten Verfahren.

§. 42.

Anmerkung.

1. Mehrere Beyspiele von der Quadratur krummer Linien hier beyzubringen halte ich für über-

überflüssig, da man aus den angeführten hinlänglich den Gebrauch der allgemeinen Formel $B = \int y\,dx$ für krumme Linien deren Gleichung gegeben ist, und die also dadurch selbst bestimmt sind, ersehen wird. Man drückt nemlich aus der zwischen y und x gegebenen Gleichung allemahl y durch x aus, und integrirt alsdann den Ausdruck $y\,dx$, so erhält man mit Zuziehung der constanten Grösse, für jede Abscisse x den entsprechenden Flächenraum.

2. Unterweilen ist es aber auch bequemer x durch y auszudrücken; in diesem Falle erhält man denn durch die Differenziation den Werth von dx ausgedrückt durch y und dy, und so wird alsdann durch Integration die Fläche B nicht durch x sondern durch y gefunden werden. Dieß Verfahren muß man anwenden, wenn die Gleichung zwischen y und x so beschaffen ist, daß man x leichter durch y, als umgekehrt y durch x finden würde, wie wenn z. B. $y^3 + ay^2 = b^2 x + c^3$ die Gleichung für die krumme Linie wäre, wo man, um y durch x auszudrücken, eine Gleichung vom dritten Grade auflösen müßte, x hingegen leicht durch y ausgedrückt ist.

Hier würde man also das Integral $\int y\,dx$ ohne Mühe auf folgende Art durch y ausgedrückt erhalten.

Weil

Weil $x = \frac{y^3 + a y^2 - c^3}{b^2}$; so ist

$$dx = \left(\frac{3y^2}{b^2} + \frac{2ay}{b^2}\right) dy$$

Also $y dx = \frac{3y^3}{b^2} dy + \frac{2ay^2}{b^2} dy$

$$\int y dx = \frac{3y^4}{4b^2} + \frac{2ay^3}{3b^2} + \text{Const}$$

und so in andern Fällen.

§. 43.

Anmerkung.

Unterweilen ist es bey der Quadratur krummer Linien bequem, diese nicht durch Gleichungen zwischen rechtwinklichten Coordinaten, sondern zwischen Ordinaten die aus einem und demselben Punkte ausgehen und einen veränderlichen Winkel zwischen sich fassen, auszudrücken.

2. Es sey (Fig. 28) ALl eine beliebige krumme Linie, und AB eine gerade Linie, welche die krumme in A schneide. C ein beliebiger Punkt in AB, dessen Abstand von A d. h. AC durch f ausgedrückt werde, so erhellet, daß auch ein jeder anderer Punkt L der krummen Linie bestimmt seyn wird, wenn man für ihn den

Winkel

Winkel ACL = φ und die Distanz CL = u angiebt.

3. So sind also u und φ veränderliche Grössen, welche für jeden andern Punkt L andere Werthe haben. Solche veränderliche Linien wie u, welche aus einem und demselben Punkte C ausgehen, nennt man Ordinaten aus einem Punkte.

4. Eine solche Fläche wie ACL zu berechnen, muß man das Differential derselben durch u und φ bestimmen.

5. Es sey demnach λ ein Punkt unendlich nahe bey L, so ist, wenn man $C\lambda$ ziehet, $LC\lambda$ das Element der Fläche ACL, und $LC\lambda$ nähert sich unendlich einem Dreyecke, dessen Grundlinie $C\lambda = u + du$, und Höhe das von L auf $C\lambda$ gefällte Perpendikel $Lq = CL \sin LCq$ ist.

6. Nennt man also die Fläche ACL = B, so ist $dB = (u + du)\, u \sin LCq$.

Nun ist aber der Winkel $LC\lambda$ = dem Differentiale des Winkels ACL oder φ, also = $d\varphi$ und sin LCq nähert sich ohne Ende dem Werthe von $d\varphi$, wenn man den Bogen φ, welcher des Winkels ACL Maaß seyn würde, in Decimaltheilen des Halbmessers ausdrückt, und nun $d\varphi$ in eben solchen Decimaltheilen versteht. Demnach

$$dB = (u + du)\, u\, d\varphi$$

oder

oder weil du in Vergleichung mit u verschwindet, schlechtweg

$$dB = u^2\, d\varphi$$

$$\text{und } B = \int u^2\, d\varphi + \text{Const.}$$

Ist also eine Gleichung zwischen u und φ gegeben, so kann man durch Integrirung des Differentials $u^2\, d\varphi$, den Raum B entweder durch u oder durch φ ausdrücken, wobey denn die Const so bestimmt wird, daß für $\varphi = 0$, oder $u = AC = f$ der Flächenraum B selbst $= 0$ wird.

§. 44.

Anmerkung.

I. Wenn man das bey der Ellipse angegebene Verfahren (§. 40. 15.) den Quadratinhalt eines durch eine krumme Linie begränzten Flächenraums zu finden, genau erörtert, so wird man leicht bemerken, daß es auf alle krumme Linien anwendbar ist, und daß demnach die Grundfläche eines Prisma dadurch allgemein durch eine Näherung bestimmt werden kann, die Grundfläche mag durch welche krumme Linie man will, ganz oder zum Theil, begränzt seyn. Ist demnach z.B. ABCD (Fig. 29) die Grundfläche eines Prisma, so gedenke man sich durch ein paar Punkte wie A, C, parallel mit einander, gerade Linien AQ, CR gezogen, so daß die Grundfläche ganz zwischen diesen Linien enthalten

halten ist, und QR sey der senkrechte Abstand dieser Linien, den man in so viel gleiche Theile abtheile, daß wenn man sich durch die Theilpunkte 1, 2, 3, 4 rc. mit AQ oder CR parallele Linien ab, cd, ef rc. durch die Figur gezogen vorstellt, die Flächenräume zwischen diesen Linien ohne merklichen Fehler für Trapezien angenommen werden können. Mißt man nun, der Ordnung nach, die Sehnen $ab = s'$, $cd = s''$, $ef = s'''$ u. s. w. und $QR = c$ wäre in $2m$ gleiche Theile getheilt worden, so daß ein solcher Theil wie $Q1 = \frac{c}{2m}$, so ist, weil die Sehnen bey A und C, also s^0 und s^{2M} hier $= 0$ sind, der Flächenraum der Figur ohne merklichen Irrthum $= (s' + s'' \ldots + s^{2M-1}) \frac{c}{2m}$.

II. Könnte man innerhalb der Figur ABDC keine Sehnen messen, wie z. B. bey einer prismatischen Säule, die auf einem Boden aufstände, und zu deren oberer Grundfläche man auch nicht bequem kommen könnte u. d. gl. so umschließe man die Grundfläche mit einem Rechtecke QRST, und berechne nun nach (§. 40. 15.) die Flächenräume wie AQRCDA; ASTCBA z. B. AQRCDA, durch Hülfe der gemessenen Ordinaten $AQ = y^0$; $b1 = y'$; $d2 = y''$; $f3 = y'''$ u. s. w. und so auf eine ähnliche Weise SATCBA durch Hülfe der Ordinaten $SA = Y^0$; $aI = Y'$; $cII = Y''$ u. s. w.

u. s. w. so wird der außerhalb der krummlinigten Figur fallende Flächenraum des Rechtecks =

$$\left(\frac{y^o+Y^o+y^{2n}+Y^{2n}}{2}+y'+Y'+y''+Y''..\right)\frac{c}{2m}$$

den man von dem Inhalte des ganzen Rechtecks abziehen muß, um den innerhalb der krummen Linie fallenden Flächenraum zu finden.

Auch kann man so verfahren: Man messe die erwähnten Ordinaten, und ziehe sie, um die Sehnen ab, cd, ef zu erhalten, auf folgende Art, von der gemessenen SQ ab

Sehne $ab = SQ - (y'+Y') = s'$
$cd = SQ - (y''+Y'') = s''$
u. s. w.

So kann man denn aus diesen Sehnen s', s'' rc. den Inhalt der Figur nach (I). berechnen.

Hufförmige Abschnitte von prismatischen Körpern, deren Grundflächen durch gegebene krumme Linien begränzt sind.

§. 45.

1. Man sieht leicht, daß die oben (§. 33. X.) gegebene allgemeine Formel für jede krumme Linie ALBH (Fig. 18), wodurch die Grundfläche eines senkrechten Prisma begränzt ist, statt findet, wenn K den Anfangspunkt der Abscissen, LN die Durchschnittslinie der schneiden-

den

den Ebene LMN mit der Grundfläche, und QH als Abscissenlinie parallel mit LN genommen wird. Ist nun KB durch den Anfangspunkt der Abscissen, senkrecht auf QH, dann KC = g, LC = k, BC = f, BM = h, und die Gleichung zwischen den senkrechten Coordinaten Kp = x und pb = y gegeben, so hat man für das Differential des hufförmigen Abschnittes zwischen CB und cb, oder vielmehr zwischen den Dreyecken CBM und cbm, die Gleichung

$$dU = (y - g)^2 . \frac{A}{f^2} . dx$$

oder auch wegen $\frac{A}{f^2} = \frac{1}{2}$ tang η (§. 33. XX.)

$$dU = \tfrac{1}{2} \text{tang}\, \eta \, . \, (y - g)^2 \, dx.$$

2. Setzt man also statt y, aus der Gleichung für die krumme Linie, den Werth durch x, so erhält man durch die Integration den hufförmigen Abschnitt U, wobey man die Const. so bestimmt, daß für x = 0 auch U = 0 wird. Setzt man hierauf in das Integral x = CL = k, so erhält man den hufförmigen Abschnitt von CB bis an den Punkt L, und so kann man auf ähnliche Weise das Stück U' des hufförmigen Abschnittes zwischen CB und N, oder über der Grundfläche CBN, und durch Addirung beyder Stücke U, U' den ganzen Abschnitt über der Grundfläche LBN finden.

§. 46.

Erstes Beyspiel zu §. 45. 1. Die krumme Linie NBL in der Grundfläche sey eine **Parabel**, deren Scheitelpunkt B, und BA die Axe, worauf LN senkrecht stehe, so ist CL = CN, die Fläche BCL = BCN, und wenn man von einem beliebigen Punkt b die Ordinate bV senkrecht auf BA herabziehet, die Gleichung zwischen BV = v und Vb = z folgende $z^2 = \alpha . v$, wenn α den Parameter bezeichnet. Nun ist aber für die Abscisse Kp = x und Ordinate pb = y, x = z, und y = KB − v = g + f − v; folglich die Gleichung zwischen x und y

$$x^2 = \alpha(g+f-y)$$

2. Hieraus

$$f - \frac{x^2}{\alpha} = y - g, \text{ und folglich}$$

$$dU = \left(f - \frac{x^2}{\alpha}\right)\frac{2A}{f^2} . dx$$

$$= \left(f^2 - \frac{2f}{\alpha}x^2 + \frac{x^4}{\alpha^2}\right)\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\eta\, dx$$

demnach $U = \left(f^2 x - \tfrac{2}{3}\frac{fx^3}{\alpha} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{\alpha^2}\right)\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\eta$

wozu keine Const. zu addiren ist, weil für x = 0 der Werth von U auch sogleich selbst = 0 wird, wie sichs gehöret.

3. Zu

3. In dieses Integral setzt man nun $x = CL = k$, so hat man den hufförmigen Abschnitt von CB bis L d. h. über der Grundfläche CBL also

$$U = \left(f^2 k - \tfrac{2}{3} f \frac{k^3}{\alpha} + \tfrac{1}{5} \frac{k^5}{\alpha^2}\right) \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \eta$$

Nun ist aber, wenn man in die Gleichung $z^2 = \alpha \cdot v$ (1) den Werth $v = BC = f$ setzt, die Ordinate $z = CL = k$; demnach $k^2 = \alpha \cdot f$ und folglich $\alpha = \frac{k^2}{f}$; demnach

4. der hufförmige Abschnitt (3)

$$U = \tfrac{8}{15} f^2 k \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \eta$$

$$= \tfrac{8}{15} f^2 k \cdot \frac{A}{f^2} = \tfrac{8}{15} A k = \tfrac{4}{15} f \cdot k \cdot h$$

Und folglich der ganze Abschnitt über LBN $= 2U = \tfrac{8}{15} f^2 k \operatorname{tang} \eta = \tfrac{16}{15} A k = \tfrac{8}{15} f \cdot k \cdot h$.

§ 47.

Zweytes Beyspiel zu §. 45. 1. Die krumme Linie QLBHA in der Grundfläche sey eine Ellipse, QK die halbe grosse Axe $= \frac{1}{2} a$, KB die halbe kleine $= \frac{1}{2} c$, so ist die Gleichung zwischen $Kp = x$ und $pb = y$ folgende

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(\tfrac{1}{4} a^2 - x^2\right)$$

$-x^2)$ und $(y-g)^2 =$

$= \frac{1}{4}c^2 + g^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 -$

$-x^2)$; demnach

$$= \frac{A\,dx}{f^2}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{4}c^2 + g^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 \\ - \frac{2gc}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}\end{array}\right]$$

wegen $\int dx\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}$ $\frac{1}{8}$ B sin $\frac{2x}{a}$ (Integralf. §§. XV. XVI. 3.)

Das Integral

$$U = \left\{\begin{array}{l}(\frac{1}{4}c^2 + g^2)x - \frac{c^2 x^3}{3a^2} \\ - \frac{gcx}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)} \\ - \frac{gca}{4}\,\mathfrak{B}\sin\frac{2x}{a}\end{array}\right\} \cdot \frac{A}{f^2}$$

wozu keine Const. zu addiren ist, weil für $x = 0$ auch U, wie sich gehört, $= 0$ wird.

2. Um den hufförmigen elliptischen Abschnitt von CB bis L zu erhalten, setzt man $x = LC = k$, so wird $y = KG = g$, und

$$U = \left(\frac{1}{4}c^2 k - \frac{c^2}{3a^2}k^3 - \frac{1}{4}agc\,\mathfrak{B}\sin\frac{2k}{a}\right)\frac{A}{f^2}$$

wo

wo statt $\frac{A}{1^2}$ auch $\frac{1}{2}$ tang η gesetzt werden kann. (§. 33. XX.)

3. Wollte man diesen hufförmigen Abschnitt bloß durch Grössen ausdrücken, die sich an ihm selbst messen lassen, so müßte man a, c, g daraus wegschaffen; k und f lassen sich unmittelbar messen, aber diese zwey Linien reichen nicht hin, daraus die drey Grössen a, c, g zu bestimmen, und es muß entweder eine von diesen dreyen als gegeben angesehen werden, oder man muß in dem elliptischen Bogen BL noch einen Punkt z. B. b annehmen, und für ihn eine Abscisse BV = f′, und Ordinate Vb = k′ messen. Sind nun a und c aus den Abscissen f′, f; und den Ordinaten k′, k vermittelst der beyden Gleichungen

$$(\tfrac{1}{2}c - f')^2 = \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - k'^2)$$

$$(\tfrac{1}{2}c - f)^2 = \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - k^2)$$

gefunden, so ist alsdann auch $g = \frac{1}{2}c - f$ bekannt. Allein der Ausdruck für U wird alsdann zu zusammengesetzt, als daß es sich der Mühe verlohnte, den Werth von U ganz in diesen Grössen f, f′; k, k′ selbst ausgedrückt, herzusetzen. Für den Werth von c würde man aus jenen Gleichungen den Ausdruck

$\frac{f^2 k'^2 - f'^2 k^2}{f k'^2 - f' k^2}$ finden, woraus denn $a = \frac{ck}{\sqrt{(cf - f^2)}}$ wird.

4. Für $g = o$ geht die Durchschnittslinie LN durch den Mittelpunkt der Ellipse. Für diesen Fall wird denn LC oder $k = \frac{1}{2}a$; $f = \frac{1}{2}c$, und folglich (2) der hufförmige Abschnitt über $BKQ = \frac{1}{12}c^2 a . \frac{A}{\frac{1}{4}c^2} = \frac{1}{3}a . A$; und folglich über der halben Ellipse QBH der hufförmige Abschnitt $QHBM = \frac{2}{3}a . A = \frac{2}{3}a . \frac{1}{4}ch = \frac{1}{6}a . c . h$.

§. 48.

Drittes Beyspiel zu §. 45. 1. BLQAHB in der Grundfläche des hufförmigen Abschnittes sey eine Ellipse. QK die halbe kleine Axe jetzt $= \frac{1}{2}c$, und KB die halbe große $= \frac{1}{2}a$, so ist $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2} x^2$ jetzt die Gleichung zwischen $Kp = x$ und $ph = y$. Man sieht hieraus, daß man in der für U gefundenen Formel (§. 47. 2.) nur a statt c und c statt a setzen darf, so wird für diesen Fall der hufförmige Abschnitt über BCL oder

$$U' = \left(\frac{1}{4}a^2 k - \frac{a^2 k^3}{3c^2} - \frac{1}{4}ega\,\text{Bsin}\frac{2k}{a}\right)\frac{A}{f^2}$$

2. Da

2. Da wird denn für $g = 0$, $k = \frac{1}{2}c$ und $f = \frac{1}{2}a$, demnach der hufförmige Abschnitt über $BKQ = \frac{1}{3}c . A$, und über $QBH = \frac{2}{3}c . A = \frac{2}{3}c . \frac{1}{4}a . h = \frac{1}{6}a . c . h$ völlig von einerley Werth mit dem im zweyten Beyspiele (§. 77. 4.)

§. 49.

1. **Wenn die Durchschnittslinie LN der schneidenden Ebene durch A geht** wie bey dem Cylinderschnitt (§. 33. XIX.) so ist $k = 0$, und B sin 0 muß nun $= 180^0 = \pi$ gesetzt werden, sodann ist für diesen Fall auch $g = -\frac{1}{2}a$; $f = a$; $A = \frac{a . h}{2}$. Dieß giebt den Abschnitt über der halben elliptischen Fläche BQAB in dem Beyspiele (§. 48.) $= \frac{1}{8}ca^2\pi . \frac{A}{a^2} = \frac{1}{8}c\pi . A = \frac{1}{8}c\pi . \frac{a . h}{2} = \frac{1}{16}a . c . h . \pi$, und folglich über der ganzen elliptischen Fläche $AQBHA = \frac{1}{8}a . c . h . \pi$.

2. Für das zweyte Beyspiel (§. 47.) wo AB die kleine Axe $= c$ und QH die große $= a$ war, ist **für den Fall, daß LN durch A geht**, der Abschnitt über BQAB (wegen $k = 0$; $g = -\frac{1}{2}c$; $f = c$; $A = \frac{ch}{2}$) $= \frac{1}{8}ac^2\pi . \frac{A}{c^2} = \frac{1}{8}a\pi A = \frac{1}{8}a\pi\frac{c . h}{2} = \frac{1}{16}ach . \pi$

und

und folglich über der ganzen elliptischen Fläche AQBHA ebenfalls wie in dem dritten Beyspiele $= \frac{2}{3}$ achπ.

3. Formeln für hyperbolische hufförmige Abschnitte würde man, wenn es vorkäme, nach der bisherigen Anleitung auch sehr leicht entwickeln können. Die gegebenen Beyspiele mögen aber hinreichend seyn, den Gebrauch der allgemeinen Differentialformel

$$dU = (y - g)^2 \frac{A}{f^2} . dx$$

zu erläutern, was auch überhaupt BLQ für eine krumme Linie seyn mag.

4. Aus der gegebenen Gleichung zwischen y und x kann man übrigens in manchen Fällen auch vortheilhaft wie (§. 42. 2.) dx durch y und dy ausdrücken, und durch die Integration den Werth von U durch y ausgedrückt erhalten.

§. 50.

Aufgabe.

Es sey Fig. 30 die krumme Linie LMN auf der krummen Seitenfläche eines prismatischen Körpers ein beliebiger Schnitt mit einer ebenen Fläche, und die krumme Linie LBN ein anderer Schnitt, senkrecht auf die parallelen Seitenlinien des prismatischen Körpers. Die

Ebenen

Ebenen beyder Schnitte durchschneiden sich in der geraden Linie LN, in der man den Punkt C nach Gefallen als Anfangspunkt der Abscissen für rechtwinklichte Coordinaten Cc = x, cm = z (z. B. für den Punkt m) annehme. Auf der krummen Seitenfläche des Prisma ziehe man die gerade Linie mb senkrecht auf die Ebene LBN herab, so muß der Punkt b in den Umfang der krummen Linie LBN fallen, weil die Ebene LBN die Seitenlinien des Prisma senkrecht schneiden soll. Wird demnach von b nach c eine gerade Linie gezogen, so wird auch bc auf CL senkrecht stehen, und Cc, cb, werden ein paar senkrechte Coordinaten für den Punkt b der krummen Linie LBN seyn, welchen Punkt b man die Projection des Punktes m nennet. Aus der Gleichung zwischen Cc = x und Cm = z die Gleichung der Projection zwischen Cc = x und cb = w zu finden.

Aufl. 1. Der Winkel mcb ist der Neigungswinkel beyder Ebenen gegen einander, oder auch die Ergänzung des Winkels bmc = BMC, welchen die parallelen Seitenlinien wie BM, bm u. d. gl. mit der Ebene LmMN machen, zu 90 Graden; Diesen letztern Winkel BMC nenne man ζ, so hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke mcb

$$cb = w = cm . \sin\zeta = z \sin\zeta$$

2. Also

2. Also $z = \frac{w}{\sin \varepsilon}$; hat man also eine Gleichung zwischen x und z, so hat man auch die Gleichung zwischen x und w, wenn man in jene statt z den Ausdruck $\frac{w}{\sin \varepsilon}$ substituirt.

§. 51.

Beyspiel zu §. 50. 1. Es sey (Fig. 30) RLMNR eine Ellipse und zugleich die Grundfläche eines schiefen Prisma RYWM, dessen gerade Seitenlinien WM mit der Grundfläche einen Winkel $= \varepsilon$ machen. $kM = \frac{1}{2}c$ sey die halbe kleine Axe, und $kv = \frac{1}{2}a$ die halbe große. Dieses schiefe Prisma werde rechtwinklicht auf die Seitenlinien desselben mit einer Ebene geschnitten, welche auf der krummen Seitenfläche die krumme Linie ANBL bilde, und die Grundfläche des Prisma werde von dieser Schnittfläche in LN parallel mit der großen Axe Vv, also senkrecht auf die kleine RM geschnitten. Nun sey für den Punkt m die Absciße $Cc = x$ Ordinate $cm = z$, der Abstand des Mittelpunktes k von der Schnittlinie LN, oder $kC = g = kM - CM = \frac{1}{2}c - f$, so hat man nach der Gleichung der Ellipse, wenn die Verlängerung von mc bey t in die große Axe einschneidet

$$tm^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \cdot kt^2$$

d. h.

d. h. $(z+g)^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \cdot x^2$

2. Dieß giebt also nach (§. 50.) die Gleichung für den senkrechten Schnitt NBL

$$\left(\frac{w}{\sin \zeta} + g\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2$$

oder $(w + g \sin \zeta)^2 = \frac{1}{4}c^2 \sin \zeta^2 - \frac{c^2 \sin \zeta^2}{a^2} x^2$

3. Diese Gleichung ist derjenigen (1) zwischen z und x völlig ähnlich, und also ist die krumme Linie LBN auch eine Ellipse, deren große Axe = a; die kleine = c sin ζ und das Perpendikel aus dem Mittelpunkt dieser Ellipse auf die Schnittlinie LN = g sin ζ seyn würde.

4. Nennt man nun ferner die Absciſſe x für den Punkt L, der in beyden krummen Linien gemeinschaftlich liegt, also CL wie in (§. 47. 2.) k; die Ordinate CM (für x = 0) = f, so bleibt der Werth von k auch für die Ellipse NBL, aber der Werth von f wird = f sin ζ = CB für die Ellipse NBL.

Anwendung des bisherigen auf hufförmige Abschnitte von schiefen Prismen, deren Grundfläche durch eine beliebige krumme Linie begränzt wird. (Fig. 30.)

§. 52.

1. LμN sey ein Schnitt eines solchen Prisma, dessen Seitenlinien wie RY, BW mit der

Grund-

Grundfläche RNML den Winkel ζ machen. Man soll den körperlichen Raum des zwischen $L\mu'N$ und LMN enthaltenen hufförmigen Abschnittes finden, wenn LN die gerade Linie ist, in der die Grundfläche von der Schnittebene $L\mu'N$ durchschnitten wird, und beyde Ebenen den Neigungswinkel η' mit einander machen.

Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $Cc = x$ und $cm = z$ ist gegeben, so wie $LC = k$ und $CM = f$ mit den bisherigen Linien gleiche Bedeutung haben. (§. 51. 4.)

2. Durch LN gedenke man sich einen Schnitt ANBL senkrecht auf die Seitenlinien des Prisma, so hat man aus der Gleichung für die krumme Linie LMN auch diejenige für NBL (§. 51. 2.) und man kann nunmehr das zwischen LMN und NBL enthaltene hufförmige Stück als einen dergleichen Abschnitt eines senkrechten Prisma, dessen Grundfläche NBL ist, betrachten, und aus dem Neigungswinkel von LMN gegen LBN, den ich mit η bezeichnen will und welcher $= 90^0 - \zeta$ ist, diesen Abschnitt berechnen.

3. So kann man auch aus dem Neigungswinkel von $L\mu'N$ gegen $LBN = \eta + \eta'$ den hufförmigen Abschnitt zwischen gedachten beyden Ebenen finden.

4. Nun

4. Nun ziehe man von dem Abschnitt zwischen $L\mu'N$ und LBN, den zwischen LMN und LBN ab, so hat man den verlangten Abschnitt des schiefen Prisma, nemlich zwischen der Schnitt-Ebene $L\mu'N$ und der Grundfläche LMN.

Beyspiel.

5. Die Grundfläche LMN sey eine Ellipse, wie (§. 47.) so ist NBL gleichfalls eine Ellipse, deren große Axe = a, kleine = c sin ζ (§. 51. 3.). Auch ist für sie CL = k, und CB oder das f in (§. 51. 4.) jetzt = f sin ζ, das dortige g = g sin ζ. Demnach der hufförmige Abschnitt zwischen LMN und LBN nach der Formel (§. 47. 2.) wo man den Werth von U zugleich verdoppeln muß =

$$\left(\tfrac{1}{4}c^2k - \frac{c^2k^3}{3a^2} - \tfrac{1}{4}agc\mathfrak{B}\sin\frac{2k}{a}\right)\sin\zeta^2 \tan g\,\eta,$$

wo ich den in der Parenthese eingeschlossenen Ausdruck mit K bezeichnen will.

6. So wird auf eine ähnliche Weise das zwischen $L\mu'N$ und LBN enthaltene hufförmige Stück = K sin ζ^2. tang $(\eta+\eta')$ (3).

Demnach der Abschnitt zwischen $L\mu'N$ und LMN = K (tang $(\eta+\eta')$ − tang η) sin ζ^2 =

$$\frac{K\sin\zeta^2 . \sin\eta'}{\cos(\eta+\eta')\cos\eta}$$

7. Nun ist aber in dem bey B rechtwinklichten Dreyecke $CB\mu'$, der Winkel $BC\mu' = \eta + \eta'$, die Ergänzung des Winkels $C\mu'B$, den die Seitenlinien des schiefen Prisma mit der Schnitt-Ebene $C\mu'B$ machen, zu 90°. Nennt man also den Winkel $C\mu'B = \zeta'$, so ist $\cos(\eta+\eta') = \sin\zeta'$, auch ist $\cos\eta = \sin\zeta$ (2) und $\sin\eta' = \sin(\zeta - \zeta')$; folglich der hufförmige Abschnitt des schiefen Prisma zwischen $L\mu'N$ und der Grundfläche $LMN = \frac{K \sin\zeta \sin\eta'}{\sin\zeta'}$

$= \frac{K \sin\zeta \sin(\zeta - \zeta')}{\sin\zeta'}$.

8. Geht die Durchschnittslinie LN durch den Mittelpunkt der Grundfläche, so ist kC oder $g = 0$, und $k = \frac{1}{2}a$; also der hufförmige Abschnitt über einer halben Ellipse wie VMv $= \frac{1}{12} \frac{c^2 a \sin\zeta \sin(\zeta - \zeta')}{\sin\zeta'}$, welches sich für $\zeta = 90^\circ$ also für einen Abschnitt eines geraden Prisma in $\frac{1}{12} c^2 a \cot\zeta'$ oder in $\frac{1}{12} c^2 a \tang\eta' = \frac{1}{6} a.c.h$ (§. 47. 4.) verwandelt, weil jetzt $\frac{1}{2} c \tang\eta' = h$ wird.

9. Wäre RLMN eine Ellipse, deren große Axe jetzt $RM = a$ und die kleine $Vv = c$ wäre, so würde man auf eine ähnliche Weise wie in (7.8.) verfahren, und für den hufförmigen Abschnitt über der halben Ellipse VMv

den

den Ausdruck $\frac{1}{12}a^2c\frac{\sin\zeta\sin(\zeta-\zeta')}{\sin\zeta'}$ finden, so wie denn überhaupt in dem Werthe von K (5) die Buchstaben c und a für den gegenwärtigen Fall nur verwechselt werden dürfen.

10. So würde man denn auch den Werth von K leicht für Abschnitte finden, wenn die Linie NL über den Mittelpunkt k hinaus, und selbst bis an R fortrückte, wie (§. 49.) bey senkrechten Prismen gezeigt worden ist.

Drittes Kapitel.

Berechnung der Oberflächen prismatischer Körper und Stücken derselben.

§. 53.

Aufgabe.

Die Seitenfläche eines geraden Prisma zwischen den Grundflächen ABCDE, abcde (Fig. 23) zu finden.

Aufl. Weil bey einem solchen Prisma die Seitenflächen ABab, BCbc u. s. w. lauter rechtwinklichte Parallelogrammen sind, deren Höhe Aa = Bb = Cc u. s. w. der Höhe des Prisma selbst gleich sind, so erhält man die Summe aller dieser Parallelogrammen, oder die Seitenfläche des Prisma, wenn man die Summe aller Grundlinien jener Parallelogrammen d. h. den ganzen Umfang der Grundfläche ABCDE in die Höhe des Prisma oder in die Seitenliuie Aa multiplicirt.

§. 54.

Zusatz.

1. Ist das Vieleck ABCDE ein reguläres n Eck, so ist der Umfang dessel-

ben

hen = n . AB, und demnach die Seitenfläche des Prisma = n . AB . Aa. Für einen geraden Cylinder würde man den Umfang der Grundfläche in die Seitenlinie desselben multipliciren um die krumme Seitenfläche zu erhalten.

2. Ist demnach der Durchmesser der Grundfläche eines Cylinders gegeben = d, so würde der Umfang = d . π, und folglich die Seitenfläche des Cylinders = d . a . π wenn die Seitenlinie desselben = a ist. In der Ausübung wird es aber bequemer seyn, sogleich den Umfang des Cylinders selbst zu messen, und bey der Berechnung der Seitenfläche zum Grunde zu legen. Und so ist dieß überhaupt der Fall bey einem jeden senkrechten Prisma, die Grundfläche mag durch welche krumme Linie man will begränzt seyn. Den Umfang einer solchen krummen Linie durch Hülfe eines feinen Drathes, eines Riemens, eines Papierstreifens u. d. gl. zu messen, mögte in den meisten Fällen der Ausübung wohl hinlängliche Genauigkeit gewähren, zumahl wenn man aus mehreren Bestimmungen dieser Art ein arithmetisches Mittel nimmt. Auch könnte es in vielen Fällen hinreichend seyn, eine solche krumme Linie nach Verhältniß ihrer verschiedenen Krümmungen in größere oder kleinere Bogen zu theilen, und die

mit einem Zirkel gemessenen Sehnen dieser Bögen für die Bögen selbst zu nehmen. Aber es wird doch immer auch nützlich seyn, die **Rectificationen** zu kennen, die sich für **gegebene krumme Linien** nach den Formeln der höhern Geometrie darbieten, wozu folgende Vorschriften dienlich seyn werden.

§. 55.

Aufgabe.

Wenn die Grundfläche eines Prisma durch eine krumme Linie begränzt ist, deren Gleichung gegeben ist, den Umfang dieser krummen Linie oder eines jeden Theiles derselben durch Rechnung zu finden.

Aufl. 1. Es sey (Fig. 31) AMm die krumme Linie, und die Gleichung derselben zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP = x und PM = y gegeben. Man soll die Länge des Bogens NM finden, welcher zwischen zwey gegebenen Ordinaten AN und MP enthalten ist, wo AN die Ordinate durch den Anfangspunkt der Abscissen, also den Werth von y für x = 0 bezeichnet.

2. Man gedenke sich durch einen Punkt p unendlich nahe bey P eine Ordinate pm, und durch M parallel mit der Abscissenlinie die Linie

Mn

Mn, bis an die Ordinate pm gezogen, so ist $Mn = Pp = dx$ das Differential der Abscisse, und mn das Differential der Ordinate $= dy$, so wie Mm das Differential des Bogen NM welchen ich mit s bezeichnen will.

3. Nach dem was man in der höhern Geometrie beweist, ist nun

$$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$$

die Differentialgleichung zwischen dem Elemente ds des Bogens, und den Elementen der Abscisse und Ordinate, durch deren Integration der Bogen s gefunden wird, wenn man das Integral so bestimmt, daß es erstlich für $x = 0$ verschwindet, und dann in dieses Integral statt x die bestimmte Abscisse AP setzt.

4. Wenn durch die Differentiation $dy = pdx$ gefunden worden ist, wo p eine Function von x bezeichnen wird, so kann obige Gleichung auch so ausgedrückt werden

$$ds = dx\sqrt{(1 + p^2)}$$

5. Zuweilen ist die Integration bequemer, den Bogen s auch durch die Ordinate y auszudrücken. In diesem Falle sey $dx = q.dy$ und q eine Function von y, so wird auch

$$ds = dy\sqrt{(1 + q^2)}$$

wo dann das Integral so bestimmt werden muß, daß wenn $y = AN$ gesetzt wird, $s = 0$ wird.

2. Also $z = \frac{w}{\sin \zeta}$; hat man also eine Gleichung zwischen x und z, so hat man auch die Gleichung zwischen x und w, wenn man in jene statt z den Ausdruck $\frac{w}{\sin \zeta}$ substituirt.

§. 51.

Beyspiel zu §. 50. 1. Es sey (Fig. 30) RLMNR eine Ellipse und zugleich die Grundfläche eines schiefen Prisma RYWM, dessen gerade Seitenlinien WM mit der Grundfläche einen Winkel $= \zeta$ machen. $kM = \frac{1}{2}c$ sey die halbe kleine Axe, und $kv = \frac{1}{2}a$ die halbe große. Dieses schiefe Prisma werde rechtwinklicht auf die Seitenlinien desselben mit einer Ebene geschnitten, welche auf der krummen Seitenfläche die krumme Linie ANBL bilde, und die Grundfläche des Prisma werde von dieser Schnittfläche in LN parallel mit der großen Axe Vv, also senkrecht auf die kleine RM geschnitten. Nun sey für den Punkt m die Abscisse $Cc = x$ Ordinate $cm = z$, der Abstand des Mittelpunktes k von der Schnittlinie LN, oder $kC = g = kM - CM = \frac{1}{2}c - f$, so hat man nach der Gleichung der Ellipse, wenn die Verlängerung von mc bey t in die große Axe einschneidet

$$tm^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \cdot kt^2$$

d. h.

d. h. $(z+g)^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \cdot x^2$

2. Dieß giebt also nach (§. 50.) die Gleichung für den senkrechten Schnitt NBL

$$\left(\frac{w}{\sin \zeta} + g\right)^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2$$

oder $(w + g \sin \zeta)^2 = \frac{1}{4} c^2 \sin \zeta^2 - \frac{c^2 \sin \zeta^2}{a^2} x^2$

3. Diese Gleichung ist derjenigen (1) zwischen z und x völlig ähnlich, und also ist die krumme Linie LBN auch eine Ellipse, deren große Axe = a; die kleine = c sin ζ und das Perpendikel aus dem Mittelpunkt dieser Ellipse auf die Schnittlinie LN = g sin ζ seyn würde.

4. Nennt man nun ferner die Abscisse x für den Punkt L, der in beyden krummen Linien gemeinschaftlich liegt, also CL wie in (§. 47. 2.) k; die Ordinate CM (für x = 0) = f, so bleibt der Werth von k auch für die Ellipse NBL, aber der Werth von f wird = f sin ζ = CB für die Ellipse NBL.

Anwendung des bisherigen auf hufförmige Abschnitte von schiefen Prismen, deren Grundfläche durch eine beliebige krumme Linie begränzt wird. (Fig. 30.)

§. 52.

1. Lμ'N sey ein Schnitt eines solchen Prisma, dessen Seitenlinien wie RY, BW mit der Grund=

Grundfläche RNML den Winkel ζ machen. Man soll den körperlichen Raum des zwischen Lμ'N und LMN enthaltenen hufförmigen Abschnittes finden, wenn LN die gerade Linie ist, in der die Grundfläche von der Schnittebene Lμ'N durchschnitten wird, und beyde Ebenen den Neigungswinkel η' mit einander machen.

Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten Cc $=$ x und cm $=$ z ist gegeben, so wie LC $=$ k und CM $=$ f mit den bisherigen Linien gleiche Bedeutung haben. (§. 51. 4.)

2. Durch LN gedenke man sich einen Schnitt ANBL senkrecht auf die Seitenlinien des Prisma, so hat man aus der Gleichung für die krumme Linie LMN auch diejenige für NBL (§. 51. 2.) und man kann nunmehr das zwischen LMN und NBL enthaltene hufförmige Stück als einen dergleichen Abschnitt eines senkrechten Prisma, dessen Grundfläche NBL ist, betrachten, und aus dem Neigungswinkel von LMN gegen LBN, den ich mit η bezeichnen will und welcher $= 90^0 - \zeta$ ist, diesen Abschnitt berechnen.

3. So kann man auch aus dem Neigungswinkel von Lμ'N gegen LBN $= \eta + \eta'$ den hufförmigen Abschnitt zwischen gedachten beyden Ebenen finden.

4. Nun

4. Nun ziehe man von dem Abschnitt zwischen $L\mu'N$ und LBN, den zwischen LMN und LBN ab, so hat man den verlangten Abschnitt des schiefen Prisma, nemlich zwischen der Schnitt-Ebene $L\mu'N$ und der Grundfläche LMN.

Beyspiel.

5. Die Grundfläche LMN sey eine Ellipse wie (§. 47.) so ist NBL gleichfalls eine Ellipse, deren große Axe = a, kleine = c sin ζ (§. 51. 3.). Auch ist für sie CL = k, und CB oder das f in (§. 51. 4.) jetzt = f sin ζ, das dortige g = g sin ζ. Demnach der hufförmige Abschnitt zwischen LMN und LBN nach der Formel (§. 47. 2.) wo man den Werth von U zugleich verdoppeln muß =

$$\left(\tfrac{1}{4}c^2k - \frac{c^2k^3}{3a^2} - \tfrac{1}{4}agc\mathfrak{B}\sin\frac{2k}{a}\right)\sin\zeta^2\ \mathrm{tang}\,\eta,$$

wo ich den in der Parenthese eingeschlossenen Ausdruck mit K bezeichnen will.

6. So wird auf eine ähnliche Weise das zwischen $L\mu'N$ und LBN enthaltene hufförmige Stück $= K \sin\zeta^2 \cdot \mathrm{tang}(\eta+\eta')$ (3).

Demnach der Abschnitt zwischen $L\mu'N$ und LMN $= K(\mathrm{tang}(\eta+\eta') - \mathrm{tang}\,\eta)\sin\zeta^2 = \frac{K\sin\zeta^2 . \sin\eta'}{\cos(\eta+\eta')\cos\eta}$.

7. Nun ist aber in dem bey B rechtwinklichten Dreyecke $CB\mu'$, der Winkel $BC\mu' = \eta + \eta'$, die Ergänzung des Winkels $C\mu'B$, den die Seitenlinien des schiefen Prisma mit der Schnitt-Ebene $C\mu'B$ machen, zu 90°. Nennt man also den Winkel $C\mu'B = \zeta'$, so ist $\cos(\eta + \eta') = \sin\zeta'$, auch ist $\cos\eta = \sin\zeta$ (2) und $\sin\eta' = \sin(\zeta - \zeta')$; folglich der hufförmige Abschnitt des schiefen Prisma zwischen $L\mu'N$ und der Grundfläche $LMN = \frac{K \sin\zeta \sin\eta'}{\sin\zeta'}$

$= \frac{K \sin\zeta \sin(\zeta - \zeta')}{\sin\zeta'}$.

8. Geht die Durchschnittslinie LN durch den Mittelpunkt der Grundfläche, so ist kC oder $g = 0$, und $k = \frac{1}{2}a$; also der hufförmige Abschnitt über einer halben Ellipse wie VMv $= \frac{1}{12} \frac{c^2 a \sin\zeta \sin(\zeta - \zeta')}{\sin\zeta'}$, welches sich für $\zeta = 90^\circ$ also für einen Abschnitt eines geraden Prisma in $\frac{1}{12}c^2 a \cot\zeta'$ oder in $\frac{1}{12}c^2 a \tan\eta' = \frac{1}{6}a.c.h$ (§. 47. 4.) verwandelt, weil jetzt $\frac{1}{2}c \tan\eta' = h$ wird.

9. Wäre RLMN eine Ellipse, deren große Axe jetzt $RM = a$ und die kleine $Vv = c$ wäre, so würde man auf eine ähnliche Weise wie in (7. 8.) verfahren, und für den hufförmigen Abschnitt über der halben Ellipse VMv den

den Ausdruck $\frac{1}{12} a^2 c \frac{\sin z \sin (z - z')}{\sin z'}$ finden, so wie denn überhaupt in dem Werthe von K (5) die Buchstaben c und a für den gegenwärtigen Fall nur verwechselt werden dürfen.

10. So würde man denn auch den Werth von K leicht für Abschnitte finden, wenn die Linie NL über den Mittelpunkt k hinaus, und selbst bis an R fortrückte, wie (§. 49.) bey senkrechten Prismen gezeigt worden ist.

Drittes Kapitel.

Berechnung der Oberflächen prismatischer Körper und Stücken derselben.

§. 53.

Aufgabe.

Die Seitenfläche eines geraden Prisma zwischen den Grundflächen ABCDE, abcde (Fig. 23) zu finden.

Aufl. Weil bey einem solchen Prisma die Seitenflächen ABab, BCbc u. s. w. lauter rechtwinklichte Parallelogrammen sind, deren Höhe Aa = Bb = Cc u. s. w. der Höhe des Prisma selbst gleich sind, so erhält man die Summe aller dieser Parallelogrammen, oder die Seitenfläche des Prisma, wenn man die Summe aller Grundlinien jener Parallelogrammen d. h. den ganzen Umfang der Grundfläche ABCDE in die Höhe des Prisma oder in die Seitenlinie Aa multiplicirt.

§. 54.

Zusatz.

1. Ist das Vieleck ABCDE ein reguläres n Eck, so ist der Umfang dessel-

ben

ben = n. AB, und demnach die Seitenfläche des Prisma = n. AB. Aa. Für einen geraden Cylinder würde man den Umfang der Grundfläche in die Seitenlinie desselben multipliciren um die krumme Seitenfläche zu erhalten.

2. Ist demnach der Durchmesser der Grundfläche eines Cylinders gegeben = d, so würde der Umfang = d. π, und folglich die Seitenfläche des Cylinders = d. a. π wenn die Seitenlinie desselben = a ist. In der Ausübung wird es aber bequemer seyn, sogleich den Umfang des Cylinders selbst zu messen, und bey der Berechnung der Seitenfläche zum Grunde zu legen. Und so ist dieß überhaupt der Fall bey einem jeden senkrechten Prisma, die Grundfläche mag durch welche krumme Linie man will begränzt seyn. Den Umfang einer solchen krummen Linie durch Hülfe eines feinen Drathes, eines Riemens, eines Papierstreifens u. d. gl. zu messen, mögte in den meisten Fällen der Ausübung wohl hinlängliche Genauigkeit gewähren, zumahl wenn man aus mehreren Bestimmungen dieser Art ein arithmetisches Mittel nimmt. Auch könnte es in vielen Fällen hinreichend seyn, eine solche krumme Linie nach Verhältniß ihrer verschiedenen Krümmungen in größere oder kleinere Bogen zu theilen, und die

mit einem Zirkel gemessenen Sehnen dieser Bögen für die Bögen selbst zu nehmen. Aber es wird doch immer auch nützlich seyn, die Rectificationen zu kennen, die sich für gegebene krumme Linien nach den Formeln der höhern Geometrie darbieten, wozu folgende Vorschriften dienlich seyn werden.

§. 55.

Aufgabe.

Wenn die Grundfläche eines Prisma durch eine krumme Linie begränzt ist, deren Gleichung gegeben ist, den Umfang dieser krummen Linie oder eines jeden Theiles derselben durch Rechnung zu finden.

Aufl. 1. Es sey (Fig. 31) AMm die krumme Linie, und die Gleichung derselben zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ gegeben. Man soll die Länge des Bogens NM finden, welcher zwischen zwey gegebenen Ordinaten AN und MP enthalten ist, wo AN die Ordinate durch den Anfangspunkt der Abscissen, also den Werth von y für $x = 0$ bezeichnet.

2. Man gedenke sich durch einen Punkt p unendlich nahe bey P eine Ordinate pm, und durch M parallel mit der Abscissenlinie die Linie

Mn

Mn, bis an die Ordinate pm gezogen, so ist Mn = Pp = dx das Differential der Abscisse, und mn das Differential der Ordinate = dy, so wie Mm das Differential des Bogen NM welchen ich mit s bezeichnen will.

3. Nach dem was man in der höhern Geometrie beweist, ist nun

$$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$$

die Differentialgleichung zwischen dem Elemente ds des Bogens, und den Elementen der Abscisse und Ordinate, durch deren Integration der Bogen s gefunden wird, wenn man das Integral so bestimmt, daß es erstlich für x = o verschwindet, und dann in dieses Integral statt x die bestimmte Abscisse AP setzt.

4. Wenn durch die Differentiation dy = pdx gefunden worden ist, wo p eine Function von x bezeichnen wird, so kann obige Gleichung auch so ausgedrückt werden

$$ds = dx\sqrt{(1 + p^2)}$$

5. Zuweilen ist die Integration bequemer, den Bogen s auch durch die Ordinate y auszudrücken. In diesem Falle sey dx = q . dy und q eine Function von y, so wird auch

$$ds = dy\sqrt{(1 + q^2)}$$

wo dann das Integral so bestimmt werden muß, daß wenn y = AN gesetzt wird, s = o wird.

P 4 Bey-

Beyspiele von Rectificationen einiger krummen Linien.

§. 56.

Erstes Beyspiel. 1. Es sey (Fig. 32) AM ein parabolischer Bogen, A der Scheitelpunkt der Parabel und b der Parameter, so ist die Gleichung zwischen AP und PM; $y^2 = bx$. Demnach $dy = \frac{b\,dx}{2y}$; $dy^2 = \frac{b^2 dx^2}{4y^2} = \frac{b^2 dx^2}{4bx} = \frac{b\,dx^2}{4x}$; also $p^2 = \frac{b}{4x}$ und

$$ds = \tfrac{1}{2} dx \sqrt{\frac{4x+b}{x}}$$

2. Nun ist aber auch $dx = \frac{2y\,dy}{b}$; $dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{b^2}$; also $q^2 = \frac{4y^2}{b^2}$; und

$$ds = \frac{dy}{b} \sqrt{(b^2 + 4y^2)}$$

3. Der Ausdruck (2) ist etwas bequemer zum Integriren als der (1), das Integral ist $s = \frac{y}{2b} \sqrt{(b^2 + 4y^2)} + \tfrac{1}{4} b \log \frac{2y + \sqrt{(b^2 + 4y^2)}}{b}$ wozu keine Const. zu addiren ist, weil für den Punkt A, $y = 0$ ist, und für diesen Werth von y auch, wie sichs gehört, $s = 0$ wird.

4. Ver-

4. Verlangt man den der Ordinate y zugehörigen Bogen s durch die Abscisse x ausgedrückt, so muß man entweder die Formel (1) integriren, oder in die Formel (3) $y = \sqrt{bx}$ setzen.

Dies giebt denn

$$\frac{y}{2b}\sqrt{(b^2+4y^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(bx+4x^2)}$$

$$\frac{2y+\sqrt{(b^2+4y^2)}}{b} = \frac{2\sqrt{x}+\sqrt{(b+4x)}}{\sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{(b+4x)}}{\sqrt{b}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8x+b+4\sqrt{(bx+4x^2)}}{b}}$$

Mithin den parabolischen Bogen

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{(bx+4x^2)} + \frac{b}{8}\log\frac{8x+b+4\sqrt{(bx+4x^2)}}{b}$$

5. Will man den Bogen s bloß durch die Abscisse und Ordinate ausdrücken, so darf man statt des Parameters b nur noch $\frac{y^2}{x}$ substituiren. Die Substitution selbst giebt aber weiter keine besondere Abkürzung der Formel.

§. 57.

Zweytes Beyspiel. 1. Die krumme Linie sey eine Ellipse und die Abscissen auf der großen Axe aus dem Mittelpunkt N (Fig. 26) genommen, so ist wenn NG $= x$ und CL $= y$

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)$$

demnach $2y\,dy = -\frac{2c^2 x\,dx}{a^2}$; oder

$$dy^2 = \frac{c^4 . x^2 . dx^2}{a^4 . y^2} = \frac{c^2 x^2 . dx^2}{a^2(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)}$$

also $p^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)}$ und $ds =$

$$dx\sqrt{(p^2+1)} = dx . \frac{\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - (a^2 - c^2)x^2)}}{\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - a^2 x^2)}}$$

oder $ds = \tfrac{1}{2}a\,du \frac{\sqrt{(1 - m u^2)}}{\sqrt{(1 - u^2)}}$ wenn $\frac{x}{\tfrac{1}{2}a}$ der Kürze halber $= u$ und $\frac{a^2 - c^2}{a^2} = m$ genannt wird.

2. Um dieses Differential, dessen Integral durch keinen endlichen Ausdruck gefunden werden kann, durch eine unendliche Reihe zu integriren, setze man $u = \sin\varphi$, so wird $du = d\varphi \cos\varphi$ und $\sqrt{(1 - u^2)} = \cos\varphi$, demnach $ds = \tfrac{1}{2}a\,d\varphi\sqrt{(1 - m \sin\varphi^2)}$.

3. Man

3. Man verwandele $\sqrt{(1 - m \sin\varphi^2)}$ in eine Reihe $= 1 - a' \sin\varphi^2 - b' \sin\varphi^4 - c' \sin\varphi^6 - d' \sin\varphi^8$ u. s. w. so hat man

$$\int d\varphi \sqrt{(1 - m \sin\varphi^2)} = \varphi - a' \int d\varphi \sin\varphi^2 - b' \int d\varphi \sin\varphi^4 \text{ etc.}$$

wo die Werthe von $a' = \frac{1}{2} m$,

$$b' = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} m^2 = a' \cdot \tfrac{1}{4} m$$

$$c' = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^3 = b' \cdot \tfrac{3}{6} m$$

$$d' = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} m^4 = c' \cdot \tfrac{5}{8} m$$

u. s. w.

4. Nun ist aber nach (Integralf. §. XXVI. 1. 9)

$$\int d\varphi \sin\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\int d\varphi \sin\varphi^4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\varphi - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin\varphi \cos\varphi - \tfrac{1}{4} \sin\varphi^3 \cos\varphi$$

u. s. w.

5. Substituirt man diese Werthe in obige Integraltheile (3), so wird man bald finden, daß wenn man der Kürze halber

$$\varphi - \tfrac{1}{2} a' \varphi - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} b' \varphi - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c' \varphi \text{ etc.}$$

d. h. $\left(1 - \tfrac{1}{2} a' - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} b' - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c' \text{ etc.}\right) \varphi = A\varphi$

setzt,

setzt, das Integral $\int d\varphi \sqrt{(1 - m \sin\varphi^2)}$ sich überhaupt durch eine Reihe von der Form
$A\varphi + (B \sin\varphi + C \sin\varphi^3 + D \sin\varphi^5 \ldots) \cos\varphi$
muß ausdrücken lassen, worin demnach nur noch die Coefficienten B, C, D rc. zu bestimmen sind, weil A schon durch die Reihe

$1 - \frac{1}{2}a' - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} b'$ rc. d. h. durch die Reihe

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} m - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} m^2 - \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^3$$
$$- \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} m^4$$

deren Gesetz klar am Tage liegt, gegeben ist.

6. Um nun auch noch die Coefficienten B, C, D rc. zu bestimmen, so differenziire man die für das Integral $\int d\varphi \sqrt{(1 - m \sin\varphi^2)}$ angenommene Reihe (5), so wird, wenn man auf beyden Seiten mit $d\varphi$ dividirt hat,

$$\sqrt{(1 - m \sin\varphi^2)} =$$
$$A + (B + 3 C \sin\varphi^2 + 5 D \sin\varphi^4 \ldots) \cos\varphi^2 -$$
$$B \sin\varphi^2 - C \sin\varphi^4 - D \sin\varphi^6 \ldots$$

Diese Reihe setze man der für $\sqrt{(1 - m \sin\varphi^2)}$ in (3) angenommenen Reihe $1 - a' \sin\varphi^2 - b' \sin\varphi^4 \ldots$ gleich, nachdem man in jene vorher $1 - \sin\varphi^2$ statt $\cos\varphi^2$ substituirt und sie nach den Potenzen von $\sin\varphi$ geordnet hat, so wird man durch Vergleichung der Coefficienten

ten in beyden Reihen folgende Gleichungen erhalten

$$A + B = 1 \qquad \text{Also} \quad B = 1 - A$$
$$3C - 2B = -a' \qquad C = \frac{2B - a'}{3}$$
$$5D - 4C = -b' \qquad D = \frac{4C - b'}{5}$$
$$7E - 6D = -c' \qquad E = \frac{6D - c'}{7}$$

Aus welchen Ausdrücken ganz deutlich erhellet, wie jeder folgende Coefficient aus dem nächst vorhergehenden bestimmt wird.

7. Weil $\varphi = \mathfrak{B} \sin u = \mathfrak{B} \sin \frac{x}{\frac{1}{2}a}$, so wird, wenn man nunmehr das Integral (5) wieder durch x ausdrücken will, und der Kürze halber die halbe große Axe der Ellipse oder $\frac{1}{2}a = \alpha$ setzt, der elliptische Bogen

$$s = \tfrac{1}{2}a \int d\varphi \sqrt{(1 - m \sin \varphi^2)} \ (2) \text{ d. h.}$$

$$s = A\alpha \mathfrak{B} \sin \frac{x}{\alpha} + \alpha\left(B.\frac{x}{\alpha} + C.\frac{x^3}{\alpha^3}..\right).$$
$$\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right)}$$

Oder der elliptische Bogen

$$s = \left(B\frac{x}{\alpha} + C\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3 + D\left(\frac{x}{\alpha}\right)^5 ..\right)\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}$$
$$+ A\alpha \mathfrak{B} \sin \frac{x}{\alpha}$$

welcher

welcher demnach für jede Abscisse x gefunden werden kann, wenn man statt A, B, C, D die (5.6) gefundenen Werthe setzt. Keine Const ist nicht hinzu zu addiren, weil für $x=0$ auch s nach der Formel selbst $=0$ wird, wie sichs gebühret.

8. Für $x=\alpha$, wird der elliptische Quadrant $=\frac{A\alpha\pi}{2}$, weil alsdann B sin $\frac{x}{\alpha}=$ B sin $1=\frac{1}{2}\pi$. Setzt man also statt A den (5) gefundenen Werth, so wird die Länge des elliptischen Quadranten $=\frac{1}{2}\alpha\pi\left(1-\frac{1}{2^2}m-\frac{1.3}{2^2.4^2}m^2-\frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}m^3\,..\right)$ welches wegen $m=\frac{a^2-c^2}{a^2}$ für diesen Quadranten allemahl eine desto stärker sich nähernde Reihe giebt, je kleiner der Werth von m ist, je weniger also a und c von einander unterschieden sind. Auch wird sich die Reihe für jeden Bogen s (7) allemahl desto stärker nähern, je kleiner die Abscisse x ist. Durch andere Methoden das Differential (1) zu integriren, halte ich für unnöthig, da sie theils auf weniger convergirende Reihen führen, theils auch das Gesetz der Coefficienten nicht so deutlich und einfach darstellen, als solches nach dem von mir gewählten Verfahren sich darbietet.

9. In=

9. Indessen bleibt denn doch die Berechnung eines elliptischen Bogens, noch immer mühsam genug, wenn der Bogen von beträchtlicher Grösse ist, und man also doch immer viel Glieder der Reihe berechnen muß. Und so ist dieß überhaupt der Fall bey andern krummen Linien, deren Rectification nicht anders als durch unendliche Reihen dargestellt werden kann. In solchen Fällen kann man aber oft durch indirecte Rectificationsmethoden weit schneller zum Zweck gelangen, und dabey einen Grad der Genauigkeit erhalten, der nichts weiter zu wünschen übrig läßt, wie nachfolgendes Verfahren, nebst den dazu gehörigen Beyspielen zur Gnüge erweisen wird.

§. 58.

Aufgabe.

Die Länge des Bogens einer vorgegebenen krummen Linie durch Näherung zu finden.

Aufl. I. Es sey (Fig. 33. Tab. III.) BC ein Bogen von einer krummen Linie und BQ, CQ Tangenten an den Endpunkten dieses Bogens, BL, CL auf diese Tangenten senkrecht, sogenannte **Normallinien** an B und C, welche verlängert sich in L durchschneiden.

II. So ist, wie man leicht erweisen kann, der Winkel BQS beyder Tangenten, dem Winkel

BLC

BLC beyder Normallinien gleich. Ich will diesen Winkel $= \eta$ nennen, so wie BL $= p$ und CL $= q$.

III. Durch B sey BT mit der Tangente CQ parallel, also auf CL senkrecht, und durch Q, QV parallel mit CL, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke QBV, der Winkel QBV $= SQB = BLC = \eta$. Ferner BT $=$ BL $\sin \eta = p \sin \eta$; LT $= p \cos \eta$; CT $= q - p \cos \eta = QV$. Also BQ $=$ QV sec BQV $= (q - p \cos \eta)$ cosec QBV $= (q - p \cos \eta)$. cosec η

$$= \frac{q - p \cos \eta}{\sin \eta}.$$

IV. Sodann BV $=$ QV . tang BQV $= (q - p \cos \eta) \cot \eta$ und QC $=$ BT $-$ BV $= p \sin \eta - (q - p \cdot \cos \eta) \cot \eta =$ $\frac{p \sin \eta^2 + p \cos \eta^2 - q \cos \eta}{\sin \eta}$ (wenn man statt cot. η setzt $\frac{\cos \eta}{\sin \eta}$) $= \frac{p - q \cos \eta}{\sin \eta}$.

V. Demnach die Summe beyder Tangenten oder BQ $+$ CQ $= \frac{p + q - (p + q) \cos \eta}{\sin \eta}$

$$= (p + q) \frac{1 - \cos \eta}{\sin \eta} = (p + q) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \eta.$$

VI. Weil nun der Bogen BC kleiner ist, als die Summe beyder Tangenten, wenn man annimmt, daß dieser Bogen beständig hohl gegen L ist, d. h. alle Krümmungshalbmesser desselben immer auf eine und dieselbe Seite des Bogens fallen, so ist, wenn man den Bogen mit s bezeichnet $s < (p+q) \tan \frac{1}{2}\eta$.

VII. Nun halbire man auch den Winkel BLC durch die Linie LK, welche bey n in den Bogen BC einschneide (Fig. 34) wo BC, BL, CL gleiche Bedeutung mit diesen Linien in der vorhergehenden Figur haben; und Bf, Ce seyen auf LK senkrecht, so ist $Ce = q \sin \frac{1}{2}\eta < $ Bogen Cn, und $Bf = p \sin \frac{1}{2}\eta <$ Bogen Bn, also Bogen Cn + Bogen Bn d. h. $s > (p+q) \sin \frac{1}{2}\eta$.

VIII. Man hat also hier zwey Gränzen zwischen denen die Länge des Bogens enthalten ist; nemlich $s < (p+q) \tan \frac{1}{2}\eta$ und

$s > (p+q) \sin \frac{1}{2}\eta$

und man kann also, wenn der Winkel η nicht groß ist, ohne großen Fehler jeden dieser Werthe selbst, für den Bogen s annehmen, oder doch ohngefähr berechnen, was der Unterschied dieser beyden Werthe für ein Theil des Bogens selbst seyn würde.

Es ist nemlich $(p+q) \tan \frac{1}{2}\eta - (p+q) \sin \frac{1}{2}\eta = (p+q) (\tan \frac{1}{2}\eta - \sin \frac{1}{2}\eta)$

BLC beyder Normallinien gleich.
diesen Winkel $= \eta$ nennen, so
und CL $=$ q.

III. Durch B sey BT
CQ parallel, also auf CL
Q, QV parallel mit C
winklichten Dreyecke
$=$ SQB $=$ BLC $= \eta$
$=$ p sin η; LT $=$
$=$ QV. Also
(q $-$ p cos η) cos

$= \frac{q-}{}$

...von Grän-
... ihnen fallenden

IV. ... $\eta = 15^0$ wird 2 sin $\frac{1}{4}\eta^2 =$
(q $-$ p ... bey einem Bogen von dieser Grösse
p sin η ... Fehler noch nicht $\frac{1}{100}$ des Bogens, wenn
p sin ... eine von beyden Gränzen für den Bogen
... annehmen wollte. Nähme man nemlich
... kleinere Gränze für den Bogen an ... so
würde man auch beynahe den Werth 0,008
finden, wie sich durch eine leichte Rechnung
ergeben wird.

IX. Man gedenke sich nunmehr durch B und C einen Kreisbogen beschrieben, dessen Halbmesser $= \frac{p+q}{2}$, und der Winkel am

Mittel-

= η seyn würde, so würde die Tangenten, die für diesen Fall seyn würden, ebenfalls = und die Summe der beyden (. 34) die jetzt ebenfalls rden = (p + q) sin ½ η. ch mit σ bezeichnen denselben beyden schen denen der krummen Linie

... L ...

... an also hieraus folgern, daß ... n Bogen s und σ den weiten weni... on einander selbst unterschieden seyn werden, als die Gränzen von einander unterschieden wären, zwischen denen diese Bogen fielen, und daß man demnach den Bogen s der krummen Linie, wenn der Winkel η nicht zu groß ist, ohne merklichen Fehler für einen Kreisbogen nehmen kann, dessen Halbmesser der mittleren arithmetischen Proportionalgrösse zwischen den beyden Linien BL und CL (IX) gleich ist, und dem am Mittelpunkte der Winkel BLC = η zugehören würde.

XI. Also ist ohne merklichen Fehler s = ½ (p + q) . η, wenn η den dem Winkel BLC zugehörigen Kreisbogen in Decimaltheilen des Halbmessers ausdrückt.

 Exempel.

Exempel. 1. Es sey BC (Fig. 35) ein parabolischer Bogen, und B der Scheitelpunkt der Parabel, so ist die Abscissenlinie BL bereits normal auf den Bogen bey B. Ist nun CL die Normallinie an C, CS die Tangente, PC die Ordinate für den Punkt C, BP die Abscisse, pc eine Ordinate unendlich nahe der erstern PC, und Cm parallel mit Pp, so ist Cm = Pp = dem Differential der Abscisse = dx, und cm = dem Differential der Ordinate = dy. Also tang $cCm = \frac{cm}{Cm} = \frac{dy}{dx}$; aber cCm = CSL = 90° − SLC = 90° − η; also cot $\eta = \frac{dy}{dx}$; und CL oder q = PC cosec η = y cosec η; und PL = y cot η; also p = BL = BP + PL = x + y cot η.

Aus der Gleichung der Parabel, nemlich $y^2 = bx$ (§. 56.) und der für den Winkel η gefundenen Gleichung cot $\eta = \frac{dy}{dx}$, kann man nunmehr für jeden gegebenen Winkel η die zugehörige Abscisse und Ordinate, und daraus die Werthe von p und q finden. Nemlich wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y}$; ist cot $\eta = \frac{b}{2y}$ also $y = \frac{1}{2} b$ tang η und $y^2 = \frac{1}{4} b^2$ tang η^2; aber $y^2 = bx$, also $x = \frac{1}{4} b$ tang η^2; hieraus

q =

$= y \operatorname{cosec} \eta = \frac{1}{2} b \operatorname{tang} \eta \operatorname{cosec} \eta = \frac{1}{2} b \sec \eta.$

$q = x + y \cot \eta = \frac{1}{4} b \operatorname{tang} \eta^2 + \frac{1}{2} b = \frac{1}{4} b (\sec \eta^2 + 1)$

Endlich der Bogen BC oder

$$s = \frac{p + q}{2} \eta = (1 + \sec \eta)^2 . \tfrac{1}{8} b \eta$$

$$= \frac{(1 + \cos \eta)^2}{\cos \eta^2} . \tfrac{1}{8} b \eta$$

$$= \frac{(2 \cos \tfrac{1}{2} \eta^2)^2}{\cos \eta^2} . \tfrac{1}{8} b \eta$$

$$= \left(\frac{\cos \tfrac{1}{2} \eta^2}{\cos \eta} \right)^2 . \tfrac{1}{2} b \eta$$

welches durch Logarithmen leicht zu berechnen ist.

3. Um ein Zahlenbeyspiel zu geben, und das Resultat mit demjenigen zu vergleichen, was nach der wahren Formel (§. 56.) für den parabolischen Bogen herauskommen würde, so will ich den Winkel $\eta = 15^0$ und den Parameter $b = 2$ setzen; dieß giebt denn

$2 \log \cos \tfrac{1}{2} \eta = 0{,}9925372 - 1$

$\log \cos \eta = 0{,}9849438 - 1$

Rest $= 0{,}0075934$

duplirt $= 0{,}0151868 = \log \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \eta^2}{\cos \eta} \right)^2$

Nun ist $\eta = 15^0$ in Decimaltheilen des Radius $= 0{,}261799$ (§. 31. IV.)

 hievon

hievon ist der Logarithme $= 0{,}4179680 - 1$
dazu addirt obigen $0{,}0151868$

giebt $\log s = 0{,}4331548 - 1$
also den Bogen $s = 0{,}271116$

4. Nun ist aber nach der wahren Formel (§. 56.) wenn man das dortige $b = 2$; $y = \frac{1}{2} b \tan \eta = \tan \eta$ setzt

$$s = \tfrac{1}{4} \tan \eta \sqrt{(4 + 4 \tan \eta^2)} + \tfrac{1}{2} \log \frac{2 \tan \eta + \sqrt{(4 + 4 \tan \eta^2)}}{2}$$

d. h. $s = \frac{1}{2} \tan \eta \sec \eta + \frac{1}{2} \log (\tan \eta + \sec \eta)$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{\tan \eta}{\cos \eta} + \tfrac{1}{2} \log \cot (45^\circ - \tfrac{1}{2} \eta)$$

demnach $\log \tan \eta = 0{,}4280525 - 1$
$\log \cos \eta = 0{,}9849438 - 1$

$$\log \frac{\tan \eta}{\cos \eta} = 0{,}4431087 - 1$$

hierzu gehört die Zahl $0{,}277401$

wovon die Hälfte $0{,}138700 = m$ genannt werde.

5. Weil nun in dem Ausdrucke für s (4) die logarithmische Grösse sich auf natürliche Logarithmen beziehet, so muß man den log brigg $\cot (45^\circ - \frac{1}{2} \eta)$ mit der bekannten Zahl $2{,}302585$ oder weil man die Hälfte nehmen muß mit $1{,}151292$ multipliciren, um die logarithmische Grösse in dem Ausdrucke für s

zu

zu erhalten. Um die Multiplication zu bewerk-stelligen, bediene ich mich bey den Decimalbrü-chen der abgekürzten Multiplication, wie folget

$\frac{1}{2} \cdot 2{,}302585 = 1{,}151292$

$\log \text{brigg} \cot(45^0 - \frac{1}{2}\eta) = 0{,}115019$

Nun multiplicirt 0,1151292
115129
57560
115
99

Also $\frac{1}{2} \log \text{nat} \cot(45^0 - \frac{1}{2}\eta) = 0{,}1324195 = n$ Demnach nach der wahren Formel der Werth des Bogens $s = m + n = 0{,}138700 + 0{,}132419 = 0{,}271119$.

6. Hieraus erhellt, daß der Unterschied von oben gefundener Formel, welche $s = 0{,}271116$ gab (3) bey einem Winkel η von 15^0 eine ganz unerhebliche Kleinigkeit beträgt, und obige Formel (2) selbst bey einem Winkel η von 30^0, noch immer einen der Wahrheit sehr nahe kommenden Werth geben würde.

XII. Indessen lassen sich nunmehr **Annäherungsformeln für jeden Bogen einer krummen Linie finden**, wenn der Winkel, den die beyden äussersten Normallinien dieses Bogens mit einander machen, auch jede beliebige Grösse hat.

 XIII.

XVIII. Substituirt man diese Werthe in (XIV.), so wird der ganze Bogen

$$ABGDY = \left\{ \begin{array}{l} \frac{AN+YL}{2} + BN + CO + DP \\ + \frac{1}{2} NO \frac{\sin 2\eta + \sin \eta}{\sin \eta} \\ + \frac{1}{2} OP \frac{\sin 3\eta + \sin 2\eta}{\sin \eta} \\ + \frac{1}{2} PL \frac{\sin 4\eta + \sin 3\eta}{\sin \eta} \end{array} \right\} \cdot \eta$$

XIX. In diesen Ausdruck setze man ferner

$$AN = AL - NL$$
$$NO = NL - OL$$
$$OP = OL - PL$$

so wird nach gehöriger Rechnung der Bogen

$$ABCDY = \left\{ \begin{array}{l} \frac{AL+LY}{2} + BN + CO + DP \\ \qquad + \frac{1}{2} NL \frac{\sin 2\eta}{\sin \eta} \\ + \frac{1}{2} OL \frac{\sin 3\eta - \sin \eta}{\sin \eta} \\ + \frac{1}{2} PL \frac{\sin 4\eta - \sin 2\eta}{\sin \eta} \end{array} \right\} \cdot \eta$$

Aber $\frac{1}{2} \frac{\sin 2\eta}{\sin \eta} = \cos \eta; = \frac{\sin 3\eta - \sin \eta}{2 \sin \eta}$

cos

$\cos 2\eta$; $\frac{\sin 4\eta - \sin 2\eta}{2 \sin \eta} = \cos 3\eta$. Also endlich der Bogen ABCDY oder

$$s = \left[\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(AL + LY) + BN + NL \cos \eta \\ \qquad + CO + OL \cos 2\eta \\ \qquad + DP + PL \cos 3\eta \end{array}\right] \eta$$

XX. Man kann diese Regel kurz und allgemein so ausdrücken. Wenn die durch den Anfangspunkt A des Bogens AY gezogene Normallinie AL, von den übrigen Normallinien der Ordnung nach in N, O, P, L ꝛc. dergestalt geschnitten wird, daß die Winkel an N, O, P, L... nach einer arithmetischen Progression η, 2η, 3η, 4η, 5η ... $(m-1)\eta$; $m\eta$ fortgehen (XV. XVI.), so addire man erstlich die beyden äußersten normalen Stücke $AL = n$; $YL = n'$, welche den Winkel $\lambda = m\eta$ zwischen sich fassen zusammen, und halbire die Summe.

Nun bezeichne man unbestimmt eines von den normalen Stücken BN, oder CO, oder DP mit u, die ihm entsprechende Distanz NL oder OL oder PL mit w, und den Winkel den ein solches Stück u mit AL macht = einem Vielfachen von $\eta = \varphi$, so ist allgemein

$$s = \left(\frac{n + n'}{2} + \Sigma(u + w \cos \varphi)\right)\eta$$

Wo Σ die Summe aller Werthe von $u + w \cos \varphi$ ausdrückt, von $\varphi = \eta$ bis $\varphi = (m-1)\eta$, die

Werthe

Werthe von φ allemahl nach der Ordnung der obigen arithmetischen Progression genommen. s bedeutet denn den Bogen von der ersten Normale durch A, bis an diejenige YC, welche mit der ersten AC den Winkel $\lambda = m\eta$ macht.

Je kleiner man $\eta = \frac{\lambda}{m}$ nimmt, also je grösser m ist, desto richtiger wird diese für s gefundene Formel den Werth des Bogens s geben. Aus dem bereits (XI.) angeführten Beyspiele erhellet, daß man η wohl $= 15^\circ$ nehmen kann, ohne daß man von dem wahren Werthe des Bogens s viel abweichen wird, wenn man ihn nach dieser Annäherungsformel berechnet. Zur weitern Erläuterung dient nun noch folgendes.

Anwendung dieser Formel.

§. 59.

Erster Fall. Wenn die durch den Anfangspunkt A des zu rectificirenden Bogens AY gehende Normallinie AL die Abscissenlinie selbst ist, wie z. B. der Fall ist, wenn AY ein parabolischer, elliptischer oder hyperbolischer Bogen wäre, und man den Werth dieses Bogens von dem Anfangspunkt A der Abscissen bis an einen gegebenen Punkt Y verlangte, dem eine gegebene Abscisse AX = f und Ordinate XY = g entspräche.

1. Für

1. Für diesen Punkt Y kann man also erstlich die Subnormallinie XL nach der allgemeinen Formel $XL = YX \cot\lambda = \frac{y\,dy}{dx}$ berechnen, oder auch bloß nach der Formel $\frac{dy}{dx} = \cot\lambda$ den Winkel λ, weil die Gleichung zwischen y und x gegeben ist. Man setzt nemlich alsdann in den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ statt x die gegebene Abscisse $AX = f$, so hat man des Winkels λ Cotangente. Dann erhält man hieraus den Werth der Normallinie $YL = XL \sec\lambda = YX \cot\lambda \sec\lambda = g \cot\lambda \sec\lambda = g \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} \cdot \frac{1}{\cos\lambda} = g \operatorname{cosec}\lambda = n'$ (§. 58. XX.)

Daraus ferner AL oder n (§. 58. XX.) $= AX + XL = f + g \cot\lambda$. Demnach $\frac{n + n'}{2} = \frac{1}{2}(f + g(\cot\lambda + \operatorname{cosec}\lambda)) = \frac{1}{2}(f + g \cot\frac{1}{2}\lambda)$.

2. Nun ist für jeden andern Punkt D, welchem die Normallinie $DP = u$, der Winkel $DPA = \varphi$, die Abscisse $AV = x$ und Ordinate $VD = y$ entspricht

$$\frac{dy}{dx} = \cot\varphi$$

die Cotangente des Winkels den die Normallinie in A, also die Linie AL, mit der Abscissenlinie AS macht. Also ist

$\cot \rho = \frac{dz}{dv}$ in diesen Quotienten $v = 0$

gesetzt.

10. Nachdem man die Gleichung zwischen x und y gefunden hat, bleibt nunmehr alle übrige Rechnung, wie im ersten Falle, um den Werth des Bogens AY zu finden.

11. Die diesem Bogen AY zugehörige Abscisse AX = f, und Ordinate YX = g, welche man in der Formel für s. (2) nöthig hat, kann man aus (5 und 6) finden, wenn man v = AT = f'; z = YT = g' setzt. Also sind die Werthe von f und g

$$f = f' \cos\rho - g' \sin\rho$$
$$g = f' \sin\rho + g' \cos\rho$$

12. Für den Winkel λ = ALY, welchen die Normallinie in Y mit der Abscissenlinie AL macht, und den man gleichfalls zur Berechnung des Bogens braucht, ist erstlich die Cotangente des Winkels AL'Y, welchen diese Normallinie mit AS machen würde $= \frac{dz}{dv}$, in diesen Differentialquotienten statt der Abscisse v, den Werth AT = f' gesetzt. Also ist dieser

Winkel

Winkel AL'Y als eine bekannte Grösse anzusehen. Ich will AL'Y $=\lambda'$ nennen.

13. Daraus also in dem Dreyecke AL'L

$$\lambda = \lambda' - \rho$$

14. Hieraus ferner $\eta = \frac{\lambda}{m}$ (2) und aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \cot \varphi$, welche man aus der zwischen y und x gefundenen (8) sehr leicht ableitet, für jeden Winkel $\varphi = \eta$; 2η; 3η; .. $(m-1)\eta$ (§. 58. XX.) die zugehörige Abscisse x und Ordinate y, mithin alle Grössen, welche in der Formel für s (2) zur Berechnung des Bogens AY erforderlich sind.

15. Man kann indessen auch, ohne vorher die Gleichung zwischen x und y zu suchen, sich sogleich der zwischen v und z gegebenen Gleichung selbst bedienen.

Man setze nemlich in die für s gefundene Formel (2) statt x und y, die (5. 6.) gefundenen Ausdrücke, so wird $(n-x)\cos\varphi + y\sin\varphi$ nach einer leichten Rechnung $= n\cos\varphi - v\cos(\varphi+\rho) + z\sin(\varphi+\rho)$.

16. Da nun aber φ die Winkel wie z. B. APR bezeichnet, welche die Normallinien mit AL machen, so nenne man diejenigen wie AKR, welche sie mit der Abscissenlinie AS

die Cotangente des Winkels den … Linie in A, also die Linie AL, mit … Linie AS macht. Also ist

$$\cot p = \frac{dz}{dv} \text{ in diesem …}$$

gesetzt.

10. Nachdem … x und y gefunden … übrige Rechnung … Werth des W… … $g' \cos \rho) \cot(\lambda' - \rho)$

11. D… scisse AX … $\rho)$ … druck ich mit n bezeichnen will, man in … man … AT …

18. Und auf eine ähnliche Art der Werth von $\frac{f + g \cot \frac{1}{2}\lambda}{g}$ aus (11. 13) nach gehöriger

$$\text{Rechnung} = \frac{f' \sin \frac{1}{2}(\lambda' + \rho) + g' \cos \frac{1}{2}(\lambda' + \rho)}{2 \sin \frac{1}{2}(\lambda' - \rho)}$$

welcher Ausdruck mit a bezeichnet werde; dieß giebt denn den Bogen

$$s = [a + \Sigma(n \cos(\varphi' - p) - v \cos \varphi' + z \sin \varphi')] \cdot \eta$$

worin $\eta = \frac{1}{m}(\lambda' - \rho)$ (13) und der Winkel λ' aus der zwischen v und z gegebenen Gleichung bestimmt wird. Da nun überhaupt $\frac{dz}{dv} = \cot \varphi'$, so

..an aus dieser Gleichung für jeden
... $\varphi+\rho$, die Abscisse v und Ordi-
... also v, z durch φ' d. h. durch

...enn der Ausdruck rechter
...ne Funktion von $\varphi+\rho$,
...ng nach, wie bisher

...uchen den Gang der Rech-
... zweyten Fall zu erläutern.
...u ich zur Erläuterung des ersten Falles
... Rectification der Parabel, Ellipse und Hy-
perbel zeigen.

Beyspiele von Rectificationen nach dieser Annäherungsmethode.

§. 60.

Beyspiel I. 1. Es sey AY (Fig. 36) ein parabolischer Bogen. Der Parameter der Parabel $= b$; also $y^2 = bx$. Man soll den Bogen AY für eine Abscisse $AX = f$ finden; so hat man erstlich für den Winkel $\lambda = ALY$ $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y} = \cot \lambda$; wo man statt y die Ordinate für den Punkt Y d. h. $y = g$ setzen muß. Dieß giebt also $\frac{b}{2g} = \cot \lambda$; oder auch

machen $=\varphi'$, so hat man in dem Dreyecke AKP den äußern Winkel

AKR = APK + KAP d. h.

$\varphi' = \varphi + \rho$; oder $\varphi = \varphi' - \rho$.

Mithin die Grösse (15) $= n \cos(\varphi' - \rho) - v \cos\varphi' + z \sin\varphi'$.

17. Dann ferner aus (11) in der Formel (2) für s, den Werth von

$n = f + g \cot\lambda$

$= f' \cos\rho - g' \sin\rho + (f' \sin\rho + g' \cos\rho) \cot(\lambda' - \rho)$

$= \dfrac{f' \sin\lambda' + g' \cos\lambda'}{\sin(\lambda' - \rho)}$

welchen Ausdruck ich mit n bezeichnen will.

18. Und auf eine ähnliche Art der Werth von $\dfrac{f + g \cot\frac{1}{2}\lambda}{2}$ aus (11. 13) nach gehöriger

Rechnung $= \dfrac{f' \sin\frac{1}{2}(\lambda' + \rho) + g' \cos\frac{1}{2}(\lambda' + \rho)}{2 \sin\frac{1}{2}(\lambda' - \rho)}$

welcher Ausdruck mit g bezeichnet werde; dieß giebt denn den Bogen

$s = [a + \Sigma(n \cos(\varphi' - \rho) - v \cos\varphi' + z \sin\varphi')] . \eta$

worin $\eta = \dfrac{1}{m}(\lambda' - \rho)$ (13) und der Winkel λ' aus der zwischen v und z gegebenen Gleichung bestimmt wird. Da nun überhaupt $\dfrac{dz}{dv} = \cot\varphi'$, so

so kann man aus dieser Gleichung für jeden Winkel $\varphi' = \varphi + \rho$, die Abscisse v und Ordinate z finden, also v, z durch φ' d. h. durch $\varphi + \rho$ ausdrücken.

19. So wird denn der Ausdruck rechter Hand des Zeichens Σ eine Funktion von $\varphi + \rho$, in welche man der Ordnung nach, wie bisher $\varphi = \eta$; 2η; 3η ꝛc. nimmt.

Dieß mag hinreichen den Gang der Rechnung für den zweyten Fall zu erläutern. Jetzt will ich zur Erläuterung des ersten Falles die Rectification der Parabel, Ellipse und Hyperbel zeigen.

Beyspiele von Rectificationen nach dieser Annäherungsmethode.

§. 60.

Beyspiel I. 1. Es sey AY (Fig. 36) ein parabolischer Bogen. Der Parameter der Parabel = b; also $y^2 = bx$. Man soll den Bogen AY für eine Abscisse AX = f finden; so hat man erstlich für den Winkel $\lambda = \text{ALY}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y} = \cot \lambda$; wo man statt y die Ordinate für den Punkt Y d. h. y = g setzen muß. Dieß giebt also $\frac{b}{2g} = \cot \lambda$; oder auch

$\frac{b}{2\sqrt{bf}} = \cot \lambda$; wenn man statt der Ordinate g die Abscisse f gebrauchen will, um daraus den Winkel λ zu finden.

Ist nun dieser Winkel gefunden, so hat man für jeden andern Punkt des Bogens AY
$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y} = \cot \varphi$; demnach $y = \frac{1}{2} b . \tang \varphi$
und $bx = y^2 = \frac{1}{4} b^2 \tang \varphi^2$; d. h. $x = \frac{1}{4} b \tang \varphi^2$.

Folglich $(n - x) \cos \varphi + y \sin \varphi =$

$$= (n - \tfrac{1}{4} b \tang \varphi^2) \cos \varphi + \frac{b}{2} \tang \varphi \sin \varphi$$

$$= n \cos \varphi - \frac{b \sin \varphi^2}{4 \cos \varphi} + \frac{b \sin \varphi^2}{2 \cos \varphi}$$

$$= n \cos \varphi + \frac{b \sin \varphi^2}{4 \cos \varphi} = n \cos \varphi + \frac{b(1 - \cos \varphi^2)}{4 \cos \varphi}$$

$$= (n - \tfrac{1}{4} b) \cos \varphi + \tfrac{1}{4} b \sec \varphi$$

$$= \left(\frac{4n - b}{b} \cos \varphi + \sec \varphi \right) . \tfrac{1}{4} b$$

Also wird der parabolische Bogen

$$s = \left[\begin{array}{l} \tfrac{1}{2} (f + g \cot \tfrac{1}{2} \lambda) \\ + \Sigma \left(\frac{4n - b}{b} \cos \varphi + \sec \varphi \right) \tfrac{1}{4} b \end{array} \right] \eta$$

in welcher Formel statt n nur noch gesetzt werden muß die oben gefundene Grösse $f + g \cot \lambda$ (§. 59. 1.).

2. Für

2. Für ein Zahlenbeyspiel sey der Parameter $b = 2$, YX oder g sey die Ordinate durch den Brennpunkt, so ist g bekanntlich $= \frac{1}{2} b = 1$; $f = \frac{1}{4} b = \frac{1}{2}$; hieraus $\cot \lambda = \frac{b}{2g} = 1$; also $\lambda = 45^{\circ}$; $\frac{1}{2}\lambda = 22\frac{1}{2}^{\circ}$; $\cot \frac{1}{2} \lambda = 2{,}4142136$; $n = \frac{3}{2}$; $\frac{4n - b}{b} = 2$.

Substituirt man diese Werthe, so wird der parabolische Bogen vom Scheitel bis zur Ordinate des Brennpunkts, oder

$$s = (1{,}4571068 + \Sigma(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\sec\varphi))\,\eta$$

Wird nun $\lambda = 45^{0}$ von 15 zu 15 Grad genommen, so wird $\frac{1}{m}\lambda$ oder $\eta = 15^{0}$, mithin $m = 3$ und in Decimaltheilen $\eta = 0{,}261799$, und

$$s = \begin{bmatrix} 1{,}4571068 + \cos 15^{0} + \tfrac{1}{2}\sec 15^{0} \\ + \cos 30^{0} + \tfrac{1}{2}\sec 30^{0} \end{bmatrix} \cdot 0{,}2617[illegible]$$

weil man den Winkel φ bis auf $(m - 1)\,\eta$ also hier bis auf $2 . 15^{0}$ oder 30^{0} nehmen muß. (§. 58. XX.) Die Rechnung selbst steht so

$1{,}4571068$;	$\log \mu = 0{,}6418745$
$\cos 15^{0} = 0{,}9659258$;	$\log \eta = 0{,}4179680 - 1$
$\frac{1}{2}\sec 15 = 0{,}5176381$;	$\log s = 0{,}0598425$
$\cos 30 = 0{,}8660254$;	Also $s = 1{,}14774$
$\frac{1}{2}\sec 30 = 0{,}5773502$	
$4{,}3840463$	

welche Zahl μ heiße.

 3. Wird

3. Wird s nach den gegebenen Grössen vermittelst der wahren Formel (§. 56. 3.), wo statt y die Ordinate g = 1 gesetzt werden muß (2), berechnet, so findet sich

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\log nat(3 + 2\sqrt{2})$$
$$= 0{,}707106 + \tfrac{1}{4}.2{,}302585 \log brigg(3 + 2\sqrt{2})$$
$$= 0{,}707106 + 0{,}575646 \log brigg\, 5{,}828427$$
$$= 1{,}14777$$

welches von obigem s (2) nur sehr wenig verschieden ist. Der Unterschied 0,00003 beträgt vom ganzen Bogen nur $\frac{1}{38259}$.

§. 61.

Ex. II. 1. Es sey AY ein elliptischer Bogen, die längst AL fallende halbe große Axe der Ellipse $= \alpha$, die halbe kleine $= \gamma$, so ist die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(2\alpha x - x^2)$$

2. Also $\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma(\alpha - x)}{\alpha\sqrt{(2\alpha x - x^2)}} = \cot\varphi$

oder $\frac{\alpha^2(2\alpha x - x^2)}{\gamma^2(\alpha - x)^2} = \tan g\,\varphi^2$; woraus die Gleichung

$$2\alpha x - x^2 = \frac{\alpha^2\gamma^2 \tan g\,\varphi^2}{\alpha^2 + \gamma^2 \tan g\,\varphi^2}$$

abgeleitet wird.

3. Nun

3. Nun ist aber aus (1) auch $\frac{\alpha^2 y^2}{\gamma^2} =$
$= 2\alpha x - x^2$

Also (2) $\frac{\alpha^2 y^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha^2 \gamma^2 \tan\varphi^2}{\alpha^2 + \gamma^2 \tan\varphi^2}$ d. h.

$$y = \frac{\gamma^2 \tan\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 \tan\varphi^2)}} =$$

$$= \frac{\gamma^2}{\cot\varphi \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 \tan\varphi^2)}}$$

4. Ferner aus (2) auch $\frac{\gamma^2 (\alpha - x)}{\alpha^2 y} = \cot\varphi$

Folglich $x = \alpha - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cdot y \cot\varphi$.

5. Hieraus wird nun in (§. 59. 2.)

$$(n - x) \cos\varphi + y \sin\varphi =$$
$$= (n - \alpha) \cos\varphi + \frac{\alpha^2 \cos\varphi^2 + \gamma^2 \sin\varphi^2}{\sqrt{(\alpha^2 \cos\varphi^2 + \gamma^2 \sin\varphi^2)}}$$
$$= (n - \alpha) \cos\varphi + \sqrt{(\alpha^2 \cos\varphi^2 + \gamma^2 \sin\varphi^2)}$$

Also der elliptische Bogen AY oder

$$s = A + \Sigma [(n - \alpha) \cos\varphi + \sqrt{(\alpha^2 \cos\varphi^2 + \gamma^2 \sin\varphi^2)}] \eta$$

In welcher Formel A die Grösse $\frac{1}{2}(f + g \cot\frac{1}{2}\lambda)$ bezeichnet und $n = f + g \cot\lambda$ ist (§. 59. 1.). Den Winkel λ findet man aus dem Ausdrucke $\frac{dy}{dx} = \cot\lambda$, wenn man in diesen Differential=

 quo=

quotienten statt x die dem Bogen AY zugehörige Abscisse f setzt. Nun war aber überhaupt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma(\alpha - x)}{\alpha\sqrt{(2\alpha x - x^2)}}.$$ Also f statt x gesetzt $\cot\lambda = \frac{\gamma(\alpha - f)}{\alpha\sqrt{(2\alpha f - f^2)}} = \frac{\gamma^2(\alpha - f)}{\alpha^2 . g}$

wo g die dem Punkt Y entsprechende Ordinate bedeutet.

6. Um das Ausziehen der Wurzel in dem Ausdrucke für s zu vermeiden, kann mit demselben noch folgende Veränderung vorgenommen werden. Weil

$$\sqrt{(\alpha^2 \cos\varphi^2 + \gamma^2 \sin\varphi^2)} = \alpha\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}\sin\varphi^2\right)}$$

so suche man einen Winkel ψ dessen Sinus $= \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)}}{\alpha} . \sin\varphi$, so wird die angeführte Wurzelgrösse $= \alpha \cos\psi$.

7. Weil man nun in dem Ausdrucke für den Bogen s, der Ordnung nach, den Winkel $\varphi = \eta;\ 2\eta;\ 3\eta;\ (m - 1)\eta$ nehmen muß (§. 58. XX.) so seyen die diesen Werthen entsprechenden ψ der Ordnung nach ψ', ψ'', ψ''' ... ψ^{m-1}, und man erhält für den Bogen die Formel

$$s = \left[\begin{array}{l} A + (n - \alpha)(\cos\eta + \cos 2\eta .. + \cos(m-1)\eta) \\ + \alpha(\cos\psi' + \cos\psi'' .. + \cos\psi^{m-1}) \end{array}\right]\eta$$

Wo

Wo man statt $\cos\eta + \cos 2\eta \ldots + \cos(m-1)\eta$ auch den Ausdruck $\frac{\cos\frac{1}{2}(m-1)\eta . \sin\frac{1}{2}m\eta}{\sin\frac{1}{2}\eta} - 1$ setzen kann, wenn man es zur Rechnung bequemer finden sollte.

8. Um das bisherige durch ein Zahlen-Beyspiel zu erläutern, will ich die halbe große Axe der Ellipse $\alpha = 1$ die halbe kleine $\gamma = \frac{1}{2}$ setzen. Man soll den Quadranten der Ellipse finden. Für diesen Fall ist also auch $f = \alpha = 1$; $g = \gamma = \frac{1}{2}$; also $\cot\lambda = 0$ d. h. $\lambda = 90^0$ wie ohnehin klar ist. Ferner hat man A oder $\frac{f + g \cot\frac{1}{2}\lambda}{2} = \frac{3}{4}$ wegen $\cot\frac{1}{2}\lambda = \cot 45^0 = 1$. Dann $n = f + g \cot\lambda = f = 1$; $n - \alpha = 0$. Also der elliptische Quadrant

$$s = (\tfrac{3}{4} + \cos\psi' + \cos\psi'' \ldots + \cos\psi^{v})\ \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{2}$$

wenn man nemlich wie in dem Beyspiele der Parabel (§. 60, 2.) $\eta = 15^0$ nimmt, in welchem Falle λ oder $90^0 = 6 . \eta$ also $m = 6$ und η in Decimaltheilen des Halbmessers $= \frac{1}{6}\frac{\pi}{2}$ wird.

Die Winkel ψ', ψ'' ... werden denn nach der Formel $\sin\psi = \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)}}{\alpha} \sin\varphi$, oder in gegenwärtigen Beyspiele wegen $\alpha = 1$;

 $\gamma =$

[illegible]

[illegible] sehr [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] ist mit einer [illegible]
[illegible]

ien Reihe den Bogen so genau finden, die Rechnung ziemlich beschwerlich ... schon für den elliptischen Quadranten ... em gegebenen Beyspiele wenigstens 15 Glieder der oben angeführten Reihe ...n.

...ollte man in (8) den Werth von s nur ... Tausendtheilchen richtig haben, so hätte ...übrigens auch gar nicht einmahl nöthig ...t, die Secunden in den Winkeln ψ mit ...trachtung zu ziehen, und so würde die ...ung noch um ein Beträchtliches dadurch ...kürzt worden seyn. In den meisten Fällen ...usübung wird es kaum nöthig seyn, auf ... Secunden mit Rücksicht zu nehmen.

Ja man würde den elliptischen Quadran...s für viele Fälle schon hinlänglich genau ...den, wenn man die Rechnung nur für $\varphi = 30°$ ... $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$ führen wollte, in welchem Falle sie ... sogleich um die Hälfte würde abgekürzt ...worden. Denn man hätte alsdann die Cosinusse von ψ nur für $\varphi = 30°$ und $\varphi = 60°$ zu berechnen, und dann mit dem Ausdrucke

$$\left(\tfrac{1}{2} + \cos\psi' + \cos\psi''\right) \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$$ wie in dem eben

eben gegebenen Beyspiele zu verfahren. So war also vorhin für

$\varphi =$

$\varphi = 30^\circ$ | $\cos\psi' = 0{,}901388$
$\varphi = 60$ | $\cos\psi'' = 0{,}661439$

Summe der Cos. $= 1{,}562827$
addirt $\frac{3}{4} = 0{,}75$

$2{,}312827$

Hievon ist der Log. $= 0{,}3641419$
$\log \pi = 0{,}4971499$

$0{,}8612918$

$\log 6 = 0{,}7781513$

$\log s = 0{,}0831405$

und $s = 1{,}21099$
welches vom obigen $s = 1{,}21105$

nur um $0{,}00006$

unterschieden ist. Man sieht hieraus, daß es selten nöthig seyn wird $\eta < 30^\circ$ zu nehmen, und man dennoch hieraus den Bogen s noch immer mit hinlänglicher Genauigkeit finden wird, welches denn den Vortheil und die Bequemlichkeit der angeführten Rectificationsmethode noch mehr empfehlen muß.

Ja in vielen Fällen wird es kaum nöthig seyn $\eta < 45^\circ$ zu nehmen; wie z. B. wenn man etwa nicht mehr als um den 1000sten Theil des Bogens s fehlen wollte, welche Genauigkeit in der Ausübung sehr oft hinlänglich ist. Wie kurz in diesem Falle die ganze Rechnung ausfällt, bedarf keines weitern Beweises.

10.

10. So lange ein elliptischer Bogen wie AH (Fig. 38) kleiner als ein Quadrant ist, bleiben in dem Ausdrucke für s (7) die Cosinusse von $\eta, 2\eta,$ $(m-1)\eta$ alle positiv. Aber für einen Bogen AY der grösser als ein Quadrant ist, kommen unter diesen Cosinussen auch negative vor. In diesem Falle ist nemlich in der Formel für den Winkel λ (5) $f > \alpha$ demnach cot λ negativ, also $\lambda > 90^\circ$. Gesetzt man habe gefunden $\lambda = 135^\circ = m \cdot \eta$; Nähme man also wie bisher $\eta = 15^\circ$, so wäre $m = 9$; folglich die Reihe der Cosinusse in dem Werthe des Bogens s (7) folgende

$$\text{cf}\,15^\circ + \text{cf}\,30^\circ + \text{cf}\,45^\circ + \text{cf}\,60^\circ + \text{cf}\,75^\circ + \text{cf}\,90^\circ + \text{cf}\,120^\circ + \text{cf}\,105^\circ$$

Hier würden denn die Cosinusse von 105°; 120° negativ seyn, und sich mit den darüber stehenden positiven von 75° und 60° aufheben, weil sie ihnen gleich, nur entgegengesetzt sind. Und der Bogen s wäre demnach in diesem Fall nur

$$s = \left[\begin{array}{l} A + (n-\alpha)(\cos 15^\circ + \cos 30^\circ + \cos 45^\circ) \\ + \alpha(\cos\psi' \ldots\ldots + \cos\psi^{VIII}) \end{array}\right]\eta$$

wegen $\cos 90^\circ = 0$. In der Reihe der Cosinusse von ψ nimmt man für ψ allemahl nur den spitzigen Winkel dessen Sinus $= \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)}}{\alpha} \sin\varphi$, weil die Ordinate y in (3), wodurch die Wurzelgrösse

$\frac{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)}}{\alpha} \sin\varphi = \sin\psi$, so wird, wie bey dem elliptischen Bogen, der hyperbolische

$s = (A + \Sigma((n+\alpha)\cos\varphi - \alpha\cos\psi))\,\eta$ oder

$$s = \begin{bmatrix} A + (n+\alpha)(\cos\eta \ldots + \cos(m-1)\,\eta) \\ -\alpha(\cos\psi' + \cos\psi'' \ldots + \cos\psi^{m-1}) \end{bmatrix} \eta$$

5. Es sey, um ein Zahlenbeyspiel zu geben, für eine gleichseitige Hyperbel $\alpha = \gamma = 1$; man soll den Bogen für eine Abscisse $f = 1$ finden. Also ist die zugehörige Ordinate $g = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\sqrt{(2\alpha f + f^2)}\ (1) = \sqrt{3}$; folglich $\cot\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oder $\tan g\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$; demnach $\lambda = 40^0 . 53' . 36''$; $\frac{1}{2}\lambda = 20^0 . 26' . 48''$; für η will ich $\frac{1}{3}\lambda = 13^0 . 37' . 52''$ nehmen. Also ist $m = 3$, $m - 1 = 2$. Ferner wird $n = 3$; $A = \frac{1 + \sqrt{3} . \cot 20^0 . 26' . 48''}{2}$; nimmt man der Kürze halber $20^0 . 27'$, so wird $A = 2{,}8224$. Ferner $\sin\psi = \sin\varphi . \sqrt{3}$. Nimmt man also erstlich $\varphi = \eta = 13^0 . 37' . 52''$, wofür ich $13^0 . 38'$ nehmen will, so wird $\psi' = 19^0 . 28'$; ferner für $\varphi = 2\eta = 27^0 . 16'$; wird $\psi'' = 40^0 . 23'$; also der hyperbolische Bogen, wegen $m - 1 = 2$

$$s = \begin{bmatrix} 2{,}8224 + 4(\cos 13^0 . 38' + \cos 27^0 . 16') \\ -(\cos 19^0 . 28' + \cos 40^0 . 23') \end{bmatrix} \eta$$

=

$= 8,5607 \cdot \eta$. Weil nun η oder $13^\circ . 37' . 52''$ in Decimaltheilen $= 0,23792$; so wird der hyperbolische Bogen

$s = 8,5607 \cdot 0,23792$, welches

$s = 2,0366$ giebt, welche Zahl aber wegen der in der Rechnung weggelassenen Secunden, in den Zehntausendtheilchen vielleicht um ein paar Einheiten unrichtig seyn könnte.

6. Die diesem Bogen zugehörige Sehne wäre $= \sqrt{(f^2 + g^2)} = \sqrt{4} = 2$; also ist der Bogen in gegenwärtigem Falle nur um einige Hunderttheilchen größer als die Sehne. Da hyperbolische Bögen über den Scheitelpunkt hinaus sich sehr bald geraden Linien nähern, so wird man jene geringe Abweichung des Bogens von seiner Sehne sich leicht erklären können.

7. Wollte man den hyperbolischen Bogen nach einer wahren Formel rectificiren, so müßte man wie bey der Ellipse (§. 57.) den Differentialausdruck für ds suchen, und ihn integriren.

Man findet, wenn die Abscissen x jetzt aus dem Mittelpunkte der Hyperbel und nicht wie bisher aus dem Scheitelpunkte genommen werden,

$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$; wenn a und c die ganzen Axen bedeuten, und folglich nach einer Rechnung wie bey der Ellipse (§. 57.)

$$ds = dx \frac{\sqrt{((a^2 + c^2)\,x^2 - \frac{1}{4}a^4)}}{\sqrt{(a^2\,x^2 - \frac{1}{4}a^4)}}$$

Aber auch dieses Differential ist, wie dasjenige bey der Ellipse, nur durch eine unendliche Reihe integrabel. Daher denn die Annäherungsmethode (§. 62.) auch bey der Hyperbel immer sehr große Vorzüge vor der Integralmethode haben wird, die immer nur auf Reihen führt, die sich nicht schnell genug nähern, und daher für die Ausübung von keinem großen Nutzen sind.

Anmerkung zu der bisherigen Rectificationsmethode.

§. 63.

I. Wenn der aus der gegebenen Abscisse AX = f und Ordinate XY = g des zu rectificirenden elliptischen oder hyperbolischen Bogens gefundene Winkel λ, wie in dem Beyspiele (§. 62. 5.) Minuten und Secunden enthält, so wird ein aliquoter Theil dieses Winkels nemlich $\eta = \frac{1}{m}\lambda$ meistens auch immer Secunden enthalten, welches denn die Berechnung der Werthe von cos η; cos 2η... in den allgemeinen Formeln (§. 61. 7. und §. 62. 4.), so wie auch die Berechnung der Winkel ψ', ψ''... aus den Werthen von η, 2η,... wegen der

Pro=

Proportionaltheile etwas beschwerlich macht, da hingegen, wenn η bloß Grade und Minuten enthält, keine anderen Proportionaltheile zu berechnen sind, als welche, wegen der in den Winkeln ψ', ψ'', ψ''' gefundenen Secunden, die Cosinusse dieser Winkel in der obigen Formel erfordern.

II. Um demnach die Rechnung möglichst abzukürzen, so lasse man in dem gefundenen Winkel λ die Minuten und Secunden weg, und nehme ihn bloß bis auf die ganzen Grade. Dann wird sich leicht ein solcher aliquoter Theil davon finden lassen, daß in dem Winkel η bloß Grade und Minuten kommen, die Secunden und die deswegen nöthigen Proportionaltheile also in der Rechnung wegfallen.

III. Aber wenn man von λ bloß die ganzen Grade nimmt (ich will diese mit l bezeichnen), so würde man alsdann auch bloß einen Bogen $= AD$ von der krummen Linie bekommen, dessen Normalen AP, DP, (Fig. 36) diesen Winkel l mit einander machen würden, und also nicht den ganzen Bogen AY, dessen Normalen AL, YL den wahren Winkel λ mit einander machen. Auch würden dann diesem Bogen AD nicht die Abscisse f und Ordinate g, welche dem Bogen AY zugehören, entsprechen, sondern eine Abscisse $AV = f$; und Ordinate $VD = g$, die man aber aus der gegebenen Gleichung für die

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] welches den [illegible]

[illegible] [illegible] nemlich von [illegible] Sinus und [illegible] gefehlt, als man in dem Winkel [illegible] [illegible] hatte, DY ohne merklichen Fehler [illegible] einen Kreisbogen genommen werden kann, [illegible] Sehne [illegible] $\sqrt{((D)K^2 + KY^2)} = \sqrt{(AX - [illegible]}$ $+ ([illegible]X [illegible] DY)^2) = \sqrt{((f - f)^2 + (g - [illegible]}$ und der Winkel DdY am Mittelpunkte $= \lambda - [illegible]$

Da

würde also der Halbmesser Dd = $\frac{c}{2 \sin \frac{1}{2}(\lambda - l)}$

folglich der Bogen DY = $\frac{c(\lambda - l)}{2 \sin \frac{1}{2}(\lambda - l)}$

merklichen Fehler der Sehne c selbst gleich, $\lambda - l$ keinen ganzen Grad beträgt.

IVI. Durch diese Bemerkung wird also die ...hnung für den Bogen AY, wenn der Winkel auch Secunden enthält, um ein Beträcht... es abgekürzt werden können. Es wird aber ...m nöthig seyn, die Sache durch ein Zahlen... ...yspiel zu erläutern.

VII. Wie f und g aus l gefunden werden ...nnen, zeigt das Beyspiel der Ellipse (§. 61 u. s.). ...etzt man in die dortige Gleichung $\varphi = l$;

$= g$, so wird $g = \frac{\gamma^2 \tan l}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 \tan l^2)}}$

...nd x oder hier $f = \alpha - \frac{\alpha^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 \tan l^2)}}$

der auch nachdem man g bereits gefunden hat

$= \alpha - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} g \cot l$.

VIII. Um das Ausziehen der Wurzel in ...em Werthe von g zu ersparen, würde man

wegen $g = \frac{\gamma^2 \tan l}{\alpha \sqrt{(1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \tan l^2)}}$ einen Win-

kel ε suchen, dessen Tangente $= \frac{\gamma}{\alpha}$ tang l; so würde $g = \frac{\gamma^2 \tang l}{\alpha \sec \varepsilon} = \gamma \sin \varepsilon$, wegen tang $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ tang l. Folglich $f = \alpha - \alpha \cos \varepsilon$. Also sind bey der Ellipse für den gegebenen Winkel l die zugehörigen f und g durch eine sehr leichte Rechnung gefunden.

§. 64.

Anmerkung.

Da die Berechnung der Oberflächen prismatischer und anderer Körper so oft auf Rectificationen von krummen Linien führt, so habe ich das Verfahren, diese Rechnungen auf das leichteste anzustellen, zumahl wenn ein gewisser Grad der Genauigkeit dabey verlangt wird, nicht übergehen können. Die von mir gewählte Rectificationsmethode wird man sehr leicht und geschmeidig finden, wenn man sich eine gehörige Uebersicht davon verschafft hat. Ich ziehe sie bey weitem derjenigen vor, welche Lambert (Beyträge zur Math. III. Th. S. 250 ff.) und andere vorgeschlagen haben, weil sie bey der Anwendung auf größere Bögen, als diejenigen auf welche Lamberts Formel ohne großen Fehler angewandt werden kann, weit weniger Rechnungen und

Sub-

Substitutionen erfordert, und je nachdem man $\eta = \frac{1}{m}\lambda$ klein oder groß nimmt, einen beliebigen Grad der Genauigkeit verstattet.

Da also nunmehr in Rücksicht auf die Aufgabe (§. 53.) nichts weiter mehr zu erörtern ist, so wende ich mich jetzt zur Bestimmung der Oberflächen schiefer Prismen, die Grundfläche sey welche gerad- oder krummlinigte Figur man will.

§. 65.

Aufgabe.

Die Seitenfläche eines schiefen Prisma zu finden.

Aufl. Erster Fall. Wenn die Grundfläche eine geradlinigte Figur ist (Fig. 39.) ABCDE.

I. Man gedenke sich einen Schnitt des Prisma senkrecht auf die parallelen Seitenlinien, wie hier den geradlinigte Umfang $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ darstellet, so ist $\alpha\beta$ die Höhe des schiefen Parallelograms ABab, die Seitenlinie Bb oder Aa zur Grundlinie angenommen. So ferner $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\alpha$, der Ordnung nach, die Höhen der Parallelogrammen BCbc; CDcd ꝛc. wenn die Seitenlinien Cc = Dd = Ee ꝛc. zu den Grundlinien angenommen werden; also erhält man

man die Summe aller dieser Parallelogrammen d. h. die Seitenfläche des schiefen Prisma, wenn man die schiefe Seitenlinie desselben Aa, oder Bb u. s. w. in die Summe aller Linien $\alpha\beta + \beta\gamma + \delta\gamma$ rc. d. h. in den ganzen Umfang jenes senkrechten Schnittes $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ multiplicirt.

II. Diesen Umfang $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ kann man in der Ausübung entweder unmittelbar messen, indem man um des Prisma Seitenfläche einen Faden senkrecht auf die Seitenlinien des Prisma herumführt, oder man kann auch zwischen jedem Paare paralleler Linien wie Aa, Bb das Perpendikel $\alpha\beta$ durch Hülfe eines Winkelhakens ziehen und messen, oder auch diese Perpendikel berechnen, wenn der schiefe Winkel in einem jeden Parallelogramm z.B. aAB, bBC u. s. w. und die Umfangslinien AB, BC u. s. w. der Grundfläche bekannt sind, wo denn leicht erhellet, daß $\alpha\beta = AB \cdot \sin aAB$; $\beta\gamma = BC \sin bBC$ u. s. w. seyn wird.

III. Nennt man also AB = A, den Winkel aAB = α; BC = b; bBC = β u. s. w. die schiefe Seitenlinie Aa = Bb = Cc = l, so ist die Seitenfläche des Prisma = $(a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma \ldots)\, l$. Hiezu würde man noch den doppelten Quadratinhalt der Grundfläche addiren, wenn man die ganze Oberfläche des Prisma verlangte.

Zwey=

Zweyter Fall. Wäre ABCDE eine krummlinigte Figur, so würde dieselbe Vorschrift gelten, wie leicht erhellet, nemlich daß man den Umfang $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ des senkrechten Schnittes in die Seitenlinie des Prisma multiplicirte, welche Seitenlinie denn die gerade Linie seyn würde, welche durch zwey gleichnahmigte Punkte A, a; B, b; in beyden gleichen und ähnlichen Figuren ABCDE, abcde gezogen würde.

IV. Es würde also bey dieser Aufgabe die Frage aufzulösen seyn, aus der gegebenen Figur der Grundfläche ABCDE, die Figur des Schnittes $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu finden, und nun diese zu rectificiren.

V. Das erste, nemlich die Figur des Schnittes $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu bestimmen, ließe sich aus der Aufgabe (§. 50.) ableiten, und die Rectification dieser krummen Linie zu bewerkstelligen, würden die (§. 55. und §. 58.) gegebenen Vorschriften anzuwenden seyn.

VI. Indessen läßt sich auch ohne Betrachtung des Schnittes die krumme Seitenfläche eines vorgegebenen Prisma am kürzesten auf folgende Art bestimmen:

AMN (Fig. 40) sey ein Stück von dem krummlinigten Umfang der Grundfläche. Mm ein Element dieses Umfanges und M', m', die

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Es sei AL die [illegible]linie für die krumme Linie [illegible], A der Anfangspunkt der Abscissen, und die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP = x, und PM = y gegeben. Durch A gedenke man sich eine Seitenlinie Aa des Prisma, parallel mit MM', und von a ein Perpendikel aG auf die Grundfläche herabgefället, so ist aAG die Schiefe des Prisma, oder der Neigungswinkel der parallelen Seitenlinien des Prisma gegen die Grundfläche, so wie AG eine bestimmte gerade Linie, deren Verlängerung AR mit

mit der Abscissenlinie KL den bestimmten Winkel LAR = ẟ mache.

Von M fälle man gleichfalls auf die Grundfläche das Perpendikel MK, so ist die Ebene M'MK parallel mit der Ebene aAG, und der Winkel M'MK gleichfalls = i, so wie MK parallel mit AG, und die Ebene M'MK senkrecht auf die Grundfläche. Die Tangente MT durchschneidet die Abscissenlinie unter einem Winkel LTM, welcher das Complement des Winkels MLT zu 90° ist, wenn ML eine Normallinie an M, also senkrecht auf MT ist. Für diesen Winkel MLT = L hat man die Gleichung

$$\frac{dq}{dp} = \cot L. \text{ (wie §. 59. 2.)}$$

Die Verlängerung von MK durchschneidet die Abscissenlinie LA, unter einem Winkel LtM = LAR = ẟ, also hat man den Winkel TMt = LTM − LtM = 90° − L − ẟ = 90° − (L + ẟ).

III. Nun betrachte man das sphärische Dreyeck, welches bey M die drey Winkel

= M'MT = μ (VIII.)

TMt = 90° − (L + ẟ) (IX.)

M'Mt = i (IX.)

mit

mit einander machen. In (Fig. 41) ist dieß sphärische Dreyeck, wo die Linien MN, MT, Mt gleiche Bedeutung mit denen in (Fig. 40) haben. Dieß sphärische Dreyeck ist bey r rechtwinklicht, weil die Ebene MMt auf TMt senkrecht stehet (LX). Also nach der sphärischen Trigonometrie

$$\cos \sigma\nu = \cos \sigma t \cdot \cos t\nu$$

Oder $\cos \mu = \cos i \cdot \cos (90^\circ - (L + \zeta))$

$$= \cos i \sin (L + \zeta)$$

demnach in (VIII.)

$$\sin \mu = \sqrt{(1 - \cos i^2 \sin (L + \zeta)^2)}$$

und wenn man die dem Bogen AM = s entsprechende krumme Seitenfläche des Prisma = S nennt, das Element

$$dS = h ds \sqrt{(1 - \cos i^2 \sin (L + \zeta)^2)}$$

XI. In dieser Formel ist der Winkel L + ζ = dem Winkel ARM, welchen die Normallinie an M, mit AR macht; wenn man also nicht AL sondern AR selbst zur Abscissenlinie machte, und für den Punkt M die Abscisse AQ = t, die Ordinate QM = u und den Winkel ARM = ϑ setzte, so hätte man

$$\cot \vartheta = \frac{du}{dt};\ ds = \sqrt{(du^2 + dt^2)};\ \sin \vartheta =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \cot \vartheta^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(du^2 + dt^2)}} = \frac{dt}{ds}$$

Folge=

Folglich

$$dS = h\,ds\,\sqrt{\left(1 + \frac{\cos i^2 \cdot dt^2}{ds^2}\right)}$$

$$= h\,\sqrt{(ds^2 + \cos i^2 \cdot dt^2)}$$

$$= h\,\sqrt{(du^2 + dt^2 \cdot \sin i^2)}$$

Oder wenn man der Kürze halber $\frac{du}{dt} = T$ setzt

$$dS = h\,dt\,\sqrt{(T^2 + \sin i^2)}$$

welche Gleichung einfacher, und vielleicht auch zur Integration bequemer als die (X) ist.

XII. Aus der gegebenen Gleichung zwischen p und q, die zwischen t und u zu finden, muß man p und q durch t und u ausdrücken, und dann diese Ausdrücke statt p und q in die gegebene Gleichung substituiren.

Nun ist aber, wenn man QF mit NP, und QN mit PM parallel zieht

$PM = FM + PF = FM + QN$ d. h.

$q = u \cos \vartheta + t \sin \vartheta$

$AP = AN - NP = AN - QF$ d. h.

$p = t \cos \vartheta - u \sin \vartheta$

woraus umgekehrt

$u = q \cos \vartheta - p \sin \vartheta$

$t = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$

folgt.

und der Neigungswinkel der Seitenlinien gegen die Grundfläche $= i$.

Aufl. 1. In diesem Falle ist die Gleichung zwischen p und q, oder auch zwischen t und u (§. 66. 1. 3.)

$$u^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(2\alpha t - t^2)$$

2. Man rectificire also eine krumme Linie, deren Abscisse $x = t \sin i$, und Ordinate $y = u$ seyn würde. (§. 66. 2.)

3. Wegen $t = \frac{x}{\sin i}$ und $y = u$, würde die Gleichung für diese krumme Linie seyn,

$$y^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\left(\frac{2\alpha x}{\sin i} - \frac{x^2}{\sin i^2}\right)$$

oder $y^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2 \sin i^2}(2\alpha \sin i . x - x^2)$.

Woraus denn erhellet, daß diese krumme Linie auch eine Ellipse seyn muß, deren halbe Axe α' (worauf die Abscissen x genommen werden) $= \alpha \sin i$, und die andere halbe Axe $\gamma' = \gamma$ seyn würde.

4. Man kann also nunmehr die Rectification dieser Ellipse nach (§. 61.) vornehmen, wenn man das dortige $\alpha = \alpha \sin i$ (3); das dortige γ auch hier $= \gamma$, und nunmehr für den

den Quadranten dieser Ellipse das dortige $\lambda = 90^0$, $f = \alpha' = \alpha \sin i$ und $g = \gamma$ setzt. Dieß giebt für das dortige n ($= f + g \cot\lambda$) den Werth $\alpha' = \alpha \sin i$, für das dortige $n - \alpha$ den Werth $\alpha \sin i - \alpha \sin i = 0$, und für das dortige A oder $\frac{f + g \cot\frac{1}{2}\lambda}{2}$ hier den Werth $\frac{\alpha \sin i + \gamma}{2}$; folglich der elliptische Quadrant (§. 61. 7.) =

$$\left(\frac{\alpha \sin i + \gamma}{2} + \alpha \sin i\,(\cos\psi' + \cos\psi'' + \ldots)\right)\eta.$$

Die Werthe von ψ', ψ'' ... werden aus der Gleichung $\sin\psi = \frac{\sqrt{(\alpha^2 \sin i^2 - \gamma^2)}}{\alpha \sin i} \sin\varphi$ bestimmt, wenn man, der Ordnung nach, statt φ, setzt η, 2η, 3η ... wie bereits oben mit mehreren erläutert worden ist.

Das Vierfache dieses Quadranten giebt den Umfang der Ellipse (3) den man hierauf nur noch in h oder in die schiefe Seitenlinie des Cylinders multiplicirt (§. 66. 2.) um die krumme Seitenfläche des vorgegebenen elliptischen schiefen Cylinders zu erhalten.

5. Wenn $\alpha \sin i = \gamma$ folglich $\sin i = \frac{\gamma}{\alpha}$, so wird die Gleichung (3)

$$y^2 = 2\alpha \sin i \cdot x - x^2$$

welche also für diesen Fall einem Kreise zugehört, dessen Halbmesser $= \alpha \sin i$; der Umfang dieses Kreises ist $2 \alpha \pi \sin i$. Also ist für einen schiefen elliptischen Cylinder, dessen Neigungswinkel Sinus $= \frac{\gamma}{\alpha}$ ist, die krumme Seitenfläche $= 2 \alpha \pi \sin i . h = 2 \gamma \pi . h$.

6. Für den Fall, daß $\alpha \sin i \lessgtr \gamma$ ist, kann die Berechnung der Winkel ψ', ψ''.. nach der (4) angegebenen Formel nicht mehr statt finden, weil diese Winkel unmöglich werden würden. Wenn man aber bedenkt, daß die Winkel ψ in der Formel für den elliptischen Bogen eigentlich durch die Wurzelgröße $\sqrt{(\alpha^2 \cos\varphi^2 + \gamma^2 \sin\varphi^2)}$ (§. 61. 6.) veranlaßt worden sind, so ist es jetzt leicht, auch für den Fall, daß $\alpha \sin i \lessgtr \gamma$ ist, die Werthe der Winkel ψ zu erhalten. Denn man setze in diese Wurzelgröße nur $\sin\varphi^2 = 1 - \cos\varphi^2$, so wird auch

$$\sqrt{(\alpha^2 \cos\varphi^2 + \gamma^2 \sin\varphi^2)} = \gamma \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma^2} \cos\varphi^2\right)}$$

Man suche also jetzt die Winkel ψ nach der Formel $\sin\psi = \cos\varphi \frac{\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}}{\gamma}$, oder weil $\alpha \sin i$ statt α gesetzt werden muß (3), nach der Formel

$$\sin\psi = \cos\varphi \frac{\sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2 \sin i^2)}}{\gamma};$$

so

o wird die Wurzelgrösse $= \gamma \cos\psi$, und also für den Fall (6) der elliptische Quadrant $=$

$$\left(\frac{\alpha \sin i + \gamma}{2} + \gamma (\cos\psi' + \cos\psi'' \ldots)\right) . \eta.$$

7. Ist die Grundfläche des schiefen Cylinders ein Kreis, so hat man $\gamma = \alpha$, und folglich für den zur Berechnung der schiefen Seitenfläche dieses Cylinders erforderlichen elliptischen Quadranten (6)

$$\sin\psi = \cos\varphi \cos i$$

und wenn man jetzt nach dieser Formel die Winkel ψ berechnet, den elliptischen Quadranten selbst $=$

$$\left(\gamma \frac{1 + \sin i}{2} + \gamma (\cos\psi' + \cos\psi'' \ldots)\right) \eta =$$

$$\gamma . \eta \left(\frac{1 + \sin i}{2} + \cos\psi' + \cos\psi'' \ldots\right),$$

welches mit 4 h multiplicirt die krumme Seitenfläche dieses Cylinders geben würde.

§. 68.

Anmerkung.

Ist $i = 90°$, also der Cylinder senkrecht oder gerade, so ist die Gleichung zwischen y und x (§. 67. 3.) begreiflich einerley mit der zwischen t und u (Das. 2). Man hat also in diesem Falle, wie ohnehin klar ist, nur den

Umfang der Grundfläche des Cylinders zu rectificiren, wo denn nach der Formel (§. 67. 4.) für den elliptischen Quadranten der Ausdruck

$$\left(\frac{\alpha+\gamma}{2} + \alpha\,(\cos\psi' + \cos\psi'' \ldots)\right)\eta$$

kommen würde, in welchem die Winkel ψ bloß nach der Formel $\sin\psi = \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)}}{\alpha}\sin\varphi$ zu berechnen sind, wie schon aus dem Beyspiele (§. 61. 8.) zu ersehen ist.

§. 69.

Aufgabe.

Es sey die krumme Linie AMN (Fig. 40) eine Parabel, man soll das dem Bogen AM entsprechende Stück der parabolischen Cylinderfläche finden. Der Neigungswinkel sey wieder $= i$, und wie im (§. 67.) $z = 0$.

Aufl. 1. Ist A der Scheitelpunkt, und der Parameter der Parabel $= \beta$, so ist die Gleichung zwischen t und u

$$u^2 = \beta . t .$$

Und folglich wie (§. 67. 2) die zwischen x und y

$$y^2 = \frac{\beta}{\sin i} . x$$

2. Also

2. Also ist die zu rectificirende krumme Linie (§. 66. 2.) auch eine Parabel deren Parameter $b = \frac{\beta}{\sin i}$.

3. Um nun das dem Bogen AM zugehörige Stück der Cylinderfläche zu erhalten, so sey für diesen Bogen die Abscisse t oder AQ = f', und Ordinate QM oder u = g' $= \sqrt{(\beta . t')}$.

4. Diesen bestimmten Werthen von t und u entsprechen in der zu rectificirenden krummen Linie (2) die Werthe $x = \frac{t}{\sin i}$ d. h. $f = \frac{f'}{\sin i}$ und y = g = g'. Hieraus wird denn nach der Formel (§. 60.) für den Winkel λ

$$\cot \lambda = \frac{b}{2g} = \frac{\beta}{2g' \sin i}$$

und der Werth von n oder $f + g \cot \lambda = \frac{f' + \frac{1}{2}\beta}{\sin i}$, welche Werthe man also nur statt b, f, g, λ in die Formel (§. 60.) zu substituiren hat, um den Bogen s zu finden, welcher in die schiefe Seitenlinie h des Cylinders zu multipliciren ist, um das verlangte Stück der krummen Seitenfläche zu erhalten.

5. Dieß Beyspiel zeigt, wie auf eine ähnliche Art auch bey einem elliptischen schiefen Cylinder zu verfahren seyn würde, wenn man

 nicht

nicht die ganze krumme Seitenfläche, sondern nur ein Stück derselben, welches z. B. vom Bogen AM entspräche, verlangte.

§. 70.

Aufgabe.

Die krumme Seitenfläche eines elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen schiefen Cylinders zu finden, wenn der Winkel z nicht $=0$ ist.

Aufl. 1. Man suche aus der gegebenen Gleichung zwischen q und p, die zwischen t und u (§. 66.).

2. Weil man nun eine krumme Linie rectificiren muß (§. 66. 2.) deren Abscisse $v = t \sin i$ und Ordinate $z = u$, so kann man aus der zwischen t und u gefundenen Gleichung sehr leicht die Gleichung zwischen v und z, also die Gleichung der zu rectificirenden krummen Linie finden.

3. Und nun nach (§. 59. 18.) die Rectification der krummen Linie bewerkstelligen.

4. Ich begnüge mich hier das Verfahren bloß im allgemeinen angezeigt zu haben. Will man nach der Anleitung rechnen, so wird man für den Fall, daß z nicht $=0$ ist, auf einen ziemlich

lich zusammengesetzten Ausdruck für den summatorischen Theil der Formel. (§. 59. 18.) verfallen, weil die zu rectificirende krumme Linie ARY (Fig. 37.) in A nicht normal auf der Abscissenlinie AS, worauf die Coordinaten v und z genommen werden, ist, sondern erst der Winkel ρ (§. 89. 3. 18.) gefunden werden muß, der dann Ursache ist, daß jetzt für den summatorischen Theil Σ (§. 59. 18.) nicht so einfache Ausdrücke, wie in der vorhergehenden Aufgabe, zum Vorschein kommen.

5. Es wird zwar die zu rectificirende krumme Linie ARY allemahl auch eine krumme Linie der zweyten Ordnung seyn, wenn die Grundfläche des vorgegebenen Cylinders durch eine solche krumme Linie begränzt wird, aber weder die Abscissenlinie AS noch auch die an A gezogene Normale AL wird eine von den Hauptaxen der krummen Linie ARY. Wollte man die Lage dieser Axen erst bestimmen, und aus der zwischen v und z gefundenen Gleichung große und kleine Axe, Parameter u. d. gl. ableiten, um alsdann die Rectification der krummen Linie nach (§§. 59 ff.) bewerkstelligen zu können, so würde man damit auch nicht viel gewinnen, weil für diese Axen ebenfalls sehr zusammengesetzte Ausdrücke erhalten werden, wie auch nach der Natur der Sache nicht anders seyn kann, und noch weniger würde für

 die

die Ausübung eine unendliche Reihe brauchbar seyn, welche man durch eine unmittelbare Integration der Formel (§. 65. XI.)

$$dS = h\,dt\,\sqrt{(T^2 + \sin i^2)}$$

erhalten würde.

6. Wenn man sich also nicht in sehr mühsame Rechnungen einlassen will, so bleibt bey schiefen Cylindern, deren Grundfläche durch eine gegebene krumme Linie begränzt ist, für den Fall, daß z nicht $= 0$ ist, wohl kein anderes Mittel, die krumme Seitenfläche zu bestimmen, übrig, als das empirische, nemlich so gut sich thun läßt, den Umfang des senkrechten Schnittes (§. 65.) II. Fall) durch unmittelbare Messung (§. 65. II.) zu bestimmen, und dann diesen in die Seitenlinie des schiefen Cylinders zu multipliciren.

§. 71.

Aufgabe.

Die krumme Seitenfläche eines hufförmigen Abschnittes (§. 33. u. 45) zwischen dem Stück LBN der Grundfläche eines senkrechten cylindrischen Körpers, und der Schnittfläche LMN zu finden. (Fig. 18.)

Aufl.

Aufl. 1. Es sey wie oben (§. 45.) die Gleichung der Grundfläche zwischen den senkrechten Coordinaten Kp $=$ x und pb $=$ y gegeben, und nun $q\beta$ eine Ordinate unendlich nahe bey pb, so ist zwischen den in b und β errichteten Perpendikeln auf die Grundfläche, bis zur Schnittebene LMN, ein unendlich schmales Stück $bm\beta\mu$ der krummen Seitenfläche des hufförmigen Abschnitts enthalten, dessen Fläche als ein Parallelogramm betrachtet werden kann, dessen Grundlinie das Bogen-Element $b\beta = ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, und die Höhe $bm = bc \tang bcm = (y - g) \tang \eta$ (§. 45). Nennt man also das Stück der krummen Seitenfläche zwischen BM und bm $=$ W, so hat man für das Element derselben:

$$dW = (y - g) \tang \eta \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Oder auch

$$dW = (y - g) \tang \eta . ds.$$
$$= y \tang \eta . ds - g \tang \eta . ds$$

Also

$$W = - g \tang \eta . s + \tang \eta \int y ds$$
$$= \tang \eta (- g . s + \int y ds).$$

Für g $=$ o d. h. wenn die Durchschnittslinie LN der schneidenden Ebene und der Grundfläche, mit der Abscissenlinie QH selbst zusammenfällt, wird

$$W = \tang \eta . \int y ds.$$

Erstes Beyspiel.

2. Es sey die Grundfläche AHBQ eine Ellipse, QH die kleine Axe = c, und AB die große = a, der Schnitt LMN geht durch den Mittelpunkt K, also LN falle auf QH, so ist g = o und die Gleichung zwischen x und y

$$y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}x^2 \text{ (§. 48.) Also}$$

$$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4x^2 + c^4y^2)}}{c^2 y}$$

$$y\,ds = \frac{dx}{c^2}\sqrt{(a^4x^2 + c^4y^2)};$$ oder wenn man statt c^4y^2 setzt $\frac{1}{4}a^2c^4 - a^2c^2x^2$

$$y\,ds = \tfrac{1}{2}a\,dx\sqrt{\left(1 + \frac{4(a^2 - c^2)}{c^4}x^2\right)}$$

und wenn der Kürze halber $\frac{2\sqrt{(a^2 - c^2)}}{c} = e$ gesetzt wird (Integralf. §. XIII. 3.)

$$\int y\,ds = \frac{ax\sqrt{(c^2 + e^2x^2)}}{4c} + \frac{ac}{4e}\log\frac{ex + \sqrt{(c^2 + e^2x^2)}}{c}$$

wozu keine Const zu addiren ist, weil für x = o auch W = o wird. Demnach für jede Abscisse x die Fläche

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x\sqrt{(c^2+e^2x^2)}}{4c} \\ +\frac{c}{4e}\log\frac{ex+\sqrt{(c^2+e^2x^2)}}{c} \end{array} \right\} a \tan g\eta.$$

Man kann diesem Ausdrucke noch eine etwas bequemere Form zur Berechnung geben, wenn man einen Winkel ψ sucht, dessen Tangente $= \frac{ex}{c}$, so daß $\tan g\,\psi = \frac{ex}{c}$ und also $\sqrt{(c^2+e^2x^2)} = c \sec\psi$ wird. Dann erhält man

$$W = (\tfrac{1}{4}x \sec\psi + \frac{c}{4e}\log(tg\,\psi + \sec\psi))\, a\,.\,tg\eta$$

d. h.

$$W = \left(\frac{x}{4}\sec\psi + \frac{c}{4e}\log tg(45^0 + \tfrac{1}{2}\psi)\right) a\,.\,tg\eta$$

3. Verlangt man die Fläche des hufförmigen Abschnittes von B bis Q, also die Hälfte der ganzen krummen Fläche über HBQ, so setzt man $x = \frac{c}{2}$; dann wird die krumme Fläche über BQ $= a \tan g\,\eta \times \left(\tfrac{1}{8}a + \frac{c^2}{8\sqrt{(a^2-c^2)}}\log\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}+a}{c}\right)$; also die ganze krumme Fläche des Abschnittes über HBQ $=$

$$\tfrac{1}{4}a \tan g\,\eta\left(a + \frac{c^2}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\log\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}+a}{c}\right)$$

wo

wo statt $\frac{1}{2}$a tang η auch die Linie BM = h gesetzt werden kann.

4. Für a = c d. h. wenn die Ellipse zu einem Kreise wird, kann die gefundene Formel nicht geradezu gebraucht werden. Aber dann wird schlechtweg $y\,ds' = \frac{1}{2}a\,dx$ und $\int y\,ds = \frac{1}{2}ax$ und folglich die Fläche $W = \frac{1}{2}ax \tan\eta$, welches für $x = \frac{1}{2}a$ die Fläche des Abschnitts über dem Kreisquadranten $BQ = \frac{1}{4}a^2 . \tan\eta = \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}a \tan\eta =$ KB . BM = den doppelten Fläche des Dreyecks KBM geben würde.

5. Ist g nicht = 0, geht also die Durchschnittslinie LN nicht durch den Mittelpunkt K, so muß man zu dem (1) gefundenen Ausdruck noch $- gs . \tan\eta$ (1) hinzusetzen, wo s den der Abscisse Kp = x zugehörigen elliptischen Bogen Bb bezeichnet, den man durch die Rectificationsmethode (§. 61.) am bequemsten würde bestimmen können.

6. Für x = LC = k (§. 45.) erhält man das Stück der krummen Seitenfläche des hufförmigen Abschnittes von B bis L, in welchem Fall denn zugleich s den elliptischen Bogen von B bis L bezeichnen muß.

7. Geht die Durchschnittslinie LN durch A, so daß der Punkt L in A fällt, und man also die krumme Fläche des cylindrischen Abschnit-

schnittes zwischen der halben Ellipse BQA und dem Bogen MσA des Schnittes verlangte, so ist in diesem Falle x oder k = o und KC oder g = $-\frac{1}{2}$ a (so wie überhaupt g negativ ist, wenn die Durchschnittslinie LN linker Hand K z. E. in q h fällt) demnach schlechtweg W = $\frac{1}{2}$ a . s . tang η = $\frac{1}{2}$ h . s (wegen tang η in diesem Falle = tang MAB = $\frac{BM}{AB.}$ = $\frac{h}{a}$) d. h. $\frac{1}{2}$ BM oder $\frac{1}{2}$ h multiplicirt in den halben elliptischen Umfang BQA der Grundfläche; folglich würde man die krumme Seitenfläche zwischen dem ganzen Umfang der Ellipse AQBH und dem Umfange des Schnittes AσMτA bekommen, wenn man jenen ganzen Umfang der Ellipse in $\frac{1}{2}$ BM multiplicirte.

8. Ist also BQAH ein Kreis, dessen Durchmesser = a, so würde die erwähnte krumme Seitenfläche (7) = $\frac{1}{2}$ a π . h.

Zweytes Beyspiel.

9. Es sey die Grundfläche des hufförmigen Abschnitts eine Ellipse, worin jetzt QH = a die große Axe, und BA = c die kleine sey, so ist nunmehr die Gleichung zwischen y und x

$$y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2$$

und

ohne merklichen Fehler $\frac{a}{c} = 1 + \frac{1}{8} e^2$. Demnach der logarithmische Ausdruck $= \frac{2c}{e} \log (1 + \frac{1}{2} e + \frac{1}{8} e^2)$.

Man setze $\frac{1}{2} e + \frac{1}{8} e^2 = m$ so ist $\log (1+m) = m - \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{3} m^3$. Setzt man nun wieder statt m seinen Werth, und nimmt nur die Glieder bis zur dritten Potenz von e, so erhält man $\frac{2c}{e} \log (1 + \frac{1}{2} e + \frac{1}{8} c^2) = \frac{2c}{e} (\frac{1}{2} e - \frac{1}{48} e^3) = c - \frac{1}{24} c . e^2$ (oder statt e^2 seinen Werth $\frac{4(a^2 - c^2)}{c^2}$ gesetzt) $= e - \frac{1}{6} \frac{(a^2 - c^2)}{c}$.

13. Dieß giebt demnach in (3) die krumme Fläche über BQ $= \frac{1}{3} a \tang \eta \left(a + c - \frac{1}{6} \frac{a^2 - c^2}{c}\right)$ für den Fall wenn $\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{c}$ eine sehr kleine Grösse ist. Die Aehnlichkeit dieses Ausdrucks mit dem in (11) bedarf keiner weitern Erläuterung.

14. Sowohl für (11) als (13) kann man die krumme Fläche immer ohne merklichen Fehler = dem Ausdrucke setzen, der heraus kömmt, wenn

wenn man das Glied, worin $a^2 - c^2$ vorkömmt, als unbeträchtlich wegläßt.

Drittes Beyspiel.

15. Für die krumme Seitenfläche eines parabolischen hufförmigen Abschnittes (§. 46.) hat man (Taf. 2), die Abscissen v von B angerechnet; $y = g = f - v$; $dy^2 + dx^2 = ds^2 = dz^2 + dv^2 = \frac{\alpha^2 dv^2}{4\alpha v} + dv^2 = \frac{\alpha + 4v}{4v} dv^2$; demnach in (§. 71. 1.)

$$dW = \left((f - v)\, dv \sqrt{\left(\frac{\alpha + 4v}{4v}\right)}\right) \tan \eta$$

Also wegen $\int dv \sqrt{\frac{\alpha + 4v}{4v}} = s$

$$W = \left(f.s - \int v\, dv \sqrt{\left(\frac{\alpha + 4v}{4v}\right)}\right) \tan \eta$$

wo s den der Abscisse BV = v zugehörigen parabolischen Bogen Rb (Fig. 18.) bedeutet, dessen Werth man nach (§. 56. 4.) bestimmen kann, wenn man das dortige b hier $= \alpha$, und das dortige $x = v$ setzt. Also hat man erstlich

$$f.s = \tfrac{1}{2} f \sqrt{(\alpha v + 4v^2)}$$
$$+ \tfrac{1}{8} f \alpha \log \frac{8v + \alpha + 4\sqrt{(\alpha v + 4v^2)}}{\alpha}$$

Nun ist aber ferner (Integralf. §. XIII. 3.)

$$\int v\,dv\sqrt{\frac{\alpha+4v}{4v}} = \tfrac{1}{2}\int dv\sqrt{(\alpha v+4v^2)} =$$

$$\frac{(8v+\alpha)\sqrt{(\alpha v+4v^2)}}{32} - \frac{\alpha^2}{128}\log\frac{8v+\alpha+4\sqrt{(\alpha v+4v^2)}}{\alpha}$$

Substituirt man demnach diese Werthe in den Ausdruck für W, so wird

$$W = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\left(f - \frac{8v+\alpha}{16}\right)\sqrt{(\alpha v+4x^2)} \\ +\frac{1}{8}\left(f+\frac{\alpha}{16}\right)\alpha\log\frac{8v+\alpha+4\sqrt{(\alpha v+4v^2)}}{\alpha} \end{matrix}\right\}\tan\eta$$

Verlangt man nun die Seitenfläche des hufförmigen Abschnittes von B bis L, so setzt man nur in den gefundenen Ausdruck $v = BC = f$; und soll die dem ganzen Bogen LBN entsprechende krumme Seitenfläche gefunden werden, so muß der herausgekommene Werth noch duplirt werden.

16. Es wird nicht nöthig seyn, den Gebrauch und die Anwendung der Formel (1) noch durch mehrere Beyspiele zu erläutern.

17. Hat man hufförmige Abschnitte von schiefen Cylindern, so werden die Formeln für die Seitenflächen dieser Abschnitte zu verwickelt, als daß sich davon für die Ausübung ein großer Nutzen erwarten ließe, zumahl wenn die Abschnitte so beschaffen sind, daß man dabey auch

auf den Winkel z (§. 66.) mit Rücksicht nehmen muß. Daher ich diese Fälle, da sie in der Ausübung doch ohnehin eben nicht vorkommen, der Weitläuftigkeit wegen übergehe.

18. Auch wird es nicht schwer seyn, die krumme Seitenfläche von andern Abschnitten cylindrischer Körper z. B. wie (§. 34.) aus den bisherigen Sätzen abzuleiten, wenn dergleichen Abschnitte in der Ausübung vorkommen sollten. Man darf hier nur bey der krummen Seitenfläche den Gang befolgen, der oben bey der Bestimmung des körperlichen Raumes solcher Abschnitte angewandt worden ist.

19. Für die krumme Seitenfläche $AH\tau$ eines Cylinderstücks $AH\tau hK$ wie §. 34. IV. und Fig. 76. Tab. VI. sey das der Abscisse $At = x$ zugehörige Stück Fläche $Ahn = S$, so ist das unendlich schmale Stückchen Fläche $hn\nu\lambda$ zwischen den unendlich nahen Schnitten hnm, $\lambda\nu\mu$, welches sich ohne merklichen Irrthum als ein Rechteck betrachten läßt $= dS$ $= h\lambda \cdot hn = h\lambda \cdot tm = ds \cdot x \tang \eta$ wenn $h\lambda$ oder das Element des Bogens $Ah = ds$ genannt wird.

Dieß giebt wegen $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ $= \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$

$$S = r \tang \eta . \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$
$$= - r \tang \eta \sqrt{(2rx - x^2)}$$
$$+ r^2 \tang \eta \, \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$$
$$= r \tang \eta \left(- y + r . \mathfrak{B} \sin \frac{y}{r}\right)$$

wozu keine Const. zu addiren ist, weil für $y = 0$ auch S, wie sichs gehört, $= 0$ wird.

Setzt man also $y = KH = k$, so wird die Fläche $AHr = r \tang \eta \left(- k + r . \mathfrak{B} \sin \frac{k}{r}\right)$ d. h. = dem Unterschiede des Bogens AH und seines Sinus KH multiplicirt in $r \tang \eta$; denn $AH = r . \mathfrak{B} \sin \frac{k}{r}$. Den zur Berechnung nöthigen Halbmesser r kann man, wenn $AK = f$ genannt wird, durch die Formel

$$r = \frac{k^2 + f^2}{2f} \quad (\S. 34. \text{ IV.})$$

finden, und $\tang \eta$ kann aus $AK = f$ und $Kk = h$ gefunden werden, indem $\tang \eta = \frac{h}{f}$.

Vier-

Viertes Kapitel.

Stereometrie pyramidenförmiger Körper.

§. 72.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines jeden pyramidenförmigen Körpers zu finden.

Aufl. 1. Man berechne den Quadratinhalt der Grundfläche der Pyramide, nach den Vorschriften welche im zweyten Kapitel bey den prismatischen Körpern gegeben worden sind, und multiplicire diesen Inhalt in den dritten Theil der Höhe der Pyramide.

Diese Regel gründet sich darauf, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma ist, welches mit der Pyramide einerley Grundfläche und Höhe hat.

Ist die Grundfläche durch eine unregelmäßige krumme Linie begränzt, so kann ihr Quadratinhalt durch Annäherungsmethoden wie (§. 44.) gefunden werden.

2. Was die Bestimmung der Höhe einer Pyramide betrifft, so kann solche, wenn es angeht, entweder unmittelbar gemessen, oder auch aus gewissen sonst an der Pyramide gemessenen Dingen berechnet werden.

Ist die Grundfläche (Fig. 42) z. B. eine geradlinigte Figur ABCDE, so kann die Höhe cG = h der Pyramide, aus einer gemessenen Seitenlinie z. B. Cc = c und den Winkeln BCc = α, cGD = β, BCD = γ, wie leicht erhellet ebenfalls nach der Formel (§§. 22. 23. 2c.) gefunden werden. Andere (§. 24. 9. 2c.) beygebrachte Bemerkungen finden auch bey der Pyramide ihre Anwendung, und bedürfen keiner weitern Erläuterung. Bey sehr hohen Pyramiden würde man die Höhe aus einer angenommenen Standlinie nach den Verfahren des XVI. Kapitels der practischen Geometrie bestimmen müssen.

§. 73.

Aufgabe.

Es sey (Fig. 43) eine gleichseitige Pyramide d. h. die Grundfläche ABCDEF ein reguläres Vieleck z. B. von n Seiten, und die Spitze c senkrecht über dem Mittelpunkt G der Grundfläche, mithin die Seitenlinien Bc = Cc = Dc u. s. w. Der Neigungswinkel einer jeden Seitenfläche z. B. BCc gegen die

Grund-

Grundfläche $=\eta$, nebst der Polygonseite BC $=a$ ist gegeben, daraus den körperlichen Inhalt der Pyramiden zu berechnen.

Aufl. 1. Man ziehe von G nach B den Halbmesser des Polygons, so ist der Winkel GBC = dem halben Polygonwinkel ABC den ich mit φ bezeichnen will. Also GBG $=\frac{1}{2}\varphi$.

2. Die drey Winkel cBG, GBC, cBC bilden an der Ecke B ein sphärisches Dreyeck, welches besonders in (Fig. 44) abgebildet ist, wo ab, be, ae Kreisbogen darstellen, welche mit einerley Halbmesser aus der gemeinschaftlichen Spitze B der drey erwähnten Winkel beschrieben sind.

3. In diesem sphärischen Dreyecke ist der Winkel abe $=90^{0}$, weil die Ebene cBG auf der des Winkels GBC senkrecht ist. Ferner der Winkel aeb = dem Neigungswinkel der Ebene cBC gegen GBC $=\eta$; und der Bogen be = dem Maaße des Winkels GBC $=\frac{1}{2}\varphi$.

4. Aus diesen gegebenen Stücken findet sich für den Bogen ab, oder für das Maaß des Winkels cBG $=i$, unter welchem die Seitenlinien der Pyramide gegen die Grundfläche geneigt sind, nach der sphärischen Trigonometrie die Gleichung

$$\tan i = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \tan \eta.$$

 5. Also

2. Was die ... $Gc = BG \cdot \tang i =$
Pyramide betrifft ... $Gc = \sqrt{(Bc^2 - BG^2)}$
angeht, ent... Perpendikel von G auf die
auch aus ge... $GM = BG \sin \frac{1}{2}\varphi$; und
messenen Di... $\frac{C}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{a}{2 \cos \frac{1}{2}\varphi}$.

Ist die ...
geradlin... der Flächenraum des Dreyecks
Höhe ... $\frac{1}{2}\varphi \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2 \tang \frac{1}{2}\varphi$ (6)
senen ... Polygons $= \frac{1}{4} n a^2 \tang \frac{1}{2}\varphi$.
keln P...
leic... die Höhe $Gc = \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{2}\varphi \tang \eta$
23... der körperliche Inhalt der Pyra-
ben ... $a^3 \tang \frac{1}{2}\varphi^2 \tang \eta$. (§. 72. 1.)

§. 74.
Zusatz I.

...angte man aus den gegebenen Stücken ... den Seitenlinien der Pyramide z.B. ... ist solche $= BG \sec cBG = BG \sec i =$ $\frac{... i}{... \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2} a \sec i \sec \frac{1}{2}\varphi$. (§. 73. 6.)

§. 75.
Zusatz II.

In dem oben erwähnten sphärischen Dreyeck (§. 73. 3.) ist auch $\cot ae = \cos aeb \cdot \cot be$ d. h.

$$\cot cBC = \cos \eta \cot \tfrac{1}{2}\varphi$$

oder

$ae = \cos ab . \cos be$ §. 5.
$\cos CBC = \cos i \cos \frac{1}{2}\varphi$

§. 76.

Zusatz III.

Gedenkt man sich von c ein Perpendikel cM auf die Polygonseite, und nun GM gezogen, so ist der Triangel cGM in G rechtwinklicht, und der Winkel $cMG = \eta$; demnach

$$Mc = Gc . \operatorname{cosec}\eta = BG \sin\tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tang}\eta \operatorname{cosec}\eta$$
$$= \tfrac{1}{2}a \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{1}{\cos\eta} = \tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \sec\eta$$

(§. 73. 5, 6.)

§. 77.

Zusatz IV.

1. Der Polygonwinkel selbst wird durch die Gleichung

$$\varphi = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

bestimmt: Also

$$\tfrac{1}{2}\varphi = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

Dieß giebt den körperlichen Inhalt der Pyramide (§. 73. 8.)

$$P = \tfrac{1}{24} n a^3 \left(\cot\frac{180}{n}\right)^2 \operatorname{tang}\eta$$

 2. Für

2. Man gedenke sich von der Spitze der Pyramide c, das Perpendikel cg auf die Schnittebene, so ist dieses die Höhe des von der ganzen Pyramide DEFc weggeschnittenen Theiles defc, der ebenfalls eine Pyramide vorstellet, deren körperlicher Inhalt $= \frac{1}{3}$ cg . 𝔅, wenn 𝔅 den Quadratinhalt der Durchschnittsfigur def bedeutet, den man bey der vorgegebenen abgekürzten Pyramide leicht wird berechnen können.

3. Nun sey cG das Perpendikel von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche DEF, deren Quadratinhalt $=$ B heiße, so ist der Cubikinhalt der ganzen Pyramide $= \frac{1}{3}$ cG . B Demnach der Cubikinhalt der abgekürzten Pyramide zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche $= \frac{1}{3}$(cG . B — cg . 𝔅).

4. Wenn bloß die abgekürzte Pyramide vorgegeben ist, so hält es schwer, die Höhen cG, cg unmittelbar zu messen. Man könnte zwar versuchen, die weggeschnittene Spitze c der Pyramide dadurch wieder zu finden, daß man z. B. an die Eckkanten oder Seitenlinien wie Ee, Ff Liniale anlegte, die sich denn in der gesuchten Spitze c durchschneiden würden, aber immer wird es doch mißlich seyn, von dieser Stelle c gehörig die Perpendikel cg, cG zu fällen und zu messen. Es ist daher, wenn man genau verfahren will, kein anderes Mittel

übrig,

übrig, als diese Perpendikel aus gewissen Abmessungen, die man an der abgekürzten Pyramide leicht anstellen kann, zu berechnen.

5. Hiezu bieten sich mehrere Mittel dar. Man messe z.B. an einer beliebigen Seitenfläche EeFf einen Winkel wie Eef, und den Neigungswinkel den diese Seitenfläche mit der Schnittfläche def macht (§. 24. 10.) und nun noch außerdem ein paar Linien z.B. Ee, EF, so kann man daraus die Höhe cg finden.

Man gedenke sich von c ein Perpendikel cn auf die Linie ef, und nk sey die Verlängerung von cn, so ist, wenn gn gezogen wird, auch gn auf ef senkrecht, und gnk der Neigungswinkel der Schnittebene def gegen die Seitenfläche EeFf, den man leicht an jedem andern Punkte r der Kante ef messen kann, wenn man durch r zwey Perpendikel auf ef zieht, eines rp in der Ebene def, das andere rs in der Ebene EeFf.

Nun würde man haben

$cn = ce . \sin cen = ce . \sin Eef$ und

$cg = cn . \sin cng = ce \sin Eef . \sin cng =$
$ce . \sin Eef . \sin prs$, weil $prs = gnk = 180^\circ - cng$

6. Um aber in diesem Ausdrucke den Werth von ce zu erhalten, ziehe man $e\varepsilon$ parallel mit Ff, und gedenke sich durch e auch eine Paral-

lele

In dem Falle, daß der Schnitt def (Fig. 46) der Grundfläche DEF parallel ist, lassen sich für den Inhalt der abgekürzten Pyramide bequeme Formeln auf folgende Art finden.

11. Weil jetzt das Perpendikel cg auf die Schnittfläche 𝔅, mit dem cG auf die Grundfläche B, in eine gerade Linie fällt, und also Gg = h die Höhe des zwischen DEF und def enthaltenen Pyramidenstücks ausdrückt, so nenne man die unbekannte Höhe cg = x; dann ist Gc = h + x und nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie

$B : \mathfrak{B} = Gc^2 : gc^2$ d. h.

$B : \mathfrak{B} = (h + x)^2 : x^2$

Demnach $\sqrt{B} : \sqrt{\mathfrak{B}} = h + x : x$.

Und nach der Lehre von den Proportionen (Kästners Arithm. 34. III — IV.)

$\sqrt{B} - \sqrt{\mathfrak{B}} : \sqrt{\mathfrak{B}} = h : x$

$\sqrt{B} - \sqrt{\mathfrak{B}} : \sqrt{B} = h : h + x$

Demnach

$$gc \text{ oder } x = \frac{h\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{B} - \sqrt{\mathfrak{B}}}$$

$$Gc \text{ oder } h + x = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{\mathfrak{B}}}$$

Substituirt man diese Werthe statt gc, Gc in den Ausdruck (3) für die abgekürzte Pyramide, die ich mit P bezeichnen will, so wird

P =

$$P = \frac{1}{3}h \cdot \frac{B\sqrt{B} - \mathfrak{B}\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{B} - \sqrt{\mathfrak{B}}}$$

welcher Ausdruck sich noch dadurch abkürzen läßt, daß man Zähler und Nenner dieses in $\frac{1}{3}h$ multiplicirten Bruches mit $\sqrt{B} + \sqrt{\mathfrak{B}}$ multiplicirt. Denn man erhält

$$(B\sqrt{B} - \mathfrak{B}\sqrt{\mathfrak{B}})(\sqrt{B} + \sqrt{\mathfrak{B}}) = (B + \mathfrak{B} + \sqrt{B\mathfrak{B}})(B - \mathfrak{B})$$

Und $(\sqrt{B} - \sqrt{\mathfrak{B}})(\sqrt{B} + \sqrt{\mathfrak{B}}) = B - \mathfrak{B}$

Demnach die abgekürzte Pyramide

$$P = (B + \mathfrak{B} + \sqrt{B\mathfrak{B}})\frac{1}{3}h$$

d. h. zur Summe der beyden Grundflächen B und $\mathfrak{B}$ die Quadratwurzel ihres Produkts addirt, und alles in den dritten Theil der Höhe $h = Gg$ der abgekürzten Pyramide multiplicirt, welche Höhe h man denn entweder unmittelbar messen, oder auch aus der Linie Ee, und den drey ebenen Winkeln, welche die Ecke bey E bilden, berechnen kann. Denn aus diesen Winkeln $eEF = \alpha$, $eED = \beta$, $DEF = \gamma$. findet man nach der Formel (§. 27.) den Neigungswinkel i, welchen die Seitenlinie Ee der Pyramide mit der Grundfläche DEF machen würde, und hieraus $h = Ee \cdot \sin i$.

12. Man kann dem für P gefundenen Ausdrucke noch eine einfachere Form geben, so daß

in ihr nicht allein die Berechnung der Schnittfläche $\mathfrak{B}$, sondern auch die unbequeme Ausziehung der Quadratwurzel erspart wird.

Man messe in der Grundfläche und der ihr ähnlichen Schnittfläche ein paar gleichnahmigte Linien z.B. EF = m und ef = n, so hat man

$$B : \mathfrak{B} = m^2 : n^2$$

$$\sqrt{B} : \sqrt{\mathfrak{B}} = m : n$$

also $\sqrt{\mathfrak{B}} = \frac{n\sqrt{B}}{m}$ und

$$\sqrt{\mathfrak{B}} . \sqrt{B} \text{ oder } \sqrt{B\mathfrak{B}} = \frac{nB}{m}$$

Demnach $P = \frac{1}{3} h B \left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right)$

§. 80.

Zusatz.

Für einen abgekürzten Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis von dem Halbmesser R, die Schnittfläche ein Kreis von dem Halbmesser r ist (Fig. 47), würde man $B = R^2 \pi$; $\mathfrak{B} = r^2 \pi$ und $\sqrt{B\mathfrak{B}} = Rr\pi$ erhalten, demnach den körperlichen Inhalt des abgekürzten Kegels

$$= \frac{1}{3} h \pi (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$= \frac{1}{3} h \pi ((R + r)^2 - Rr)$$

§. 81.

§. 81.

Anmerkung.

Aus dem bisherigen wird erhellen, wie man den Inhalt eines jeden eckigten Körpers, d. h. eines solchen, dessen Oberfläche aus lauter ebenen Flächen zusammengesetzt ist, würde berechnen können. Die ganze Oberfläche eines solchen Körpers läßt sich ohne Zweifel in lauter Dreyecke zerlegen, und auch durch jede drey Eckpunkte des Körpers läßt sich ein Dreyeck gedenken, von dem allemahl wenigstens eine Seite zugleich eine Kante an der Oberfläche des Körpers ist, die beyden andern aber, wenn sie nicht auch Kanten sind, doch leicht quer durch den Körper gemessen werden können, wenn man den Abstand der beyden Eckpunkte, durch welche sie gehen, mit einem Zirkel oder, wenn der Körper zu groß ist, mit einem andern dazu dienlichen Werkzeuge abfasset. In jedem solchen Dreyecke kann man nun die Winkel theils unmittelbar an der Oberfläche des Körpers messen (§. 24. 10.) theils sie auch aus den gemessenen Seiten berechnen, oder auch, durch Aufzeichnung des Dreyecks auf dem Papiere, messen. Ist nun ein Körper vorgegeben, so wird die Betrachtung desselben leicht ausweisen, wie er sich durch Hülfe der sowohl an seiner Oberfläche selbst vorkommenden Dreyecke, als auch der-

jenigen, welche sich quer durch den Körper hindurch gedenken lassen, am bequemsten in lauter zusammenhängende dreyeckigte Pyramiden, von denen keine in die andere eingreift, wird zerlegen lassen. Da nun in jeder solchen Pyramide alle Winkel und Seiten der Dreyecke, woraus sie zusammengesetzt ist, als vollkommen bekannt angesehen werden können, so ist klar, daß wenn man eines von diesen Dreyecken zur Grundfläche der Pyramide annimmt, man erstlich den Inhalt desselben aus den bekannten Seiten und Winkeln finden kann, sodann die Höhe der Pyramide (§.72.2.) und den körperlichen Inhalt. So erhält man den Inhalt einer jeden einzeln von den gedachten Pyramiden, und hierauf, durch Summirung aller, den Cubikinhalt des vorgegebenen Körpers.

Freylich wird die Rechnung oft beschwerlich ausfallen, aber geometrisch läßt sich nun einmahl nicht anders verfahren. In einzeln Fällen, z. B. bey eckigten Körpern, welche durch allerley Abschnitte von Prismen und Pyramiden entstehen, bieten sich Vortheile und Abkürzungen dar, die wir aber der Betrachtung eines jeden selbst überlassen wollen. Hier war hinlänglich, die Möglichkeit einer solchen Berechnung gezeigt zu haben, wozu sich ein jeder leicht selbst ein Beyspiel wird machen können. Hier will ich die Formeln für den

Cubik-

Kubikinhalt der so genannten regulären Körper d. i. solcher, deren Oberfläche durch lauter gleiche reguläre Vielecke gebildet ist, mittheilen, weil sie unmittelbar von der Berechnung der Pyramiden abhängen. Vorher muß ich aber folgende Aufgabe beybringen.

§. 82.

Aufgabe.

Eine körperliche Ecke c (Fig. 43. Tab. III.) sey durch eine gewisse Anzahl = m ebener Winkel gebildet, welche alle von gleicher Grösse seyen, man verlangt den Neigungswinkel den die Ebenen zweyer solcher nächst an einander liegenden Winkel z. B. BcC und AcB mit einander machen.

Aufl. 1. Man nehme auf den Schenkeln dieser Winkel die Längen cB, cC, cD, cE u. s. w. alle von gleicher Grösse, und hänge die Punkte B, C, D, E u. s. w. durch gerade Linien zusammen, so ist, wie leicht von selbst erhellet, die Figur BCDEFA ein reguläres Vieleck von m Seiten, und c senkrecht über dem Mittelpunkt G dieses Vielecks.

2. Zieht man nun z. B. den Halbmesser GB, so steht die Ebene cGB auf der Ebene des

des Vielecks senkrecht, und halbirt den Neigungswinkel den die zwey Ebenen cBC, cBA miteinander machen würden, welchen Neigungswinkel ich mit 2γ bezeichnen will.

3. Auch halbirt GB den Polygonwinkel ABC $= 180^0 - \frac{360^0}{m}$, so daß GBC $=$

$$90^0 - \frac{180^0}{m}.$$

4. Nennt man nun einen von den Winkeln um c z. B. BcC $= \psi$, so ist cBC $= 90^0 - \frac{1}{2}\psi$ und nun in der rechtwinklichten körperlichen Ecke bey B, oder in dem bey b rechtwinklichten sphärischen Dreyecke abc (§. 73. 2. und Fig. 44)

die Hypothenuse ae $= 90^0 - \frac{1}{2}\psi$

$$\text{Seite be} = 90^0 - \frac{180^0}{m} \quad (3)$$

Winkel bae $= \gamma$

demnach für den (2) zu suchenden Neigungswinkel bae, $\sin \text{bae} = \frac{\sin \text{be}}{\sin \text{ae}}$ oder $\sin \gamma =$

$\frac{\cos \frac{180^0}{m}}{\cos \frac{1}{2}\psi}$, woraus denn der Neigungswinkel $= 2\gamma$ selbst bekannt ist.

§. 83.

Aufgabe.

Es sey nunmehr (Fig. 48. Tab. IV.) ABCDEF ein Stück von der Oberfläche eines regulären Körpers, so daß man sich die Figuren ABC = CBD = CDE = EDF u. s. w. (sie seyen nun wie bey dem Tetraedrum, Octaedrum und Icosaedrum reguläre Dreyecke, oder wie bey dem Würfel Quadrate, oder wie bey dem Dodecaedrum reguläre Fünfecke) als die einzeln Seitenflächen des regulären Körpers, gehörig unter ihren Neigungswinkeln gegen einander gedenken muß; man verlangt den Kubikinhalt des ganzen Körpers aus der gegebenen Seitenlinie oder Kante desselben.

Aufl. I. Es sey c der Mittelpunkt des regulären Körpers, oder vielmehr der Mittelpunkt einer um diesen Körper beschriebenen Kugel, so ist aus der Beschaffenheit dieser Körper klar, daß wenn man nach allen körperlichen Ecken A, B, C, D u. s. w. die Halbmesser cA, cB, cC, cD u. s. w. zieht, der ganze Körper dadurch in lauter gleichseitige Pyramiden von gleicher Grösse zerlegt wird. c ist die gemeinschaftliche Spitze dieser Pyramiden, und jede hat zu ihrer Grundfläche eines von den

regulären Polygonen ABC, CBD, CDE u. s. w. woraus des Körpers Oberfläche zusammengesetzt ist.

II. Ist nun z. B. CDBc eine von diesen Pyramiden, deren an der Zahl N den ganzen Raum des Körpers erfüllen, so ist von einer solchen Pyramide bekannt

1) die Grundfläche CBD, ein reguläres Polygon von n Seiten, jede Seite CB = BD = CD = a = der Seitenlinie oder Kante des regulären Körpers.

2) Der Neigungswinkel jeder von den Seitenflächen einer solchen Pyramide gegen die Grundfläche CBD. Denn eine jede solche Seitenfläche z. B. cDC an der Kante CD, halbirt den Neigungswinkel $= \gamma$ den die an dieser Kante sich durchschneidenden Ebenen BCD, CDE mit einander machen, und dieser Neigungswinkel bestimmt sich aus der Menge m der gleich großen ebenen Winkel ACB = BCD = DCE = ψ u. s. w. welche jede Ecke C des regulären Körpers bilden. Aber jeder solcher Winkel ψ ist der Polygonwinkel in dem Vielecke CBD d. h.

$$\psi = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

III.

III. Man hat demnach für den (II.) erwähnten Neigungswinkel nach (§. 82. 4.)

$$\sin\gamma = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\cos\frac{1}{2}\psi} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

IV. Hieraus ergiebt sich also der körperliche Inhalt einer solchen Pyramide (II.) nemlich

$$P = \tfrac{1}{24} n a^3 \left(\cot\frac{180^\circ}{n}\right)^2 \tang\gamma \quad (§. 77.)$$

wo das dortige η mit dem γ des gegenwärtigen § es einerley Bedeutung hat

V. Nun ist aber tang γ

$$= \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sqrt{\left(\left(\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2 - \left(\cos\frac{180^\circ}{m}\right)^2\right)}}$$

und machen nun N solche Pyramiden wie (IV) den Raum des regulären Körpers aus, den ich mit K bezeichnen will, so hat man

$$K = \tfrac{1}{24} N . n a^3 \frac{\left(\cot\frac{180^\circ}{n}\right)^2 \cos\frac{180^\circ}{m}}{\sqrt{\left(\left(\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2 - \left(\cos\frac{180^\circ}{m}\right)^2\right)}}$$

eine allgemeine Formel für den Inhalt eines jeden regulären Körpers, welcher durch N reguläre n Ecke, von denen allemahl m Polygonwinkel in eine körperliche Ecke zusammenstoßen, eingeschlossen ist.

Uebrigens ist bekannt, daß auch N selbst schon durch m und n bestimmt ist, welche Betrachtung aber hier weiter von keinem Nutzen ist.

VI. Verlangte man endlich auch den Halbmesser $L = cB = cC = cD$ des regulären Körpers, so findet sich solcher nach der Formel (§. 77. 2.)

$$L = \tfrac{1}{2} a \sec i \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$$

wo i einen Winkel bedeutet dessen Tangente

$= \cos \frac{180^\circ}{n} . \operatorname{tang} \gamma$. (IV. und §. 77. 2.)

Es wird also

$$\sec i = \sqrt{(1 + \operatorname{tang} i^2)}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \left(\cos \frac{180^\circ}{n}\right)^2 \operatorname{tang} \gamma^2\right)}$$

Oder wenn man tang γ aus (V.) substituirt nach einer leichten Rechnung

$$\sec i = \frac{\sin \frac{180^\circ}{n} \sin \frac{180^\circ}{m}}{\sqrt{\left(\left(\sin \frac{180^\circ}{n}\right)^2 - \left(\cos \frac{180^\circ}{m}\right)^2\right)}}$$

Dem-

Demnach wegen $\operatorname{cosec}\frac{180^{\circ}}{n} = \frac{1}{\sin\frac{180}{n}}$

$$L = \frac{1}{2}a\frac{\sin\frac{180^{\circ}}{m}}{\sqrt{\left(\left(\sin\frac{180^{\circ}}{n}\right)^2 - \left(\cos\frac{180^{\circ}}{m}\right)^2\right)}}$$

§. 84.

Hieraus findet man für die sogenannten 5 regulären Körper folgende Werthe:

I. Für das Tetraedrum ist die Anzahl der Seitenflächen oder $N = 4$, dann $n = 3$ und $m = 3$; also

$$\cot\frac{180^{\circ}}{n} = \cot 60^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\frac{180^{\circ}}{n} = \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{180^{\circ}}{m} = \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{180^{\circ}}{m} = \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substituirt man diese Werthe in (§. 83. III.), so wird für den Neigungswinkel der Seitenflächen

sin

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773502$$

also $\gamma = 35^\circ.\ 15'.\ 52''$ und der Neigungswinkel selbst $= 2\gamma = 70^\circ.\ 31'.\ 44''$

Ferner der körperliche Inhalt (§. 83. V.)

$$K = \frac{a^3}{6.\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = a^3.\ 0,1178511.$$

Und der Halbmesser

$$L = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = a.0,6123724.$$

II. Für das Octaedrum ist $N = 8$; $n = 3$; $m = 4$. Also (nach §. 83.)

$$\cot\frac{180^\circ}{n} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\frac{180^\circ}{n} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{180^\circ}{m} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{180^\circ}{m}$$

Also $\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,8164966$

Demnach $\gamma = 54^\circ.\ 44'.\ 8''$ und der Neigungswinkel der Seitenflächen $= 2\gamma = 109^\circ.\ 28'.\ 16''$.

Der

Der körperliche Inhalt

$$K = \frac{1}{3}a^3 . \sqrt{2} = a^3 . 0,4714045$$

und der Halbmesser

$$L = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = a . 0,7071068$$

III. Für das Icosaedrum ist

$$N = 20;\ n = 3;\ m = 5$$

Demnach

$$\cot\frac{180^0}{n} = \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\frac{180^0}{n} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{180^0}{m} = \sin 36^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ \cos\frac{180^0}{m} = \cos 36^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\end{array}\right\} (*)$$

Folglich $\sin\gamma = \frac{\cos 36^0}{\sin 60^0} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3}}$

Oder da hier besser mit Logarithmen zu rechnen ist

$$\log\sin\gamma = \log\cos 36^0 - \log\sin 60^0 + 10$$
$$= 19,9079576 - 9,9375306$$
$$= 9,9704270$$

Also

(*) Kästners Analysis endlicher Grössen 159

Also $\gamma = 69^\circ . 5' . 41''$ und folglich der Neigungswinkel der Seitenflächen $= 138^\circ . 11' . 23''$

Der körperliche Inhalt

$$K = a^3 . \tfrac{5}{6} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}.$$

Oder wenn man Zähler und Nenner des Bruchs unter dem Wurzelzeichen gemeinschaftlich mit $\sqrt{5}+3$ multiplicirt

$$K = a^3 . \tfrac{5}{6} \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{4}} = a^3 . \tfrac{5}{6} . \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Oder $K = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5}) . a^3 = a^3 . 2,1816950$

Der Halbmesser

$$L = \tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$$

oder wenn man den Zähler und Nenner des Bruchs unter dem Wurzelzeichen mit $3+\sqrt{5}$ multiplicirt.

$$L = \tfrac{1}{4} a \sqrt{(10+2\sqrt{5})}$$
$$= a \sin 72^\circ = a . 0,9510565.$$

IV. Für den Würfel oder Hexaedrum ist

$N = 6;\ n = 4;\ m = 3$

Also

Also $\cot \frac{180^\circ}{n} = \cot 45^\circ = 1$

$\sin \frac{180^\circ}{n} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \frac{180^\circ}{m} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{180^\circ}{m} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Also $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$; und $\gamma = 45^\circ$ mithin der Neigungswinkel der Seitenflächen wie bekannt $= 90^\circ$.

Der körperliche Inhalt $K = a^3$, und der Halbmesser $L = \frac{a.\sqrt{3}}{2} = a, 0,8660254$.

V. Für das Dodecaedrum ist

$N = 12;\ n = 5;\ m = 3$

Demnach

$\cot \frac{180^\circ}{n} = \cot 36^\circ = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$

$\sin \frac{180^\circ}{n} = \sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$

$\sin \frac{180^\circ}{m} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{180^\circ}{m} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Also

Also für den Winkel γ

$$\sin\gamma = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

oder $\sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}$ d. h. durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit $5+\sqrt{5}$

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

durch Logarithmen aber

$$\log\sin\gamma = \log\cos 60^\circ - \log\sin 36^\circ$$
$$= 9{,}6989700 - 9{,}7692187 + 10 =$$
$$9{,}9297513.$$ Also $\gamma = 58^\circ.16'.57''$ und

2γ oder der **Neigungswinkel** der Seitenflächen $= 116^\circ.33'.54''$.

Für den **körperlichen Inhalt** erhält man wegen

$$(\cos 36^\circ)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

$$K = \tfrac{1}{2}a^3 \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}}$$

$$= a^3 \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{(6-2\sqrt{5})}} = a^3\sqrt{\frac{45+20\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}}$$

oder wenn man die Irrationalität in dem Nenner durch gemeinschaftliche Multiplication des

Zäh-

lers und Nenners mit $6+2\sqrt{5}$ weg-
fft

$$K = a^3 . \sqrt{\frac{235+105\sqrt{5}}{8}}$$

ist $\sqrt{5} = 2,2360679774909978$; folg-
die Grösse unter dem Wurzelzeichen =
= 58,7233922045 6934, und die Wurzel daraus
7,6631189. Also der körperliche
Inhalt

$$K = a^3 . 7,6631189$$

an könnte aber, um diesen Inhalt zu fin-
, auch nach der trigonometrischen Formel
83. V.) rechnen. Denn es ist

$$K = \tfrac{5}{2} a^3 \frac{(\cot 36^0)^2 . \cos 60^0}{\sqrt{((\sin 36^0)^2 - (\sin 30^0)^2)}}$$

an ist aber der Unterschied der Quadrate
dem Nenner dieses Bruchs auch =

$$(\sin 36^o + \sin 30^o)(\sin 36^o - \sin 30^o) =$$
$$\sin 33^o \cos 3^o . 2 \cos 33^o \sin 3^o = \sin 66^o . \sin 6^o$$

lso

$$K = \tfrac{5}{2} a^3 \frac{(\cot 36^0)^2 \cos 60^0}{\sqrt{(\sin 66^0 . \sin 6^0)}}$$

welches leicht durch Logarithmen zu berechnen ist.

Für den Halbmesser L erhält man

$$L = a \sqrt{\frac{3}{6 + 2\sqrt{5}}}$$
$$= \tfrac{1}{4} a \sqrt{(18+6\sqrt{5})}$$
$$= a . 1,4012585$$

[illegible]

für das [illegible] ist $a = \frac{L}{[illegible]} =$ 1,1[illegible]... und der Cubikinhalt

$$K = 1,3 \cdot \frac{0,117\ldots}{(0,612\ldots)^3}$$

welches sich denn durch Logarithmen berechnen ließe. Es ist aber nicht unnütz, auch auf die ursprünglichen Formeln zurückzugehen, aus denen sich umgekehrt a und K durch L ausdrücken lassen. So war z. B. für das Tetraeder

[illegible]

woraus

woraus umgekehrt $a = L.\frac{2}{3}\sqrt{6}$, und $K = L^3.\frac{8}{27}\sqrt{3}$ folgt. Verfährt man auf diese Weise auch für die übrigen regulären Körper, so erhält man der Ordnung nach

für das Tetraedrum

$$a = L.\tfrac{2}{3}\sqrt{6} = L.\ 1{,}6329931$$
$$K = L^3.\tfrac{8}{27}\sqrt{3} = L^3.\ 0{,}5132002$$

für das Octaedrum

$$a = L\sqrt{2} = L.\ 1{,}4142136$$
$$K = L^3.\tfrac{4}{3} = L^3.\ 1{,}3333333$$

für das Icosaedrum

$$a = L.\ 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = L.\ 1{,}0514622$$
$$K = L^3.\tfrac{2}{3}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = L^3.\ 2{,}5361506$$

für den Würfel oder das Hexaedrum

$$a = L.\tfrac{2}{3}\sqrt{3} = L.\ 1{,}1547005$$
$$K = L^3.\tfrac{8}{9}\sqrt{3} = L^3.\ 1{,}5396007$$

für das Dodecaedrum.

$$a = L.\ \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} = L.\ 0{,}7136442$$
$$K = L^3.\tfrac{2}{9}(5\sqrt{3}+\sqrt{15}) = L^3.\ 2{,}7851638$$

§. 86.

Anmerkung.

I. Es ist bekannt, daß nicht mehr reguläre Körper, d. h. solche, welche nur durch einerley Art regulärer Vielecke begränzt werden, möglich sind, als die eben genannten fünfe. Ihr Inhalt kann also nach den angegebenen Formeln berechnet werden, wenn man entweder ihre Seitenlinie a, oder den Halbmesser L der Kugel, in welche sie beschrieben werden könnten, als gegeben ansieht. Diesen Halbmesser kann man erhalten, wenn man an einem solchen Körper den Abstand zweyer am weitesten von einander entfernten Ecken mißt, und dann diesen Abstand halbirt. Denn dieser Abstand ist der Durchmesser der Kugel, in welche der Körper beschrieben werden könnte.

II. Aber außer diesen 5 regulären so genannten Platonischen Körpern, giebt es noch viel andere, welche gleichfalls durch reguläre Vielecke, aber durch Vielecke von unterschiedener Art, begränzt werden, z. B. Körper, welche durch zweyerley oder gar dreyerley reguläre Vielecke, sämmtlich von gleichen Seiten begränzt werden, und sich gleichfalls in eine Kugel beschreiben lassen, so daß alle Eckpunkte in die Oberfläche der Kugel fallen würden. Man kann zeigen, daß mit Ausschluß solcher, welche in die Classe der Prismen oder Pyra-

miden

miden gehören würden, nicht mehr als 13 derselben möglich sind, nemlich 10, welche bloß durch zweyerley reguläre Vielecke, und drey, welche durch dreyerley begränzt werden. Die Zahl der regulären Vielecke, aus denen ihre Oberfläche zusammengesetzt ist, kann aus folgendem Täfelchen übersehen werden.

I. Körper deren Oberfläche bloß aus zweyerley regulären Vielecken besteht.

Nr. 1)	Aus	4	Dreyecken	und	4 Sechsecken
2)	=	8	=	=	6 Achtecken
3)	=	8	=	=	6 Quadraten
4)	=	8	=	=	18 Quadraten
5)	=	20	=	=	12 Zehnecken
6)	=	20	=	=	12 Fünfecken
7)	=	32	=	=	6 Quadraten
8)	=	80	=	=	12 Fünfecken
9)	=	6	Quadraten	und	8 Sechsecken
10)	=	12	Fünfecken	und	20 Sechsecken

II. Körper welche aus dreyerley regulären Vielecken gebildet sind.

Nr. 11) Aus 6 Achtecken 8 Sechsecken und 12 Quadraten

12) = 20 Dreyecken 30 Quadraten und 12 Fünfecken

13) = 30 Quadraten 20 Sechsecken und 12 Zehnecken

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773502$$

also $\gamma = 35^{\circ}.\ 15'.\ 52''$ und der Neigungswinkel selbst $= 2\gamma = 70^{\circ}.\ 31'.\ 44''$

Ferner der körperliche Inhalt (§. 83. V.)

$$K = \frac{a^3}{6.\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = a^3.\ 0{,}1178511.$$

Und der Halbmesser

$$L = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = a.\ 0{,}6123724.$$

II. Für das Octaedrum ist $N = 8$; $n = 3$; $m = 4$. Also (nach §. 83.)

$$\cot \frac{180^{\circ}}{n} = \cot 60^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{180^{\circ}}{n} = \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{180^{\circ}}{m} = \cos 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{180^{\circ}}{m}$$

Also $\sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}8164966$

Demnach $\gamma = 54^{\circ}.\ 44'.\ 8''$ und der Neigungswinkel der Seitenflächen $= 2\gamma = 109^{\circ}.\ 28'.\ 16''$.

Der

Der körperliche Inhalt

$$K = \tfrac{1}{3}a^3 . \sqrt{2} = a^3 . 0,4714045$$

Und der Halbmesser

$$L = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = a . 0,7071068$$

III. Für das Icosaedrum ist

$$N = 20;\ n = 3;\ m = 5$$

Demnach

$$\cot \frac{180^0}{n} = \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{180^0}{n} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{180^0}{m} = \sin 36^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \quad (*)$$

$$\cos \frac{180^0}{m} = \cos 36^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Folglich $\sin \gamma = \frac{\cos 36^0}{\sin 60^0} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3}}$

Oder da hier besser mit Logarithmen zu rechnen ist

$$\log \sin \gamma = \log \cos 36^0 - \log \sin 60^0 + 10$$
$$= 19,9079576 - 9,9375306$$
$$= 9,9704270$$

Also

(*) Kästners Analysis endlicher Grössen 159

Also für den Winkel γ

$$\sin\gamma = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$

oder $\sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}$ d. h. durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit $5+\sqrt{5}$

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

durch Logarithmen aber

$$\log\sin\gamma = \log\cos 60^\circ - \log\sin 36^\circ + 10$$
$$= 9{,}6989700 - 9{,}7692187 + 10 =$$
$$9{,}9297513.$$ Also $\gamma = 58^\circ.16'.57''$ und 2γ oder der Neigungswinkel der Seitenflächen $= 116^\circ.33'.54''$.

Für den körperlichen Inhalt erhält man wegen

$$(\cos 36^\circ)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$$

$$K = \tfrac{1}{2}a^3 \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}}$$

$$= a^3 \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{(6-2\sqrt{5})}} = a^3\sqrt{\frac{45+20\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}}$$

oder wenn man die Irrationalität in dem Nenner durch gemeinschaftliche Multiplication des

Zäh-

ählers und Nenners mit $6+2\sqrt{5}$ weg-
haſſt

$$K = a^3 . \sqrt{\frac{235+105\sqrt{5}}{8}}$$

Nun iſt $\sqrt{5} = 2,2360679774909978$; folg-
ch die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen =
$58,7233922045693\overline{4}$, und die Wurzel daraus
= 7,6631189. Alſo der körperliche
Inhalt

$$K = a^3 . 7,6631189$$

Man könnte aber, um dieſen Inhalt zu fin-
en, auch nach der trigonometriſchen Formel
§. 83. V.) rechnen. Denn es iſt

$$K = \frac{5}{2} a^3 \frac{(\cot 36^0)^2 . \cos 60^0}{\sqrt{((\sin 36^0)^2 - (\sin 30^0)^2)}}$$

Nun iſt aber der Unterſchied der Quadrate
n dem Nenner dieſes Bruchs auch =

$$(\sin 36^0 + \sin 30^0)(\sin 36^0 - \sin 30^0) =$$
$$2 \sin 33^0 \cos 3^0 . 2 \cos 33^0 \sin 3^0 = \sin 66^0 . \sin 6^0$$

Alſo

$$K = \frac{5}{2} a^3 \frac{(\cot 36^0)^2 \cos 60^0}{\sqrt{(\sin 66^0 . \sin 6^0)}}$$

welches leicht durch Logarithmen zu berechnen iſt.

Für den Halbmeſſer L erhält man

$$L = a\sqrt{\frac{3}{6-2\sqrt{5}}}$$
$$= \frac{1}{4} a\sqrt{(18+6\sqrt{5})}$$
$$= a . 1,4012585$$

Oder auch

$$L = \frac{1}{2} a \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{(\sin 66^\circ . \sin 6^\circ)}}$$

wenn man den Werth von L durch Hülfe der Sinustafeln berechnen wollte.

§. 85.

Anmerkung.

Wollte man den Halbmesser L der Kugel, in welche ein regulärer Körper beschrieben werden sollte, zur Einheit annehmen, so würde man umgekehrt daraus die Seitenlinie a, und den Cubikinhalt K des Körpers bestimmen können. Z. B. für das Tetraedum ist $a = \frac{L}{0{,}6123724} =$ $L . 1{,}63 \ldots$ und der Cubikinhalt

$$K = L^3 . \frac{0{,}117\ldots}{(0{,}612\ldots)^3}$$

welches sich denn durch Logarithmen berechnen ließe. Es ist aber nicht unnütz, auch auf die ursprünglichen Formeln zurückzugehen, aus denen sich umgekehrt a und K durch L ausdrücken lassen. So war z. B. für das Tetraedrum

$$L = a \frac{\sqrt{6}}{4}; K = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

woraus

woraus umgekehrt $a = L. \frac{2}{3}\sqrt{6}$, und $K = L^3 . \frac{8}{27}\sqrt{3}$ folgt. Verfährt man auf diese Weise auch für die übrigen regulären Körper, so erhält man der Ordnung nach

für das Tetraedrum

$$a = L . \tfrac{2}{3}\sqrt{6} = L . 1{,}6329931$$
$$K = L^3 . \tfrac{8}{27}\sqrt{3} = L^3 . 0{,}5132002$$

für das Octaedrum

$$a = L\sqrt{2} = L . 1{,}4142136$$
$$K = L^3 . \tfrac{4}{3} = L^3 . 1{,}3333333$$

für das Icosaedrum

$$a = L . 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = L . 1{,}0514622$$
$$K = L^3 . \tfrac{2}{3}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = L^3 . 2{,}5361506$$

für den Würfel oder das Hexaedrum

$$a = L . \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = L . 1{,}1547005$$
$$K = L^3 . \tfrac{8}{9}\sqrt{3} = L^3 . 1{,}5396007$$

für das Dodecaedrum.

$$a = L . \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} = L . 0{,}7136442$$
$$K = L^3 . \tfrac{2}{9}(5\sqrt{3}+\sqrt{15}) = L^3 . 2{,}7851638$$

§. 86.
Anmerkung.

I. Es ist bekannt, daß nicht mehr reguläre Körper, d. h. solche, welche nur durch einerley Art regulärer Vielecke begränzt werden, möglich sind, als die eben genannten fünfe. Ihr Inhalt kann also nach den angegebenen Formeln berechnet werden, wenn man entweder ihre Seitenlinie a, oder den Halbmesser L der Kugel, in welche sie beschrieben werden könnten, als gegeben ansieht. Diesen Halbmesser kann man erhalten, wenn man an einem solchen Körper den Abstand zweyer am weitesten von einander entfernten Ecken mißt, und dann diesen Abstand halbirt. Denn dieser Abstand ist der Durchmesser der Kugel, in welche der Körper beschrieben werden könnte.

II. Aber außer diesen 5 regulären so genannten Platonischen Körpern, giebt es noch viel andere, welche gleichfalls durch reguläre Vielecke, aber durch Vielecke von unterschiedener Art, begränzt werden, z. B. Körper, welche durch zweyerley oder gar dreyerley reguläre Vielecke, sämmtlich von gleichen Seiten begränzt werden, und sich gleichfalls in eine Kugel beschreiben lassen, so daß alle Eckpunkte in die Oberfläche der Kugel fallen würden. Man kann zeigen, daß mit Ausschluß solcher, welche in die Classe der Prismen oder Pyra-

miden

miden gehören würden, nicht mehr als 13 derselben möglich sind, nemlich 10, welche bloß durch zweyerley reguläre Vielecke, und drey, welche durch dreyerley begränzt werden. Die Zahl der regulären Vielecke, aus denen ihre Oberfläche zusammengesetzt ist, kann aus folgendem Täfelchen übersehen werden.

I. Körper deren Oberfläche bloß aus zweyerley regulären Vielecken besteht.

Nr. 1) Aus 4 Dreyecken und 4 Sechsecken
2) = 8 = = 6 Achtecken
3) = 8 = = 6 Quadraten
4) = 8 = = 18 Quadraten
5) = 20 = = 12 Zehnecken
6) = 20 = = 12 Fünfecken
7) = 32 = = 6 Quadraten
8) = 80 = = 12 Fünfecken
9) = 6 Quadraten und 8 Sechsecken
10) = 12 Fünfecken und 20 Sechsecken

II. Körper welche aus dreyerley regulären Vielecken gebildet sind.

Nr. 11) Aus 6 Achtecken 8 Sechsecken und 12 Quadraten
12) = 20 Dreyecken 30 Quadraten und 12 Fünfecken
13) = 30 Quadraten 20 Sechsecken und 12 Zehnecken

Außerdem könnten gar wohl auch nur zwey reguläre Polygone von einer beliebigen Anzahl Seiten z. B. 2 reguläre Sechsecke und 6 Quadrate; 2 Siebenecke und 7 Quadrate einen Körper bilden, der sich in eine Kugel beschreiben ließe, aber diese Körper würden offenbar bloße Prismen seyn, die zu ihren Grundflächen jene zwey regulären Polygone und zu ihren Seitenflächen die angegebenen Quadrate haben würden. So würde denn auch ein Körper, der durch lauter reguläre Dreyecke und durch ein beliebiges reguläres Polygon begränzt würde, bloß eine Pyramide seyn, ein Körper in welchem also nicht einmahl alle Ecken einander ähnlich seyn würden, wie dieß doch bey den 13 angeführten von Kepler (*) so genannten Archimedischen Körpern durchaus der Fall ist.

III. Es ist kein Zweifel, daß mehrere von diesen 13 Körpern und vielleicht alle, ursprünglich durch gewisse Abschnitte, die man von den 5 regulären Platonischen Körpern machte, entstanden sind, wie z. B. (Fig. 49) ausweißt, wo nothwendig der Körper Nr. 3. entstehen muß, wenn man jede Ecke von einem Würfel so abschneidet, daß der Schnitt einen gleichseitigen Triangel adc bildet, und $ab = \frac{1}{2} gb$;

bc

(*) Kepleri Harmonice mundi. Linc. Austr. 1649. fol. Lib. II. propos. 27. 27.

$bc = \frac{1}{2} fb$; $bd = \frac{1}{2} be$ wird u. s. w. Es würden hier 8 Dreyecke wie adc, und 6 Quadrate wie adik entstehen, deren Seitenlinie $ad = \sqrt{(ab^2 + bd^2)} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ seyn würde, wenn a die Seitenlinie des Würfels darstellt. Für den körperlichen Raum dieses abgestutzten Würfels, und für den Halbmesser der Kugel, in welche er beschrieben werden könnte u. s. w. würde man durch eine gehörige Anwendung der Sätze (§. 82. und 83.) sehr leicht Formeln entwickeln können, wenn es sich der Mühe verlohnte, hier so weitläuftig von Körpern zu reden, deren Cubikinhalt doch wohl in der Ausübung eben nicht häufig verlangt wird.

IV. Folgendes kann indessen im allgemeinen dienen, den Inhalt eines jeden von den erwähnten Körpern zu bestimmen.

Man messe an einem solchen Körper den Abstand zweyer Eckpunkte die am weitesten von einander entfernt sind, so hat man den Durchmesser der Kugel in welche ein solcher Körper würde beschrieben werden können, und folglich durch Halbirung den Halbmesser dieser Kugel.

V. Nun sey (Fig. 43. Tab. III.) das reguläre Polygon ABCDE eines von denen, wodurch des Körpers Oberfläche begränzt wird, und c der Mittelpunkt der um den Körper be-

Außerdem könnten gar wohl
zwey reguläre Polygone von ein
Anzahl Seiten z. B. 2 reguläre
6 Quadrate; 2 Siebenecke w
einen Körper bilden, der s
beschreiben ließe, aber di
offenbar bloße Prismen
Grundflächen jene zwey
und zu ihren Seitenf
Quadrate haben wü
auch ein Körper,
Dreyecke und dur
Polygon begrän
seyn, ein Körp
alle Ecken eine
dieß doch be
ler (*)

Körper.

$= \frac{1}{2} a \cot \frac{180^0}{n}$,

polygons $= n . \triangle BGC =$

III

diesen $\frac{}{n}$ —. Ferner $BG = \frac{1}{2} a \operatorname{cosec} \frac{180^0}{n}$,
lich der Pyramide $Gc = \sqrt{(Bc^2 - BG^2)}$.
5 re man nun den (IV.) gefundenen
sto messer $Bc = r$, so hat man $Gc =$
$\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} a^2 \left(\operatorname{cosec} \frac{180^0}{n}\right)^2\right)}$ und den körperlichen Inhalt der Pyramide $ABCDEc =$
$\frac{1}{12} n a^2 \cot \frac{180}{n} \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{cosec} \frac{180^{02}}{n}\right)}$.

VI.

... einem Körper wie Nr. 1: würde
... für jede dreyeckigte Pyramide,
... jede sechseckigte gesetzt werden
... der Inhalt jeder dreyeckig-
... ich mit: T bezeichnen
... $\sqrt{}(r^2 - \frac{1}{4}a^2 \text{ cosec } 60°^2)$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und

$\sqrt{3}$

... $\frac{1}{4}a^2 \text{ cosec } 30°^2)$

... $- \frac{3}{16}a^2)$

... der Inhalt des ganzen Kör-
... $= 4T + 4S = a^2 . (\frac{1}{3}\sqrt{}(r^2 - \frac{1}{3}a^2)$
$\sqrt{}(r^2 - \frac{3}{16}a^2))\sqrt{3}$ sich ergeben würde,
und so in andern Fällen.

VII. In einer solchen Formel könnte nun zwar auch noch besonders r durch a ausgedrückt, und so der Inhalt des Körpers entweder bloß aus seiner Seitenlinie a, oder auch aus dem Halbmesser r bestimmt werden. Aber die Art bey einem jeden der (II.) erwähnten 13 Körper a durch r oder umgekehrt r durch a auszudrücken, würde allein eine weitläuftige Ab-

 hand-

schriebenen Kugel, so ist ABCDEc eine von den Pyramiden, deren so viele den ganzen Raum des Körpers erfüllen, als aus so vielen solchen Polygonen des Körpers Oberfläche zusammengesetzt ist. Z. B. in Nr. 1. 4 dreyeckigte und 4 sechseckigte Pyramiden.

Von einer jeden solchen Pyramide sind alle Abmessungen der Grundfläche bekannt, und weil nun alle Seitenlinien $Bc = Cc = Dc$ u. s. w. dem (IV.) gefundenen Halbmesser gleich sind, so hat man, wenn ABCDE ein reguläres n Eck ist, den Centriwinkel $BGC = \frac{360^0}{n}$, also den halben $BGM = \frac{180^0}{n}$, das Perpendikel $GM = \frac{1}{2} a \cot BGM = \frac{1}{2} a \cot \frac{180^0}{n}$, und die Fläche des Polygons $= n . \triangle BGC = \frac{1}{4} n a^2 \cot \frac{180^0}{n}$. Ferner $BG = \frac{1}{2} a \operatorname{cosec} \frac{180^0}{n}$, die Höhe der Pyramide $Gc = \sqrt{(Bc^2 - BG^2)}$. Nennt man nun den (IV.) gefundenen Halbmesser $Bc = r$, so hat man $Gc = \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} a^2 \left(\operatorname{cosec} \frac{180^0}{n}\right)^2\right)}$ und den körperlichen Inhalt der Pyramide $ABCDEc = \frac{1}{12} n a^2 \cot \frac{180}{n} \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{cosec} \frac{180^{0\,2}}{n}\right)}$.

VI.

VI. Bey einem Körper wie Nr. 1. würde also z. B. $n = 3$ für jede dreyeckigte Pyramide, und $n = 6$ für jede sechseckigte gesetzt werden müssen. Demnach der Inhalt jeder dreyeckigen Pyramide welchen ich mit T bezeichnen will $= \frac{1}{4} a^2 \cot 60^0 \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{cosec} 60^{0\,2})}$

oder wegen $\cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und

$\operatorname{cosec} 60^0 = \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$T = \frac{1}{12}\sqrt{3} \cdot a^2 \sqrt{(r^2 - \frac{1}{3}a^2)}$$

und der Inhalt jeder sechseckigten

$$S = \frac{1}{2} a^2 \cot 30^0 \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2 \operatorname{cosec} 30^{0\,2})}$$
$$= \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} \sqrt{(r^2 - \frac{3}{16} a^2)}$$

woraus denn der Inhalt des ganzen Körpers Nr. 1. $= 4T + 4S = a^2 . (\frac{1}{3}\sqrt{(r^2 - \frac{1}{3}a^2)} + 2\sqrt{(r^2 - \frac{3}{16}a^2)})\sqrt{3}$ sich ergeben würde, und so in andern Fällen.

VII. In einer solchen Formel könnte nun zwar auch noch besonders r durch a ausgedrückt, und so der Inhalt des Körpers entweder bloß aus seiner Seitenlinie a, oder auch aus dem Halbmesser r bestimmt werden. Aber die Art bey einem jeden der (II.) erwähnten 13 Körper a durch r oder umgekehrt r durch a auszudrücken, würde allein eine weitläuftige Ab-

handlung erfordern, daher ich mich begnüge, hier nur zu bemerken, daß man aus der Betrachtung der ebenen Winkel, welche die Ecken eines solchen Körpers begränzen, das Verhalten von r zu a finden kann. M. s. hierüber Kästners Abhandl. de polyedris data lege irregularibus in den Commentationibus Soc. Goetting. Vol. VI. VII. VIII. Die Hauptsache besteht darin, daß, weil bey diesen Körpern die ebenen Winkel, welche jede Ecke begränzen, nicht alle einander gleich sind, man nur die Aufgabe (§. 83.) in einer größern Allgemeinheit muß auflösen können. Aber die Auflösung wird auch in dem Maaße weitläuftiger, je mehr die Winkel selbst von einander unterschieden sind. Bey einem Körper wie (II. Nr. 12.) ist z. B. jede Ecke aus 4 Winkeln gebildet, nemlich einem von 108° (dem Polygonwinkel des regulären Fünfecks) zweyen von 90° (dem Polygonwinkel des Quadrats) und einem von 60° (dem Winkel des gleichseitigen Dreyecks). Kästner findet für diesen Körper den Halbmesser r = 0,1495. a. Man kann indessen diese ganze Rechnung in der Ausübung entbehren, da sich der Halbmesser r bey einem vorgegebenen Körper wie (II.) in den meisten Fällen wohl ohne große Mühe und mit hinlänglicher Genauigkeit nach (IV.) unmittelbar messen läßt.

VIII. Auf eine sehr mühsame Art, und ohne sphärische Trigonometrie, hat A. Sharp den Inhalt einer großen Menge solcher Körper bestimmt, in einer Schrift, welche den Titel führt: Geometry Improved 1. by a large and accurate table of segments of Circles 2. a concise Treatise of polyedra etc. London, 1718.

IX. Netze für diese Körper zu zeichnen, hat Marburg sehr umständlich gewiesen, bey dem man auch die Netze von mehr andern Körpern, die eine gewisse Symmetrie und Regelmäßigkeit haben, nachlesen kann(*). Auch findet man bey ihm die Nahmen dieser Körper, wovon manche sehr zusammengesetzt sind, z. B. Nr. 12. das Rhombi-Icosi-Dodecaeter. Theoretische Betrachtungen über solche Netze hat Kästner a. a. O. angestellt. Auch hat Meister in einer Abhandlung: de solidis geometricis, pro cognoscenda eorum indole in certos ordines et versus disponendis in den Commentat. Soc. Goetting. Tom. VII. sehr viele interessante Bemerkungen über diese Körper geliefert, die als eine Erweiterung dessen, was Euler bereits hierüber in zwey Abhandlungen Elementa doctrinae solidorum

(*) Friedrich Wilhelm Marburgs Anfangsgründe des Progressionalcalculs. Berlin und Stralsund 1774. 8. 44 Kupfertafeln. IV. Buch von der Construction der eckigten Körper.

dorum und Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa. sunt praedita im IV. Tomo der Nov. Comment. Petropol. geleistet hatte, zu betrachten sind. M. s. auch Karstens Lehrbegriff der Mathematik II. Band XXV. Abschn.

X. Von allerley Schnitten solcher Körper mit Anwendungen auf Hauy Essay d'une theorie sur la structure des crystaux handelt Kästner im VI. Vol. der angeführten Comment Soc. Gotting. de sectionibus solidorum, crystallorum structuram illustrantibus. Man sieht hieraus, daß die Natur bey der Bildung der Chrystalle manche von den angeführten Körpern liefert, und es daher nicht überflüssig war, über die Art ihrer Berechnung das Allgemeinste beyzubringen. In der Baukunst sind solche Körper unterweilen als Verzierungen gebraucht worden.

XI. Auch für die Oberflächen dieser Körper kann man sich leicht allgemeine Formeln berechnen, wenn man weiß, aus welchen, und aus wie viel regulären Polygonen sie zusammengesetzt sind. So wäre z. B. die Oberfläche des Körpers Nr. 13.

$= 4(\frac{1}{4} \cdot 3 \cdot a^2 \cot 60^\circ + \frac{1}{4} \cdot 4 a^2 \cot 30^\circ)$

$= (3 \cot 60^\circ + \cot 30^\circ)\, a^2$, und so in anderen Fällen.

Fünf=

Fünftes Kapitel.

Berechnung der Oberflächen pyramidenförmiger Körper.

§. 87.

Aufgabe.

Die Seitenfläche einer Pyramide, (Fig. 42. Tab III.) deren Grundfläche eine geradlinigte Figur ist, zu berechnen.

Aufl. 1. Weil die Seitenfläche in diesem Falle, aus lauter Dreyecken ABc; BCc; CDc u. s. w. zusammengesetzt ist, so berechne man den Flächenraum eines jeden dieser Dreyecke, und addire alle einzelnen Flächenräume zusammen.

2. Von einem jeden solchen Dreyecke z. B. BCc muß man die Höhe Mc wissen, wenn die Seite BC der Grundfläche zur Grundlinie angenommen wird. Kann man dieß Perpendikel Mc nicht bequem ziehen und messen, so muß man es aus gewissen Stücken, die man an dem Dreyecke unmittelbar messen kann, zu berech-

berechnen suchen; z. B. wenn man alle drey Seiten des Dreyecks BCc unmittelbar messen wollte, so könnte daraus, ohne vorher die Höhe Mc zu berechnen, der Inhalt des Dreyecks sogleich nach der bekannten Formel

$$\triangle BCc = \tfrac{1}{4}\sqrt{A(A-2a)(A-2b)(A-2c)}$$

gefunden werden, wo A die Summe a+b+c der drey Seiten des Dreyecks bezeichnet. Statt dieses Ausdrucks kann man auch sezen

$$\triangle BCc = \sqrt{B(B-a)(B-b)(B-c)}$$

wenn B die halbe Summe der drey Seiten a, b, c, bezeichnet.

3. Will man aber einen Winkel z. B. $cBC = \varphi$ messen, und nennt man die Seiten $Bc = b$, $BC = a$, so hat man $Mc = b \sin \varphi$; und

$$\triangle BCc = \tfrac{1}{2} ab \sin \varphi$$

4. Man könnte auch zur Berechnung des Dreyecks eine Seite wie Bc messen, und darauf von C das Perpendikel CN fällen; u. s. w.

§. 88.

Zusatz I.

Bey einer gleichseitigen Pyramide (§. 73.) Fig. 43. sind alle Dreyecke BCc, CDc u. s. w. einander gleich. Nennt man nun die Polygonseite BC = a, und ist die Grundfläche ein

Poly-

Polygon von n Seiten, so braucht man nur die Summe aller Seiten = n . a, in das halbe Perpendikel Mc auf eine dieser Seiten, zu multipliciren, um sogleich die Summe aller Dreyecke oder die ganze Seitenfläche der Pyramide zu erhalten.

Es versteht sich, daß wenn man die ganze Oberfläche einer Pyramide verlangt, auch noch besonders die Grundfläche berechnet, und hinzu addirt werden muß, welche z. B. bey der gleichseitigen Pyramide $= \frac{1}{4} na^2 \cot \frac{180^0}{n}$ seyn würde. (§. 73. 7. und §. 77.)

§. 89.

Zusatz II.

Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Kegels (Fig. 47. Tab. IV.) d. h. eines solchen, dessen Spitze c senkrecht über dem Mittelpunkt G der Grundfläche liegen würde, zu bestimmen, betrachtet man den Kreis, welcher dem Kegel zur Grundfläche dient, als ein reguläres Polygon von einer unendlich großen Anzahl unendlich kleiner Seiten, und folglich den Kegel als eine reguläre Pyramide, deren Seitenfläche aus lauter unendlich schmalen Dreyecken zusammengesetzt seyn würde. Die Seitenlinie cM oder cD des Kegels würde die

die gemeinschaftliche Höhe aller dieser Dreyecke seyn, die man demnach nur zu halbiren, und in den Umfang der Grundfläche zu multipliciren hat, um den Ausdruck für des Kegels Seitenfläche zu erhalten.

Ist demnach diese Seitenlinie $cM = l$, und der Halbmesser CM der Grundfläche $= R$, so ist der Umfang der Grundfläche $= 2R\pi$; also die **Seitenfläche des Kegels** $= 2R\pi . \frac{l}{2} = R\pi l$.

§. 90.

Zusatz III.

Ist der Kegel mit einer Ebene, der Grundfläche parallel, durchschnitten worden, und der Schnitt ein Kreis von dem Halbmesser $gm = r$, **so ist die krumme Oberfläche des abgekürzten Kegels** $= R.\pi.Mc - r.\pi.mc = \pi(R.Mc - r.mc)$; aber $mc = Mc - Mm$ Man nenne also die Seitenlinie Mm des abgekürzten Kegels $= e$ die unbekannte Grösse $mc = x$; so ist $Mc = e + x$ und die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels $= \pi(R(e+x) - rx)$. Nun ist aber in den ähnlichen Dreyecken cgm, cGM; $GM = R$; $gm = r$ und $R : r = Mc : mc = e + x : x$.

Also

Also $R - r : r = e : x$; und $R - r : R = r : e + x$. Also $x = \frac{er}{R-r}$; $x + e = \frac{Re}{R-r}$.

Diese Werthe in die Formel für die abgekürzte Kegelfläche substituirt, geben für solche den Ausdruck

$$\frac{\pi e (R^2 - r^2)}{R - r}$$

oder wegen $R^2 - r^2 = (R + r)(R - r)$

die abgekürzte Kegelfläche $= \pi e (R - r)$, die Summe der beyden Halbmesser in die Seitenlinie Mm = e des abgekürzten Kegels und in die Ludolphische Zahl π multiplicirt.

§. 91.

Aufgabe.

Die krumme Seitenfläche eines jeden kegelförmigen Körpers AFB (Fig. 50) zu finden, die Grundfläche sey durch welche krumme Linie man will, begränzt.

Aufl. 1. Von der Spitze des Kegels fälle man auf die Grundfläche das Perpendikel FH herab, und ziehe nun durch H nach Gefallen eine Abscissenlinie BHA, in der A als Anfangspunkt der Abscissen für die krumme Linie AMB angenommen werde.

2. M sey nun ein beliebiger Punkt der krummen Linie, und m demselben unendlich nahe, so bilden die von F nach M und m gezogenen Seitenlinien FM, Fm des Kegels, einen unendlich schmalen Triangel FMm, welchen man als das Differential der von A bis M enthaltenen krummen Seitenfläche AFM des Kegels betrachten kann. Man nenne also das dem Bogen AM = s entsprechende Stück AFM der Seitenfläche des Kegels = S, so hat man

$$dS = \triangle FMm = \frac{FM.mn}{2}$$

wenn mn das von m auf FM gefällte Perpendikel darstellt.

3. Nun seyen für den Punkt M die senkrechten Coordinaten AP = t, PM = u. Die veränderliche Linie FM = f, so ist Fm = f — df und Mn = FM — Fm, weil Fm unendlich nahe bey FM ist, also Mn = df.

4. Wird also das Element Mm der krummen Linie = ds = $\sqrt{(du^2 + dt^2)}$ genannt, so hat man

$$mn = \sqrt{(Mm^2 - Mn^2)} = \sqrt{(ds^2 - df^2)}$$

Also das Element der Kegelfläche (2)

$$dS = \tfrac{1}{2} f \sqrt{(ds^2 - df^2)} = \tfrac{1}{2} \sqrt{(f^2 ds^2 - f^2 df^2)}$$

5.

5. Wird nun die Höhe FH des Kegels mit h, und die Entfernung des Punktes H vom Anfangspunkt der Abscissen A oder $AH = k$ genannt, so hat man

$FM^2 = FH^2 + HM^2 = FH^2 + HP^2 + PM^2$ d. h.

$$f^2 = h^2 + (k-t)^2 + u^2$$

Demnach

$$f\,df = u\,du - (k-t)\,dt$$

$$f^2 df^2 = (u\,du - (k-t)\,dt)^2$$
$$= u^2 du^2 - 2u(k-t)\,du\,dt + (k-t)^2 dt^2$$

Ferner

$$f^2 ds^2 = (h^2 + (k-t)^2 + u^2)(du^2 + dt^2)$$
$$= h^2 du^2 + (k-t)^2 du^2 + u^2 du^2$$
$$+ h^2 dt^2 + (k-t)^2 dt^2 + u^2 dt^2$$

Also

$$f^2 ds^2 - f^2 df^2 = (k-t)^2 du^2 + 2u(k-t)\,dt\,du$$
$$+ u^2 dt^2 + h^2 (du^2 + dt^2)$$

6. Demnach das Element der Kegelfläche

$$dS = \tfrac{1}{2}\sqrt{((k-t)\,du + u\,dt)^2 + h^2 ds^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2} ds \sqrt{\left(h^2 + \left(\frac{(k-t)\,du + u\,dt}{ds}\right)^2\right)}$$

Wenn also die Gleichung der krummen Linie zwischen u und t gegeben ist, so kann man u, ds, du durch t ausdrücken, und durch Integration des für dS gefundenen Ausdrucks, das dem Bogen s, oder der Abscisse t ent-

2. M sey nun ein beliebiger ... krummen Linie, und m demselben ... nahe, so bilden die von F nach M ... zogenen Seitenlinien FM, Fm ... einen unendlich schmalen Trian... chen man als das Differenti... M enthaltenen krummen Sei... Kegels betrachten kann. ... dem Bogen AM = s ents... der Seitenfläche des K...

$$dS = \triangle FMn ...$$

wenn mn das ... pendikel darstellt.

3. Nun s... rechten Coor... veränderlich... f — df u... unendlich...

...men ... so, ... Also $(k - t)\,du + udt$

$$\ldots = \frac{kudu + rt\,dt}{u}; \text{ oder}$$

... statt udu setzt $(r - t)\,dt$

$$\ldots - t)\,du + udt = \frac{kr + (r - k)\,t\,dt}{u}$$

ist

$$+ dt^2) = \frac{h^2 r^2 dt^2}{u^2}$$

nach gehöriger Substi-
s Element der Ke-

$$+ h^2 r^2$$

gesetzt

ohne unendliche und wollte man es Reihe integriren, so con- nicht genug, um davon in Gebrauch machen zu können. also das Integral durch eine An- gsmethode zu bestimmen suchen, wozu mehrere Hülfsmittel darbieten.

5. Vors erste ist es vortheilhaft, das gefundene Differential auf eine andere Art auszudrücken.

Man nenne den dem Bogen AM $= s$ entsprechenden Winkel am Mittelpunkte, nemlich ACM $= \sigma$, so ist PM oder u d. h. $\sqrt{(2rt - t^2)} = r \sin \sigma$, und $t = r - CP = r - r \cos \sigma$;

sprechende Stück AFM der krummen Seitenfläche des Kegels finden.

Beyspiele werden die Sache erläutern.

§. 92.

Aufgabe.

Die krumme Seitenfläche eines schiefen Kegels, dessen Grundfläche ein Kreis ist, zu finden.

Aufl. 1. C sey der Mittelpunkt des Kreises, und die Spitze F des Kegels nicht senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises, sondern nach Gefallen $AH = k$, das Perpendikel $FH = h$, der Halbmesser $AC = r$, so ist nun erstlich die Gleichung zwischen t und u

$$u^2 = 2rt - t^2$$

Demnach $du = \frac{r - t}{u} dt$

$udt - tdu = \frac{u^2 - (r - t)t}{u} dt$, oder wenn man statt u^2 setzt $2rt - t^2$

$udt - tdu = \frac{rtdt}{u}$. Also $(k - t)du + udt$

$= kdu + \frac{rtdt}{u} = \frac{kudu + rtdt}{u}$; oder wenn man statt udu setzt $(r - t)\, dt$

$(k - t)\, du + udt = \frac{kr + (r - k)\, t}{u} dt.$

2.

2. Ferner ist

$$h^2\, ds^2 = h^2\,(du^2 + dt^2) = \frac{h^2 r^2 dt^2}{u^2}.$$

3. Also erhält man nach gehöriger Substitution in §. 91. 6. für das Element der Kegelfläche

$$dS = \tfrac{1}{2}\, dt \sqrt{\frac{(kr + (r-k)t)^2 + h^2 r^2}{u^2}}$$

oder auch statt u^2 seinen Werth gesetzt

$$dS = \tfrac{1}{2}\, r\, dt \sqrt{\frac{(k + \frac{r-k}{r}t)^2 + h^2}{2rt - t^2}}$$

4. Dieses Differential ist ohne unendliche Reihen nicht integrabel, und wollte man es auch durch eine solche Reihe integriren, so convergirt diese Reihe nicht genug, um davon in der Ausübung Gebrauch machen zu können. Man muß also das Integral durch eine Annäherungsmethode zu bestimmen suchen, wozu sich mehrere Hülfsmittel darbieten.

5. Vors erste ist es vortheilhaft, das gefundene Differential auf eine andere Art auszudrücken.

Man nenne den dem Bogen AM = s entsprechenden Winkel am Mittelpunkte, nemlich ACM = σ, so ist PM oder u d. h. $\sqrt{(2rt - t^2)} = r \sin \sigma$, und $t = r - CP = r - r \cos \sigma$;

 dt

$dt = r\,d\sigma \sin\sigma$; $k + \frac{r-k}{r} t = r - (r-k)\cos\sigma$
$= r + (k-r)\cos\sigma$. Substituirt man diese Werthe, so wird

$$dS = \tfrac{1}{2} r\,d\sigma \sqrt{(h^2 + (r + e\cos\sigma)^2)}$$

wo $e = k - r$ den Abstand des Punktes H vom Mittelpunkte C bezeichnet, welcher Werth von e denn negativ seyn würde, wenn der Punkt H zwischen A und C fiele.

6. Aus diesem Ausdrucke erhellet nun sogleich, daß man die Integration dieses Differentials, also die Berechnung der Kegelfläche, auf die Rectification einer gewissen krummen Linie bringen kann. Man construire nemlich (Fig. 51) eine krumme Linie ARY, deren rechtwinklichte Coordinaten AW $= v$ und WR $= z$ aus folgenden Differentialgleichungen bestimmt werden

$$dv = h\,d\sigma$$
$$dz = (r + e\cos\sigma)\,d\sigma$$

so ist erstlich durch Integration

$$v = h.\sigma$$
$$z = r\sigma + e\sin\sigma$$

und man kann nun für jeden Winkel σ die Abscisse v und die Ordinate z berechnen, und wenn man will, die krumme Linie würklich construiren, wobey denn, wie es sich von selbst ver-

versteht, in den Ausdrücken $h\sigma$; $r\sigma$; der Werth von σ in Decimaltheilen des Halbmessers (§. 31. IV.) zu setzen ist.

7. Wird nun der Bogen AR, welcher der Abscisse $v = h.\sigma$, und also dem Winkel ACM (Fig. 50) entspricht $= \mathfrak{S}$ genannt, so hat man $d\mathfrak{S}^2 = dv^2 + dz^2 = h^2 d\sigma^2 + (r + e \cos\sigma)^2 d\sigma^2$
Mithin

$$d\mathfrak{S} = d\sigma \sqrt{(h^2 + (r + e . \cos\sigma)^2)}$$

oder $\mathfrak{S} = \int d\sigma \sqrt{(h^2 + (r + e \cos\sigma)^2)}$
wozu keine Const zu addiren ist, weil für $\sigma = 0$ auch $v = 0$, und folglich $\mathfrak{S} = 0$ seyn muß.

8. Demnach (5) die dem Bogen oder Winkel $\sigma =$ ACM (Fig. 50) entsprechende Kegelfläche AFM oder

$$S = \tfrac{1}{2} r \mathfrak{S}$$

Man multiplicirt also die Länge des Bogens AR (Fig. 51), welcher der Abscisse $v = h.\sigma$ entspricht, in den halben Radius der Grundfläche des Kegels, so hat man das Stück der Kegelfläche, dem in der Grundfläche der Bogen AM, oder der Winkel ACM $= \sigma$ am Mittelpunkte entspricht.

Die Länge des Bogens AR für jede Abscisse $v = h.\sigma$ zu finden, kann man nun die (§. 58. ff.) angegebene Rectificationsmethode anwenden, und wenn nun der Bogen AY einer

Abscisse AT = h . π (wo π = 3,14159 .. den Winkel $\sigma = 180^\circ$ oder den ihm entsprechenden Bogen in Decimaltheilen des Halbmessers ausdrückt) zugehört, so wird $\frac{1}{2}$r . AY den Werth der halben Kegelfläche geben.

9. Es kömmt also darauf an, die krumme Linie ARY zu rectificiren. Soll sich dieß aber nach der oben (§. 58.) angegebenen Rectificationsmethode bewerkstelligen lassen, so muß diese krumme Linie beständig gegen die Abscissenlinie AS hohl seyn. (§. 58. VI.)

10. Dieß ist sie nun würklich, wenn man wie bey dem (Fig. 50) abgebildeten Kegel die Abscissen AP = t, oder die Winkel ACM = σ allemahl von dem Endpunkte des Durchmessers AB anrechnet, welcher mit dem Mittelpunkte C auf einerley Seite des Perpendikels FH liegt, welches denn begreiflich jedesmahl geschehen kann, weil es bey einem vorgegebenen Kegel in unserer Willkühr stehet, die Abscissen t von A oder von B anzurechnen. In jenem Falle ist also AH = r + e demnach e als positiv zu betrachten. Fiele aber H zwischen A und C wie (Fig. 52), so würde AH = r — e, der Werth von e also negativ. Dann dürfte man aber nur die Buchstaben A und B verwechseln oder die Abscissen von B anrechnen, um wieder den Fall der 50sten Figur zu erhalten, für welchen AH = r + e also e positiv wäre.

11.

11. Daß nun unter dieser Voraussetzung oder Annahme des Punktes A, die nach (§. 58.) zu construirende krumme Linie würklich allemahl hohl gegen die Abscissenlinie AS (Fig. 51) ausfallen wird, läßt sich daraus beurtheilen, daß wenn man $\frac{dz}{dv} = p$ setzt, der Werth von $\frac{dp}{z}$ allemahl negativ ist. (Kästners Analys. des Unendl. §. 521. II. der dritten Ausgabe.) Denn man erhält $\frac{dz}{dv}$ oder $p = \frac{r + e \cos\sigma}{h}$ (6) und folglich wegen $dp = -\frac{e \sin\sigma}{h}$

$$\frac{dp}{z} = -\frac{e \sin\sigma}{h\,(r\sigma + e \sin\sigma)}$$

allemahl negativ, wenn e positiv ist, d. h. wenn die Winkel σ in der Grundfläche allemahl von demjenigen Endpunkte des Durchmessers angerechnet werden, welcher von dem Perpendikel FH den grössern Abstand hat, also in (Fig. 50) von A, in (Fig. 52) hingegen von B.

12. Die 51ste Figur stellt diese krumme Linie ohngefähr dar, für den Fall, daß $r = 1$; $h = 4$; $e = 3$. (Der ihr zugehörige Kegel ist Fig. 53. abgebildet, worin $AC = r = 1$; $CH = e = 3$; $FH = h = 4$.) In ihr würde z. B. die Abscisse AW welche zu $\sigma = 60°$

 gehört,

gehört, d. h. $v = 4 \cdot 60^\circ$, oder weil 60° in Decimaltheilen des Sinustotus $= 1{,}047$ ist (M. s. Vegas Tafeln oben §. 31. IV.)

$$v = 4 \cdot 1{,}047 = 4{,}188$$

und die Ordinate WR oder

$$z = 1{,}047 + 3 \sin 60^\circ$$
$$= 1{,}047 + 3 \cdot 0{,}866 = 3{,}645$$

u. s. w.

Ich habe die krumme Linie nach Anleitung folgenden Täfelchens von 30 zu 30 Graden gezeichnet

φ	v	z
0	0,000	0,000
30	2,092	2,023
60	4,188	3,645
90	6,284	4,571
120	8,376	4,692
150	10,472	4,118
180	12,566	3,141

13. Wenn man nun hier den Halbmesser $r = AC = 1$ mit einem Zirkel absaßt, und ihn so oft es angeht, aus Y in 1, 2, 3... auf die krumme Linie YRA trägt, so wird man ihre Länge S ohngefähr 14,4 finden. Also wäre die halbe Kegelfläche oder $S = \frac{1}{2} r \cdot S = \frac{1}{2} S$; also die ganze $= S = 14{,}4$, so genau als sie sich nach dem kleinen Maaßstabe, durch die unmittel-

mittelbare Messung der krummen Linie, und unter der Voraussetzung, daß die gemessenen kleinen Bögen ihren Sehnen gleich sind, bestimmen läßt. Für einen größern Maaßstab würde die Construction auch mehr Genauigkeit geben.

Wäre also der Halbmesser r = 1 Fuß, so würde die Kegelfläche 14,4 Quadratfuße halten.

14. Ohne die krumme Linie selbst zu construiren, kann man die Länge derselben durch obige Rectificationsmethode (§. 58.) ohnstreitig weit genauer finden.

Vors erste muß aber untersucht werden, ob die Abscissenlinie AS auf die krumme Linie in A normal ist, oder wenn sie es nicht ist, was die Normallinie AL in A für einen Winkel $= \rho$ mit der Abscissenlinie AS macht.

15. Nach (§. 59. 2.) ist überhaupt für jeden Winkel φ' den eine Normallinie der krummen Linie ARY mit der Abscissenlinie AS machen würde

$$\cot \varphi' = \frac{dz}{dv} = \frac{r + e \cos \sigma}{h}$$

wenn man statt dz und dv die oben (§. 92. 6.) gefundenen Ausdrücke setzt.

16.

16. Für die Normallinie in A ist $v = 0$; also $\sigma = 0$, mithin $\cos\sigma = 1$ und $\varphi' = \rho$ (14) demnach

$$\cot\rho = \frac{r+e}{h}$$

Man sieht also, daß AS in A nicht normal ist, sondern die Normale AL in A mit der Abscissenlinie AS einen Winkel LAS $= \rho$ macht, dessen Cotangente $= \frac{r+e}{h}$ oder Tangente $= \frac{h}{r+e}$ seyn würde.

17. Da in dem Kegel (Fig. 50) tang FAH $= \frac{FH}{AH} = \frac{h}{r+e}$ ist, so ist der Winkel ρ (14) allemahl dem Neigungswinkel FAB der Seitenlinie FA des Kegels gegen die Grundfläche, gleich.

18. Nun braucht man nach der Rectificationsformel (§. 59. 3. 12.) auch den Winkel λ' oder AL'Y, welchen die Normallinie in Y, nemlich YL mit der Abscissenlinie AS machen würde, Da nun für den Punkt Y, $\sigma = 180^\circ$; und $\varphi' = \lambda'$ ist, so hat man

$$\cot\lambda' = \frac{r + e \cdot \cos 180^\circ}{h}$$

$$= \frac{r-e}{h}$$

oder

oder $\tang \lambda' = \frac{h}{r - e}$; Es erhellet also, daß der Winkel λ' allemahl dem Winkel FBA gleich ist, welcher in dem Dreyecke FAB (Fig. 50) dem (17) erwähnten Winkel FAB gegenüber steht.

19. Für die (12) angegebenen Data ist
$\tang \rho = \frac{4}{4} = 1$; also $\rho = 45°$.
$\tang \lambda' = -.\frac{2}{4} = -0{,}5$; also λ' stumpf $= 116°.34'$ (Fig. 53.)

20. Ferner ist in der Rectificationsformel (§. 59. 3. ff.) für den Punkt Y die Abscisse AT oder f' hier $= h.180° = h.\pi$.

Und die Ordinate TY oder $g' = r\pi + e \sin 180° = r\pi$, demnach in der gedachten Formel (§. 59. 18.) der Werth von

$$n = \frac{h \sin \lambda' + r \cos \lambda'}{\sin(\lambda' - \rho)} . \pi$$

und von

$$a = \frac{h \sin \frac{1}{2}(\lambda' + \rho) + r \cos \frac{1}{2}(\lambda' + \rho)}{2 \sin \frac{1}{2}(\lambda' - \rho)} . \pi$$

Setzt man nun statt der Buchstaben die dafür gefundenen Zahlenwerthe (19) so wird

n=

$$n = \frac{4 \sin 116^\circ . 34' + \cos 116^\circ . 34'}{\sin 71^\circ . 34'} . \pi$$

$$= \frac{4 \sin 63^\circ . 26' - \cos 63^\circ . 26'}{\sin 71^\circ . 34'} . \pi$$

$$= \frac{3,13042 . \pi}{\sin 71^\circ , 34'}$$

Also $\log n = 1,0156272$ und $n = 10,3663$.

Und eben so

$$a = \frac{4 \sin 80^\circ . 47' + \cos 80^\circ . 47'}{2 \sin 35^\circ . 47'} \pi$$

$$= \frac{4,10852 . \pi}{2 \sin 35^\circ . 47'}$$

Also $\log a = 1,0428561$ und $a = 11,0371$.

21. Nun ist ferner in gedachter Formel $\lambda' - \rho = 71^\circ . 34'$ und $\eta = \frac{\lambda' - \rho}{m}$. Weil man nun immer, ohne großen Fehler zu besorgen, den Winkel $\eta = 30^\circ$ annehmen kann, wie aus dem Beyspiele für den elliptischen Bogen (§. 61. 9.) erhellet, so will ich hier $m = 2$ und also $\eta = \frac{1}{2}(\lambda' - \rho) = 35^\circ . 47'$ annehmen.

Weil nun in der dortigen Formel der Buchstabe φ der Ordnung nach die Winkel

η,

η, 2η, 3η u. s. w. bezeichnet, hier aber wegen $m = 2$, diese Progression nur bis auf das erste Glied zu nehmen ist, so hat man nur für $\varphi = \eta$, die Coordinaten v und z in dem summatorischen Theil Σ jener Formel zu berechnen.

22. Nun ist $\frac{dz}{dv} = \cot \varphi' = \cot (\eta + \rho)$ weil $\varphi' = \varphi + \rho$ und hier $\varphi = \eta$. Also $\frac{dz}{dv} = \cot (35^\circ . 47' + 45^\circ) = \cot 80^\circ 47'$; d. h.

$\frac{dz}{dv}$ oder $\frac{r + e \cos \sigma}{h} = \cot 80^\circ . 47'$.

Also wegen $r = 1$, $e = 3$, $h = 4$

$$\cos \sigma = \frac{4 \cot 80^\circ . 47' - 1}{3}$$
$$= -0{,}1169824$$

Also $\sigma = 96^\circ . 43'$ die paar Secunden weggelassen, welche noch hinzukommen würden.

Für diesen Werth von σ wird die Abscisse $v = h\sigma = 4 . 96^\circ 43'$ oder den Bogen $96^\circ 43'$ in Decimaltheilen des Halbmessers ausgedrückt

$v = 4 . 1{,}68809 = 6{,}75236$

Und die Ordinate

$z = r\sigma + e \sin \sigma = 1{,}68809 + 3 . 0{,}99313$
$= 4{,}66748.$

23. Hieraus ferner für den summatorischen Theil Σ... der Formel (§. 59. 18.) durch Logarithmen

$$z \sin\varphi' = z \sin 80^\circ.\ 47' = 4{,}93674$$
$$n \cos(\varphi' - \rho) = n \cos 35^\circ\ 47' = 8{,}40966$$
$$13{,}34630$$
$$- v \cos\varphi' = - v \cos 80^\circ 47' = -1{,}08151$$
$$\text{Also } \Sigma \ldots\ldots\ldots = 12{,}26479$$
$$\text{add. a nach (20)} = 11{,}0371$$
$$\text{Summe} = 23{,}3019$$

Diese Zahl muß nun noch in $\eta = 35^\circ.\ 47' = 0{,}62453$ multiplicirt werden, um den Bogen s (§. 59. 18.) oder hier S zu erhalten. Durch die abgekürzte Multiplication, oder auch durch Logarithmen, findet man leicht

$$S = 14{,}4527$$

Also (13) die schiefe Kegelfläche $= 14{,}4527$.

24. Man sieht aus diesem Beyspiele, daß die Berechnung einer schiefen Kegelfläche, durch Hülfe der angeführten Rectificationsmethode bey weiten einfacher ist, als wenn man sie durch eine unmittelbare Integration der Differentialformel (3), vermittelst einer unendlichen Reihe hätte bestimmen wollen, von der bey einer so großen Excentricität GH des Perpendikels FH (Fig. 53) d. h. einem so großen Werthe von e als ich in dem Beyspiele angenommen habe, sich

viel-

vielleicht nicht einmahl ein Gebrauch machen läßt, weil sie sich zu langsam nähert. Wie zusammengesetzt die Coefficienten einer solchen Reihe selbst ausfallen, kann man z.B. aus Sim. L'Huilier Princ. Calculi differentialis et integralis. Tübingae 1795. pag. 200. ersehen.

Ein anderes Verfahren durch Rectification einer krummen Linie die schiefe Kegelfläche zu berechnen, lehrt Hr. Yelin in seiner zu Erlangen herausgegebenen Inauguralschrift: Diss. inauguralis mathematica de superficie coni scaleni determinanda, quam pro gradu doct. Phil. publice defend. Erl. 1794. Ich hatte ihm Lamberts Rectificationsmethode (Beyträge zur Math. III. Th. IX.) dazu vorgeschlagen, welche er in gedachter Schrift mit viel Einsicht ausgeführt hat. Ich finde aber doch die Methode (§. 59. ff.) zur Ausübung noch bequemer.

Kästners Abhandlung über die schiefe Kegelfläche lehrt nur die Gränzen zu bestimmen, zwischen denen der Werth der Kegelfläche enthalten ist: Commentat. Soc. Reg. Goett. Vol. IX. ad annum 1787. 1788. Class. mathemat. p. 39. etc.

25. Folgendes scheint mir zu diesem Zwecke noch brauchbarer.

Eine andere Methode die schiefe Kegelfläche zu berechnen.

§. 93.

1. Es sey (Fig. 54) der Kreis um AB die Grundfläche des Kegels, F die Spitze und FH = h die Höhe; CH = e die Entfernung des Perpendikels FH vom Mittelpunkte C; die Halbmesser CB = AC = r.

2. Man gedenke sich den Halbkreis ANB von A gegen B in lauter gleiche Bogen getheilt, und MN sey ein solcher Bogen, der zugehörige Winkel am Mittelpunkte MCN = ζ, der Winkel ACM = σ = mζ.

MN die Sehne des Bogens MN; GK, RN ein paar Tangenten an M und N, welche sich in L, den Durchmesser AB, oder dessen Verlängerung aber in G und R durchschneiden.

3. Gedenkt man sich nun von F nach N und M ein paar Seitenlinien des Kegels gezogen, so wie auch eine gerade Linie von F nach L (*), so ist das Stück FMN der Kegelfläche, welches dem Bogen MN entspricht, **kleiner** als die Summe der beyden Dreyecke FML und FNL, welche die Kegelfläche in den Linien FM, FN berühren, und zu ihren Grundlinien die

(*) Ich habe diese Linien in der Figur weggelassen, um die Zeichnung nicht durch zu viel Linien undeutlich zu machen.

ie Tangenten ML, NL haben würden, aber grösser als das Dreyeck FMN, welches zu seiner Grundlinie die Sehne MN haben würde, d. h. wenn man die Perpendikel, welche von F auf die Tangenten GL, RN gefället werden würden, mit p, p′, und das Perpendikel von F auf die Sehne MN mit q bezeichnet, so ist das Stück der Kegelfläche, welches dem Bogen MN entspricht, kleiner als $\frac{ML.p+NL.p'}{2}$; aber grösser als $\frac{MN.q}{2}$.

4. Nun ist aber $ML = NL = r.\tang MCL = r \tang \frac{1}{2}\zeta$, und die Sehne $MN = 2r \sin \frac{1}{2}\zeta$ bezeichnet man also das erwähnte Stück der Kegelfläche mit S, so ist

$$S < r \tang \tfrac{1}{2}\zeta . \frac{p+p'}{2}$$

$$S > r \sin \tfrac{1}{2}\zeta . q .$$

5. Also hat man zwey Gränzen, zwischen welche das Stück der Kegelfläche fällt, wenn man nur noch die Perpendikel p, p′, q gehörig bestimmt, und in die gefundenen Ausdrücke substituirt.

6. Man ziehe demnach, um z. B. das Perpendikel p von F auf die Tangente GMK zu bestimmen, aus H mit dem Halbmesser CM, welcher auf die Tangente in M senkrecht ist, eine

Parallele HK, so ist auch HK auf GK senkrecht, und wenn man nun von F nach K eine gerade Linie sich gedenkt, so wird, zufolge der Lehre von der Lage der Linien und Ebenen, auch FK auf der Tangente GK senkrecht stehen, demnach FK = p seyn.

7. Aber $FK = \sqrt{(FH^2 + HK^2)}$, und $HK = HT + TK = HT + CM$ wenn CT parallel mit GK ist. Demnach $HK = r + e \cos \sigma$; weil $CM = r$ und $HT = CH . \cos CHT = CH \cos ACM = e \cos \sigma$.

8. Also wegen $FH = h$

FK oder $p = \sqrt{(h^2 + (r + e \cos \sigma)^2)}$

9. So wird auf eine ähnliche Art, wenn man statt σ den Winkel $ACN = \sigma + z$ setzt, das Perpendikel von F auf die Tangente RN d. h.

$$p' = \sqrt{(h^2 + (r + e \cos(\sigma + z))^2)}$$

und wenn man von C ein Perpendikel auf die Sehne MN, und durch H eine Parallele damit ziehet, für das Perpendikel von F auf diese Sehne der Werth

$$q = \sqrt{(h^2 + (r \cos \tfrac{1}{2} z + e \cos(\sigma + \tfrac{1}{2} z))^2)}$$

gefunden, wo denn, wenn der Bogen AM, m solcher Bögen wie MN fasset, statt σ gesetzt werden muß $m . z$.

10. Um in diesen Formeln das Ausziehen der Quadratwurzeln zu ersparen, so drücke man z. B. den Werth von p so aus

$$p = h\sqrt{\left(1 + \left(\frac{r + e \cos\sigma}{h}\right)^2\right)}$$

und suche nun einen Winkel ψ, dessen Tangente $= \frac{r + e \cos\sigma}{h}$ ist, welchen Winkel man allemahl spitzig nehme, wenn gleich $\frac{r + e \cos\sigma}{h}$ negativ ausfallen sollte, weil das Quadrat von dieser Grösse immer positiv ist, es mag diese Grösse selbst positiv oder auch negativ seyn, so hat man

$$p = h \sec\psi$$

und eben so

$$p' = h \sec\psi'$$

wenn man in den Ausdruck $\frac{r + e \cos\sigma}{h}$ nur $\sigma + \mathfrak{S}$ statt σ setzt.

11. Auch nach ähnlichen Schlüssen

$$q = h \sec\mu$$

wenn $\tang \mu = \frac{r \cos\frac{1}{2}\mathfrak{S} + e \cos(\sigma + \frac{1}{2}\mathfrak{S})}{h}$

gesetzt wird.

12. Demnach sind die beyden Gränzen zwischen denen S fällt folgende (4).

$$S < hr \tan g \tfrac{1}{2}\zeta . \frac{\sec\psi + \sec\psi'}{2}$$

$$S > hr \sin\tfrac{1}{2}\zeta . \sec\mu$$

Hieraus leitet man die Gränzen, zwischen welche die halbe Kegelfläche über ANB, die ich mit $\frac{1}{2}$ S bezeichnen will, fällt, auf folgende Weise ab.

13. Man gedenke sich den Halbkreis ANB z. B. in n gleiche Theile getheilt, so ist erstlich

$$\zeta = \frac{180^\circ}{n}.$$

AM, MN, NO ꝛc. VB seyen der erste, zweyte, dritte ... nte Theil.

14. Jedem solchen Bogen gehört ein Stück der Kegelfläche zu, dessen Gränzen man nach (12) finden kann.

15. Für das erste Stück, welches dem Bogen AM entspricht, muß $\sigma = 0$; für das zweyte über dem Bogen MN, $\sigma = \zeta$, für das dritte $\sigma = 2\zeta$ u. s. w. und für das letzte über dem Bogen VB, $\sigma = (n-1)\zeta$ gesetzt werden, um der Ordnung nach für diese einzeln Stücke die Winkel ψ, μ durch Hülfe der Formeln (10. 11.) berechnen zu können.

16.

16. Man nenne diese Winkel

ψ ; μ für $\sigma = 0$
ψ' ; μ' für $\sigma = \zeta$
ψ'' ; μ'' für $\sigma = 2\zeta$

u. s. w.

ψ^{N-1} ; μ^{N-1} für $\sigma = (n-1)\zeta$
ψ^{N} ; μ^{N} für $\sigma = n\zeta$

und die Stücken der Kegelfläche, nemlich das erste über AN = S', das zweyte über MN = S'' ꝛc. das nte oder letzte über VB = S^{N}.

17. So ist die grössere Gränze von

$$S' = h\,r\,\tan g\tfrac{1}{2}\zeta.\frac{\sec\psi + \sec\psi'}{2}$$

$$S'' = h\,r\,\tan g\tfrac{1}{2}\zeta.\frac{\sec\psi' + \sec\psi''}{2}$$

$$S''' = h\,r\,\tan g\tfrac{1}{2}\zeta.\frac{\sec\psi'' + \sec\psi'''}{2}$$

u. s. w.

$$S^{N} = h\,r\,\tan g\tfrac{1}{2}\zeta.\frac{\sec\psi^{N-1} + \sec\psi^{N}}{2}$$

18. Demnach durch Summirung dieser Ausdrücke für die halbe Kegelfläche $\frac{1}{2}$ S die grössere Gränze = ;

$$h\,r\,tg\tfrac{1}{2}\zeta\left(\frac{\sec\psi + \sec\psi^{N}}{2} + \sec\psi' \ldots + \sec\psi^{N-1}\right)$$

 d. h.

12. Demnach sind die beyden Gränzen zwischen denen S fällt folgende (4)

$$S < hr \tan g \tfrac{1}{2}\zeta . \frac{\sec\psi + \sec\psi'}{2}$$

$$S > hr \sin \tfrac{1}{2}\zeta . \sec\mu$$

Hieraus leitet man die Gränzen, zwischen welche die halbe Kegelfläche über ANB, die ich mit $\frac{1}{2}$S bezeichnen will, fällt, auf folgende Weise ab.

13. Man gedenke sich den Halbkreis ANB z. B. in n gleiche Theile getheilt, so ist erstlich

$$\zeta = \frac{180^0}{n}.$$

AM, MN, NO ꝛc. VB seyen der erste, zweyte, dritte ... nte Theil.

14. Jedem solchen Bogen gehört ein Stück der Kegelfläche zu, dessen Gränzen man nach (12) finden kann.

15. Für das erste Stück, welches dem Bogen AM entspricht, muß $\sigma = 0$; für das zweyte über dem Bogen MN, $\sigma = \zeta$, für das dritte $\sigma = 2\zeta$ u. s. w. und für das letzte über dem Bogen VB, $\sigma = (n-1)\zeta$ gesetzt werden, um der Ordnung nach für diese einzeln Stücke die Winkel ψ, μ durch Hülfe der Formeln (10. 11.) berechnen zu können.

16.

16. Man nenne diese Winkel

ψ ; μ für $\sigma = 0$
ψ' ; μ' für $\sigma = \zeta$
ψ'' ; μ'' für $\sigma = 2\zeta$
u. s. w.
ψ^{N-1} ; μ^{N-1} für $\sigma = (n-1)\zeta$
ψ^{N} ; μ^{N} für $\sigma = n\zeta$

und die Stücken der Kegelfläche, nemlich das erste über $AN = S'$, das zweyte über $MN = S''$ rc. das nte oder letzte über $VB = S^{N}$.

17. So ist die grössere Gränze von

$$S' = h\,r\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\zeta . \frac{\sec\psi + \sec\psi'}{2}$$

$$S'' = h\,r\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\zeta . \frac{\sec\psi' + \sec\psi''}{2}$$

$$S''' = h\,r\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\zeta . \frac{\sec\psi'' + \sec\psi'''}{2}$$

u. s. w.

$$S^{N} = h\,r\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\zeta . \frac{\sec\psi^{N-1} + \sec\psi^{N}}{2}$$

18. Demnach durch Summirung dieser Ausdrücke für die halbe Kegelfläche $\frac{1}{2}S$ die grössere Gränze =

$$h\,r\,\text{tg}\tfrac{1}{2}\zeta\left(\frac{\sec\psi + \sec\psi^{N}}{2} + \sec\psi' \ldots + \sec\psi^{N-1}\right)$$

 d. h.

d.h. die halbe Summe der ersten und letzten Secante zur Summe aller übrigen addirt, und alles in $h r \tan g \frac{1}{2} \zeta$ multiplicirt.

19. Auf eine ähnliche Art erhält man die kleinere Gränze von $\frac{1}{2}$ S =

$h r \sin \frac{1}{2} \zeta (\sec \mu \ldots + \sec \mu^{n-1})$.

20. Je mehr gleiche Theile man sich den Halbkreis ANB eingetheilt vorstellt, je grösser also n ist, desto näher rücken diese beyden Gränzen zusammen. Ein arithmetisches Mittel zwischen ihnen kann ohne großen Fehler für den Werth der halben Kegelfläche angenommen werden.

Ex. Es sey wie bey dem Kegel (§.92.12.) $r = 1$; $e = 3$; $h = 4$, und der Halbkreis in $n = 6$ gleiche Theile getheilt, so erhält man für die Winkel ψ und μ erstlich die beyden Formeln (10. 11.)

$$\tan g \psi = \frac{1 + 3 \cos \sigma}{4} = 0{,}25 + \tfrac{3}{4} \cos \sigma$$

$$\tan g \mu = \frac{\cos 15^\circ + 3 \cos (\sigma + 15^\circ)}{4}$$

$$= 0{,}24148 + \tfrac{3}{4} \cos (\sigma + 15^\circ)$$

20. Demnach erstlich

für σ	tang ψ
0	$0{,}25 + \frac{3}{4} = 1{,}00000$
30	$0{,}25 + \frac{3 \cos 30^\circ}{4} = 0{,}89951$
60	$0{,}25 + \frac{3 \cos 60^\circ}{4} = 0{,}62500$
90	$0{,}25 + \frac{3 \cos 90^\circ}{4} = 0{,}25000$
120	$0{,}25 - \frac{3 \cos 60^\circ}{4} = 0{,}12500$
150	$0{,}25 - \frac{3 \cos 30^\circ}{4} = 0{,}39951$
180	$0{,}25 - \frac{3}{4} = 0{,}50000$

Die drey letzten Tangenten würden zwar negativ seyn, aber man setzt wegen (10) ihre Werthe nur positiv hin. Auch erhellet, daß die drey letzten Tangenten aus den drey ersteren leicht gefunden sind, weil in denselben dieselben Cosinusse wie in den erstern vorkommen. Etwas ähnliches findet allemahl statt, wenn man für n eine gerade Zahl nimmt, weil von 90° bis 180° die Cosinusse in eben der Ordnung folgen, wie von 90° bis 0°, welches denn die Rechnung sehr erleichtert.

21. Man suche nun die gefundenen Tangenten (sie gehören der Ordnung nach zu den Winkeln ψ, ψ', ψ'' 2c.) in den Tafeln auf, und

 schreibe

schreibe sogleich die darneben stehenden Secanten heraus, wenn es nicht darauf ankömmt, auch vorher die Secunden in den Winkeln ψ', ψ'' rc. in Betrachtung zu ziehen, so erhält man folgende Werthe

$$\tfrac{1}{2}\sec\psi = 0{,}70710 \quad (18)$$
$$\sec\psi' = 1{,}34492$$
$$\sec\psi'' = 1{,}17939$$
$$\sec\psi''' = 1{,}03076$$
$$\sec\psi^{IV} = 1{,}00780$$
$$\sec\psi^{V} = 1{,}07689$$
$$\tfrac{1}{2}\sec\psi^{VI} = 0{,}55902 \quad (18)$$
$$\text{Summe} = 6{,}90588$$

22. Dieß multiplicirt in $hr \tan \tfrac{1}{2} z$ oder in $4 \tan 15^0$ oder in $1{,}0715$ giebt durch Logarithmen, oder auch durch die abgekürzte Multiplication, die größere Gränze von $\tfrac{1}{2}$ S $= 7{,}40165$ welche aber, wegen der in den Winkeln ψ weggelassenen Secunden, in den Tausendtheilchen unrichtig seyn kann.

23. Für die kleinere Gränze von $\tfrac{1}{2}$ S findet man auf eine ähnliche Weise erstlich die Tangenten von μ wie folget

σ	tang μ
0	$0{,}24148 + \tfrac{3}{4}\cos 15^0 = 0{,}96592$
30	" " $+ \tfrac{3}{4}\cos 45^0 = 0{,}77181$
60	" " $+ \tfrac{3}{4}\cos 75^0 = 0{,}43559$
90	" " $- \tfrac{3}{4}\cos 75^0 = 0{,}04737$
120	" " $- \tfrac{3}{4}\cos 45^0 = 0{,}28885$
150	" " $- \tfrac{3}{4}\cos 15^0 = 0{,}48296$

Hier-

Hieraus $\sec \mu = 1,39016$
$\sec \mu' = 1,26329$
$\sec \mu'' = 1,09071$
$\sec \mu''' = 1,00112$
$\sec \mu^{IV} = 1,04090$
$\sec \mu^{V} = 1,11056$
Summe $= 6,89674$

Diese multiplicirt in $h\, r \sin \frac{1}{2} \zeta$ d. h. in $4 \sin 15^0$ oder in 1,0353, giebt für die kleinere Gränze von $\frac{1}{2}$ S die Zahl 7,14011.

24. Nun war die grössere Gränze = 7,40165 (22). Nimmt man also hievon das Mittel, so hat man $\frac{1}{2}$S = 7,2708; also die ganze Kegelfläche S = 14,5417; welches von dem oben (§. 92. 23.) gefundenen Werthe 14,4527 um 0,0890 abweicht.

25. Nähere Gränzen würde man erhalten, wenn man n = 12 also $\zeta = 15^0$ setzte. Ich habe für diesen Fall die grössere Gränze = 7,27311 und die kleinere = 7,20867 gefunden, woraus das Mittel S = 14,4817 giebt, welches von dem obigen S = 14,4527
nur um 0,0290
abweicht.

26. Man sieht hieraus, daß, je näher die beyden Gränzen einander kommen, desto weniger das Mittel aus ihnen, von dem Werthe der

Kegelfläche abweichen wird, welchen man nach der (§. 92.) angegebenen Rectificationsmethode erhält, welche also in Absicht auf Genauigkeit und Leichtigkeit der Berechnung, allerdings der Gränzmethode (18. 19.) vorzuziehen ist, bey der man weit mehr zu rechnen hat, wenn sich dadurch eben der Grad der Genauigkeit soll erhalten lassen.

Noch eine Methode, die Oberfläche des schiefen Kegels sehr nahe zu finden.

§. 94.

1. Man gedenke sich den Bogen NM (Fig. 54) halbirt, und in dem Halbirungspunkte eine Tangente dieses Bogens gezogen, hierauf von F ein Perpendikel auf diese Tangente, so ist dieses Perpendikel $= \sqrt{(h^2 + (r + e \cos(\sigma + \frac{1}{2}\zeta))^2)}$, wie man leicht aus (§. 93. 8.) ableitet, wenn man in den dortigen Ausdruck statt des Winkels σ nur den Winkel GCL $= \sigma + \frac{1}{2}\zeta$ setzt.

2. Ohne Zweifel kann das Stück der Kegelfläche, welches dem Bogen MN, den ich nicht sehr groß annehme, entspricht, nicht viel von einem Dreyecke abweichen, dessen Grundlinie der Länge des Bogens MN, und die Höhe dem (1) gefundenen Perpendikel gleich seyn würde, weil dieß Dreyeck ohne Zweifel grösser ist als die kleinere Gränze (§. 93. 4.) und kleiner

kleiner als die grössere, und also ohngefähr in eben dem Verhältniß zwischen die beyden Gränzen fallen wird, als das Stück der Kegelfläche selbst zwischen dieselben fallen würde.

3. Nun ist, wenn der Winkel MCN ζ Grade fasset, die Länge des Bogens MN $= r.\zeta$, wenn man ζ in Decimaltheilen des Halbmessers ausdrückt.

4. Also das Stück der Kegelfläche beynahe $= \frac{1}{2} r \zeta \sqrt{(h^2 + (r + e \cos(\sigma + \frac{1}{2}\zeta))^2)}$; oder $= \frac{1}{2} r h \zeta . \sec \psi$ wenn man

$$\tan \psi = \frac{r + e \cos(\sigma + \frac{1}{2}\zeta)}{h}$$

setzt.

5. Demnach die halbe Kegelfläche oder

$$\tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{2} r h \zeta \Sigma \sec \psi$$

also die ganze oder

$$S = r h \zeta \Sigma \sec \psi$$

wo $\Sigma \sec \psi$ die Summe aller Secanten bezeichnet, die man für die Winkel ψ nach der Formel (4) erhält, von $\sigma = 0$ bis $\sigma = (n-1)\zeta$.

Exempel. Für die obigen Data (§.92. 12.) und für $n = 6$, also $\zeta = 30^\circ$, erhält man

$$\tan \psi = 0{,}25 + \frac{3 \cos(\sigma + 15^\circ)}{4}.$$ Also

für

10. Z. B. für $r=1$; $h=4$; $e=\frac{1}{2}$ findet sich, $z=30^0$ gesetzt, die ganze Kegelfläche $=$ 12,99, und nach der Formel (5) $=$ 12,95; also der Unterschied $=$ 0,04 welcher von der ganzen Kegelfläche ohngefähr den 325sten Theil ausmacht. Man würde also auf 325 Quadratfuß nur ohngefähr um 1 Quadratfuß fehlen, wenn man die Kegelfläche schlechtweg nach der Formel (9) berechnete. Es kann also diese Formel bey Kegeln die nicht sehr schief sind, ohne großen Fehler in der Ausübung gebraucht werden. Für $e=0$, also für einen geraden Kegel, giebt sie ohnehin die Fläche völlig genau.

11. Das Verfahren (§. 92. 6. 2c.) die Berechnung einer schiefen Kegelfläche auf die Construction oder Rectification einer krummen Linie, und zwar einer solchen als (§. 92.) angegeben worden ist, zu bringen, hat Varignon (Miscell. Berol. 1727. Contin. II.) zuerst gelehrt, ohne jedoch zu zeigen, wie nach dieser Methode die Rechnung selbst bequem für die Ausübung einzurichten ist. Andere haben andere krumme Linien vorgeschlagen, die aber zur Ausübung meistens unbrauchbar sind, und bey der Rectification auf sehr zusammengesetzte Formeln führen. Euler in den Nov. Comment. Acad. Sc. Petrop. Vol. I. 1747. 1748. de superficie conorum scalenorum aliorumque corporum conicorum.

In

In den novis actis Ac. Petrop. Tom. III. hat Euler nochmahls von dem schiefen Kegel gehandelt, und daselbst die Oberfläche des Kegels durch eine Reihe zu bestimmen gesucht. Da aber diese Reihe nicht für alle Fälle brauchbar ist, so begnüge ich mich hier nur, derselben im Allgemeinen erwähnt zu haben. Herr Prof. Klügel hat sie in seinem mathematischen Wörterbuche III. Th. unter dem Artikel Kegel (S. 12) gleichfalls vorgetragen, und auf eine etwas einfachere Art entwickelt.

§. 95.

Aufgabe.

Die krumme Seitenfläche eines Kegels zu finden, dessen Grundfläche eine Ellipse ist, und dessen Spitze senkrecht über einer der beyden Axen der Ellipse angenommen wird.

Aufl. 1. Es sey (Fig. 56. Tab. V.) AB die große Axe der Ellipse, C ihr Mittelpunkt; AC $= \alpha$ die halbe große Axe, und CE $= \gamma$ die halbe kleine, so ist die Gleichung der Ellipse zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AV $= t$, und VD $= u$ folgende

$$u^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(2\alpha t - t^2)$$

2. Das Perpendikel FH von der Spitze F des Kegels auf die Grundfläche, falle auf den Punkt H der großen Axe, und es sey wie in (§. 92.) $FH = h$; $AH = k = AC + CH = \alpha + e$.

3. Wollte man hieraus nach der allgemeinen Formel (§. 91. 6.) das Element dS der Kegelfläche berechnen, und dieß Element wie in (§. 92. 3.) bloß durch t und dt ausdrücken, so würde man wie dort auf ein Differential kommen, welches gleichfalls nur durch eine unendliche Reihe integrirt werden könnte, und daher für die Ausübung von keinem großen Nutzen seyn würde.

4. Es muß also die elliptische Kegelfläche, wie diejenige, deren Grundfläche ein Kreis war, auch nur durch eine Annäherungsmethode gefunden werden, wozu ich folgendes Verfahren am brauchbarsten finde.

5. Es sey YD ein beliebiger Bogen auf dem Umfange der Ellipse, und YD, Dd, in der Ebene der Ellipse, die Normallinien an Y und D.

6. Man nehme diesen Bogen so groß, daß der Winkel YdD beyder Normallinien höchstens 30 Grade beträgt, so kann man wie in (§. 94. 2.) beweisen, daß, wenn y ohngefähr den Halbirungspunkt des Bogens YD vorstellt, und an y eine Tangente yT gezogen wird, das Stück

der

der Kegelfläche, welches dem Bogen YD entspricht, ohne großen Fehler gleich seyn wird einem Dreyecke, dessen Grundlinie der Länge des Bogens YD, und die Höhe dem Perpendikel von F auf jene Tangente gleich seyn würde.

7. Nun ist aber die Länge des Bogens

$YD = \frac{Yd + Dd}{2} \cdot \eta$, wenn η den Winkel YdD

beyder Normallinien (welchen ich die **Weite** (amplitudo) des Bogens YD nennen will) bezeichnet (§. 58. XI.). Nennt man also das Perpendikel von F auf die Tangente an $y = p$, so ist das dem Bogen YD entsprechende Stück der Kegelfläche $FYD = \frac{1}{2} p \cdot \frac{Yd + Dd}{2} \cdot \eta$.

8. Um demnach dieß Stück der Kegelfläche gehörig auszudrücken, und daraus Vorschriften für die ganze Kegelfläche abzuleiten, muß man die Werthe von YD, Dd und p aus den Abmessungen der Ellipse zu bestimmen suchen.

9. Die Normallinie Dd mache mit der Abscissenlinie A den Winkel $DPA = \varphi$, so ist der Winkel der Normallinie Yd mit AB, nemlich $YLA = \varphi' = \varphi + \eta$.

10. Für die Punkte D und Y seyen die Coordinaten

$AV = t$; $VD = u$
$AX = t'$; $XY = u'$

Die aus dem Mittelpunkt C nach D und Y gezogenen Linien $CD = z$; $CY = z'$; die Winkel $ACD = \sigma$, $ACY = \sigma'$.

11. Durch D sey Dn bis an die Normale Yd parallel mit AB, so hat man

$$Dk = VX = t' - t$$
$$Yk = YX - VD = u' - u$$

und in dem rechtwinklichten Dreyecke Ykn den Winkel bey $n = ALY = \varphi'$; folglich

$$nk = (u' - u) \cot \varphi'$$

und $Dn = Dk + kn = t' - t + (u' - u) \cot \varphi'$.

12. Hieraus in dem Dreyecke Dnd

$$\sin d : Dn = \sin YnD : Dd \text{ d. h.}$$
$$\sin \eta : Dn = \sin \varphi' : Dd$$

13. Also aus (11) den Werth von Dn substituirt.

$$Dd = \frac{(t' - t) \sin \varphi' + (u' - u) \cos \varphi'}{\sin \eta}$$

14. Man findet auf dieselbe Weise, wenn durch Y die Parallele Ym bis an die Normale dD gezogen wird, durch Hülfe des rechtwinklichten Dreyecks Dlm und des Dreyecks dYm

$$Yd = \frac{(t' - t) \sin \varphi + (u' - u) \cos \varphi}{\sin \eta}$$

15.

15. Demnach die Summe $Dd + Yd =$
$$\frac{(t' - t)(\sin\varphi' + \sin\varphi) + (u' - u)(\cos\varphi' + \cos\varphi)}{\sin\eta}$$

16. Nun ist (Trig. S. XIII. 11. 13. I. Th. der pract. Geometr.)

$$\sin\varphi' + \sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}\eta.$$
$$\cos\varphi' + \cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}\eta.$$

Ferner $\sin\eta = 2\sin\tfrac{1}{2}\eta\cos\tfrac{1}{2}\eta$.

17. Setzt man diese Werthe in den Ausdruck (15), so ergiebt sich $Dd + Yd =$
$$\frac{(t' - t)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi) + (u' - u)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\sin\tfrac{1}{2}\eta}$$

18. Nun ist weiter in den rechtwinklichten Dreyecken CDV, CYX

$$u = z\sin\sigma;\ u' = z'\sin\sigma'$$
$$t = \alpha - CV = \alpha - z\cos\sigma;\ t' = \alpha - z'\cos\sigma,$$

Also

$$t' - t = z\cos\sigma - z'\cos\sigma'$$
$$u' - u = z'\sin\sigma' - z\sin\sigma$$

19. Auch hat man aus (18) und aus der Gleichung der Ellipse (1) nemlich $u^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(2\alpha - t)\,t$

Die aus dem Mittelpunkt C nach D und Y gezogenen Linien $CD = z$; $CY = z'$; die Winkel $ACD = \sigma$, $ACY = \sigma'$.

11. Durch D sey Dn bis an die Normale Yd parallel mit AB, so hat man

$$Dk = VX = t' - t$$
$$Yk = YX - VD = u' - u$$

und in dem rechtwinklichten Dreyecke Ykn den Winkel bey $n = ALY = \varphi'$; folglich

$$nk = (u' - u) \cot \varphi'$$

und $Dn = Dk + kn = t' - t + (u' - u) \cot \varphi'$.

12. Hieraus in dem Dreyecke Dnd,

$$\sin d : Dn = \sin YnD : Dd \text{ d. h.}$$
$$\sin \eta : Dn = \sin \varphi' : Dd$$

13. Also aus (11) den Werth von Dn substituirt.

$$Dd = \frac{(t' - t) \sin \varphi' + (u' - u) \cos \varphi'}{\sin \eta}$$

14. Man findet auf dieselbe Weise, wenn durch Y die Parallele Ym bis an die Normale dD gezogen wird, durch Hülfe des rechtwinklichten Dreyecks Dlm und des Dreyecks dYm

$$Yd = \frac{(t' - t) \sin \varphi + (u' - u) \cos \varphi}{\sin \eta}$$

15.

15. Demnach die Summe $Dd + Yd =$
$$\frac{(t' - t)(\sin\varphi' + \sin\varphi) + (u' - u)(\cos\varphi' + \cos\varphi)}{\sin\eta}$$

16. Nun ist (Trig. S. XIII. 11. 13. I. Th. der pract. Geometr.)
$$\sin\varphi' + \sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}\eta.$$
$$\cos\varphi' + \cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$
$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)\cos\tfrac{1}{2}\eta.$$
Ferner $\sin\eta = 2\sin\tfrac{1}{2}\eta\cos\tfrac{1}{2}\eta$.

17. Setzt man diese Werthe in den Ausdruck (15), so ergiebt sich $Dd + Yd =$
$$\frac{(t' - t)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi) + (u' - u)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\sin\tfrac{1}{2}\eta}$$

18. Nun ist weiter in den rechtwinklichten Dreyecken CDV, CYX
$$u = z\sin\sigma;\ u' = z'\sin\sigma'$$
$$t = \alpha - CV = \alpha - z\cos\sigma;\ t' = \alpha - z'\cos\sigma'$$
Also
$$t' - t = z\cos\sigma - z'\cos\sigma'$$
$$u' - u = z'\sin\sigma' - z\sin\sigma$$

19. Auch hat man aus (18) und aus der Gleichung der Ellipse (1) nemlich $u^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(2\alpha - t)\,t$

$$z^2 \sin\sigma^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(\alpha + z\cos\sigma)(\alpha - z\cos\sigma)$$

$$= \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - z^2\cos\sigma^2)$$

Demnach $1 - \cos\sigma^2$ statt $\sin\sigma^2$ gesetzt, nach gehöriger Rechnung

$$z = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{(\alpha^2\sin\sigma^2 + \gamma^2\cos\sigma^2)}}$$

$$= \frac{\alpha}{\cos\sigma\sqrt{(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\tang\sigma^2)}}$$

20. Man setze

$$\frac{\alpha}{\gamma}\tang\sigma = \tang\mu$$

so wird

$$z = \frac{\alpha}{\cos\sigma\sec\mu} = \frac{\alpha\cos\mu}{\cos\sigma}$$

also $z\cos\sigma = \alpha\cos\mu$; und eben so
$z'\cos\sigma' = \alpha\cos\mu'$

wenn man auf eine ähnliche Art

$$\frac{\alpha}{\gamma}\tang\sigma' = \tang\mu'$$

setzt.

21. Ferner ist auch

$$z = \frac{\gamma}{\sin\sigma\sqrt{(1+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cot\sigma^2)}}$$ oder

$$z = \frac{\gamma}{\sin\sigma\sqrt{(1+\cot\mu^2)}} = \frac{\gamma}{\sin\sigma\,\mathrm{cosec}\,\mu}$$ d. h.

$$z = \frac{\gamma\sin\mu}{\sin\sigma}$$ oder $z\sin\sigma = \gamma\sin\mu$

Und eben so $z'\sin\sigma' = \gamma\sin\mu'$.

22. Folglich (18. 20. 21.)

$$t' - t = \alpha(\cos\mu - \cos\mu')$$
$$u' - u = \gamma(\sin\mu' - \sin\mu)$$

23. Aber

$$\cos\mu - \cos\mu' = 2\sin\tfrac{1}{2}(\mu'+\mu)\sin\tfrac{1}{2}(\mu'-\mu)$$
$$\sin\mu' - \sin\mu = 2\cos\tfrac{1}{2}(\mu'+\mu)\sin\tfrac{1}{2}(\mu'-\mu)$$
(Trig. S. XIII. 12. 14)

24. Diese Werthe in (22) und die in (22) hierauf in (17) substituirt, geben nach gehöriger Rechnung $Dd + Yd =$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\mu'-\mu)}{\sin\frac{1}{2}\eta} \cdot \left\{\begin{array}{l} 2\alpha\sin\frac{1}{2}(\mu'+\mu)\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi) \\ +2\gamma\,\mathrm{cf}\frac{1}{2}(\mu'+\mu)\,\mathrm{cf}\,\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi) \end{array}\right\}$$

Oder wenn man die Producte dieser Sinusse und Cosinusse nach (Trig. S. XIII. 7. 9.) durch Cosinusse von Summen und Differenzen ausdrückt,

$$z^2 \sin \sigma^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} (\alpha + z \cos \sigma) (\alpha - \gamma$$

$$= \frac{\gamma^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - z^2 \cos \sigma^2)$$

Demnach $1 - \cos \sigma^2$ statt sin
gehöriger Rechnung

$$z = \frac{\alpha \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 \sin \sigma^2 +}}$$

$$= \frac{\alpha}{\cos \sigma \sqrt{(1 +}}$$

20. Man setze

$$\frac{\alpha}{\gamma} \tang \sigma =$$

so wird

$$z = \frac{}{\cos} \quad \ldots ng\ \sigma = \frac{\gamma}{\alpha} \tang \mu$$

also $z \cos \sigma =$ $\frac{}{\gamma} \tang \mu$ oder
$z' \cos \sigma'$

wenn man $= \frac{\gamma}{\alpha} \tang \varphi$

$\frac{\alpha}{\gamma}$ $\mu' = \frac{\gamma}{\alpha} \tang \varphi'$

setzt.

Man

…ach, in der Formel (24) den
…den Winkeln φ', φ, welche
…mit der Abscissenlinie
…sich aus φ'
…nen Ausdrücke
…ist.

…p (7)
…ikel von
…Punkt y ich
…will, daß die
…Abscissenlinie BA
…$\frac{+\varphi}{2}$ mache, so wird
…Mitte zwischen Y und D

…s Perpendikel CR wird Tab. IV.
parallel seyn mit der Normallinie vy
…Punkte y, dessen Tangente yT die Ab-
…linie in T durchschneide. Also ist der
…inkel RCT $=$ yvT $= \frac{\varphi' + \varphi}{2}$; und T $=$
$90^\circ - \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$.

Demnach im $\triangle$CTR, CR $=$ CT sin T
$=$ CT cos $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$.

28. Man ziehe Cy, und für den Punkt y die Ordinate yq $=$ u; so ist Tq $=$ u. tang qyT $=$ u. cot T $=$ u tang $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$. (27) und

 Cq

$Cq = u . \cot yCq$; aber wenn die Normallinie yv mit der Abscissenlinie den Winkel $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$ macht (26), so ist für den zugehörigen Winkel yCq am Mittelpunkt

$$\cot yCq = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cot \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$$

wenn man in (25) statt σ setzt yCq, und statt φ den Winkel $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$.

29. Also $Cq = u . \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \cot \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$.

30. Demnach erhält man $CT = Tq + Cq$ d. h.

$$CT = u . \frac{\gamma^2 \tan \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) + \alpha^2 \cot \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\gamma^2}$$

und folglich wenn man mit $\cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$ multiplicirt (27)

$$CR = u . \frac{\alpha^2 \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2 + \gamma^2 \sin \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2}{\gamma^2 \sin \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}$$

wo das Quadratzeichen, wie kaum zu erinnern ist, sich auf die trigonometrischen Linien und nicht auf die in der Parenthese eingeschlossenen Winkel bezieht.

31. Aber aus (§. 61. 3.) ist, wenn man das dortige $y = u$, und das dortige φ hier $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$ setzt

u =

$$u = \frac{\gamma^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2)}}$$

$$= \frac{\gamma^2 . \sin \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\sqrt{(\alpha^2 \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2 + \gamma^2 \sin \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2)}}$$

32. Substituirt man also diesen Werth in (30), so erhält man

$$CR = \sqrt{(\alpha^2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2 + \gamma^2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2)}$$

welches Perpendikel ich mit ρ bezeichnen will.

33. Nun sey (Fig. 56) Hw mit dem Perpendikel CR parallel, so ist Hw auf der Tangente Tyw. senkrecht, und folglich auch Fw auf diese Tangente senkrecht; demnach $Fw = p = \sqrt{(FH^2 + Hw^2)} = \sqrt{(h^2 + (HN + Nw)^2)} = \sqrt{(h^2 + (HN + CR)^2)}$ wenn CN parallel mit wT.

Aber (32) $CR = \rho$; $HN = CH \sin HCN = CH \sin T = e \cos \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$ (27); also

$$p = \sqrt{(h^2 + (\rho + e \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi)^2)}$$

34. Hieraus ergiebt sich denn folgende Vorschrift: Die halbe Oberfläche des schiefen elliptischen Kegels, d. h. die dem halben Umfang AYB (Fig. 56) der Grundfläche entsprechende Seitenfläche des schiefen Kegels zu finden.

I. Man gedenke sich den halben Umfang AYB bey D, Y, E, Z, u. s. w. so abgetheilt, daß die Normallinien an A, D, Y, E rc. der Ordnung nach, mit der Abscissenlinie AB, die Winkel $\varphi = 0$, $\varphi' = \eta$, $\varphi'' = 2\eta$, $\varphi''' = 3\eta$ u. s. w. machen würden, wo denn η einen aliquoten Theil von 180^0 bedeute, wie z. B. ξ in (§. 93. 13.) $= \frac{180^0}{n}$ gesetzt wurde. Es ist (§. 61. 9.) hinlänglich, $n = 6$ und also $\eta = 30^0$ zu nehmen, und so die Stücken der Kegelfläche zu berechnen, welche, der Ordnung nach, den Bögen AD, DY, YE u. s. w. deren Weite (amplitudo) (6) 30 Graden gleich ist, entsprechen würden.

II. Für das dem ersten Bogen AD entsprechende Stück der Kegelfläche, setzt man in den Formeln (25) $\varphi = 0$ und $\varphi' = 30^0 = \eta$, berechnet hieraus die Winkel μ, μ', und nachdem diese gefunden sind, den elliptischen Bogen AD nach der Formel (24) in welcher YD den Bogen AD bedeutet, wenn $\varphi = 0$ und $\varphi' = 30^0$. Aus diesen Winkeln $\varphi = 0$ und $\varphi' = 30^0$ hat man denn ferner nach (32) auch den Werth von ρ, und hieraus (33) den Werth von p, mithin das dem Bogen AD zugehörige Stück der Kegelfläche $= \frac{1}{2}$ p. Bogen AD.

III. Für das dem zweyten Bogen YD entsprechende Stück der Kegelfläche, setzt man in

den

den Formeln (24. 25. 32. 33.) $\varphi = 30^0$; $\varphi' = 60^0$; findet hieraus diesen Bogen YD und das ihm entsprechende Perpendikel p, welches ich jetzt mit p' bezeichnen will. Dann wird das zu YD gehörige Stück der Kegelfläche $= \frac{1}{2}$ p'. Bogen YD.

IV. Für den dritten Bogen YE, setzt man in die erwähnten Formeln $\varphi = 60^0$; $\varphi' = 90^0$; für den vierten EZ, $\varphi = 90^0$, $\varphi' = 120^0$. u. s. w. und berechnet auf diese Weise alle die einzeln Stücken der Kegelfläche von A bis B, deren Summe dann die halbe Kegelfläche über AEB geben wird.

V. Da in der allgemeinen Formel (24) für jeden Bogen YD der beständige Factor $\frac{\eta}{2 \sin \frac{1}{2}\eta}$ vorkömmt, so erhellet, daß man für die erwähnten Werthe von φ und φ' nur den veränderlichen Theil der Formel (24) nemlich

$$\sin\frac{\mu'-\mu}{2}\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\gamma)\cos\left(\frac{\varphi'+\varphi}{2}-\frac{\mu'+\mu}{2}\right)\\-(\alpha-\gamma)\cos\left(\frac{\varphi'+\varphi}{2}+\frac{\mu'+\mu}{2}\right)\end{array}\right\}$$

welchen ich β nennen will, zu berechnen braucht. Dann ist der allgemeine Ausdruck für die halbe Kegelfläche über AEB $= \frac{\eta}{2 \sin \frac{1}{2}\eta} \Sigma (\frac{1}{2}\text{p} . \beta)$

wenn

wenn p überhaupt für jeden einzeln Bogen wie YD das zugehörige Perpendikel Fw ausdrückt.

VI. Für $\eta = 30^0 = 0{,}5235987$ in Decimaltheilen des Halbmessers, wird der beständige Factor $\frac{\eta}{2 \sin \frac{1}{2}\eta} = \frac{0{,}5235987}{2.0{,}2588190} = \frac{0{,}5235987}{0{,}5176380} = 1{,}01151$, also beynahe $= 1$.

§. 96.
Anmerkung.

1. Ich begnüge mich, hier nur den Gang der Rechnung entwickelt zu haben, die ihrer Natur nach freilich nicht so einfach, als für den Fall, daß die Grundfläche ein Kreis ist, seyn kann. Indessen ergeben sich zum Behufe der Rechnung noch einige Abkürzungen, die darin bestehen, daß man nach der Natur der Ellipse die Berechnung der einzeln Bögen wie AD, DY, YE nur bis E fortzusetzen nöthig hat, weil in dem zweyten Quadranten die Bögen EZ, ZW, WB, der Ordnung nach, denen EY, YD, DA gleich seyn müssen, so bald sie sämmtlich einerley Amplitüde oder Weite (§. 95. 6.) haben. Auch die Berechnung der Werthe von ρ (§. 95. 32.) braucht man nur innerhalb des Quadranten AE zu führen, weil z. B. für jede zwey Bögen wie YD, ZW, welche von E gleich

weit

weit abstehen, die Perpendikel CR oder ρ ebenfalls einander gleich sind.

2. Man nenne also den Werth des veränderlichen Theiles β (§. 95. 34. V.) für den ersten Bogen AD $=\beta'$, für den zweyten YD $=\beta''$; für den dritten YE $=\beta'''$ ꝛc.; für den letzten BW $=\beta^{VI}$, und die diesen Bögen zugehörigen Werthe von ρ und p (§. 95. 32. 33.) der Ordnung nach ρ', ρ'', ρ''', ρ^{IV} ... ρ^{VI}; p', p'', p''' ... p^{VI}, so hat man (1) $\beta' = \beta^{VI}$; $\beta'' = \beta^{V}$; $\beta''' = \beta^{IV}$, und für die halbe Kegelfläche den Ausdruck

$$\frac{\eta}{2\sin\frac{1}{2}\eta}(\tfrac{1}{2}p'.\beta' + \tfrac{1}{2}p''.\beta'' ... + \tfrac{1}{2}p^{V}.\beta^{V} + \tfrac{1}{2}p^{VI}.\beta^{VI}) =$$

$$\frac{\eta}{2\sin\frac{1}{2}\eta}.\left(\frac{p'+p^{VI}}{2}.\beta' + \frac{p''+p^{V}}{2}.\beta'' + \frac{p'''+p^{IV}}{2}.\beta'''\right)$$

Also für die ganze Kegelfläche den Ausdruck $S =$

$$\frac{\eta}{2\sin\frac{1}{2}\eta}[(p'+p^{VI})\beta' + (p''+p^{V})\beta'' + (p'''+p^{IV})\beta''']$$

3. Die Werthe der Perpendikel p', p'' ... würden der Ordnung nach folgende seyn

$$p' = \sqrt{(h^2 + (\rho' + e\cos 15^\circ)^2)}$$
$$p'' = \sqrt{(h^2 + (\rho'' + e\cos 45^\circ)^2)}$$
$$p''' = \sqrt{(h^2 + (\rho''' + e\cos 75^\circ)^2)}$$
$$p^{IV} = \sqrt{(h^2 + (\rho^{IV} + e\cos 105^\circ)^2)}$$
$$p^{V} = \sqrt{(h^2 + (\rho^{V} + e\cos 135^\circ)^2)}$$
$$p^{VI} = \sqrt{(h^2 + (\rho^{VI} + e\cos 165^\circ)^2)}$$

Aber

Aber $\rho^{IV} = \rho'''$ (1) und $\cos 105^\circ = -\cos 75^\circ$
$\rho^{V} = \rho''$; $\cos 135^\circ = -\cos 75^\circ$
$\rho^{VI} = \rho'$; $\cos 165^\circ = -\cos 15^\circ$

Also

$$p' = \sqrt{(h^2 + (\rho' + e \cos 15^\circ)^2)}$$
$$p^{VI} = \sqrt{(h^2 + (\rho' - e \cos 15^\circ)^2)}$$
$$p'' = \sqrt{(h^2 + (\rho'' + e \cos 45^\circ)^2)}$$
$$p^{V} = \sqrt{(h^2 + (\rho'' - e \cos 45^\circ)^2)}$$
$$p''' = \sqrt{(h^2 + (\rho''' + e \cos 75^\circ)^2)}$$
$$p^{VI} = \sqrt{(h^2 + (\rho''' - e \cos 75^\circ)^2)}$$

4. Es erhellet demnach, daß man nur die drey Werthe von β', β'', β''', die drey von ρ', ρ', ρ''', und aus den drey letztern die sechs Werthe von $p' \ldots p^{VI}$ zu berechnen nöthig hat, um alle die Grössen zu erhalten, aus denen sich demnächst die Kegelfläche nach (2) finden läßt, bey welcher Rechnung denn, wie leicht zu erachten ist, die Werthe von ρ und p, um das Ausziehen der Quadratwurzeln zu vermeiden, durch Hülfe der Sinustafeln gefunden werden können. So ist z. B. für den ersten Bogen AD der Werth von $\rho = \rho' = \sqrt{(\alpha^2 \cos 15^{\circ 2} + \gamma^2 \sin 15^{\circ 2})} = \alpha \cos 15^\circ . \sec m'$, wenn m' einen Winkel bedeutet dessen Tangente $= \frac{\gamma}{\alpha} \tan 15^\circ$

5. Ferner der Werth von $p = p' = \sqrt{(h^2 + (\rho' + e \cos 15^\circ)^2)} = h \sec \psi'$, wenn

ψ' einen Winkel bedeutet, dessen Tangente

$$= \frac{\rho' + e \cos 15^\circ}{h} = \frac{\alpha \sec m' + e}{h} \cos 15^\circ.$$

Der Werth von $p^{vi} = h \sec \xi'$, wenn auf eine ähnliche Weise $\tang \xi' = \frac{\alpha \sec m' - e}{h} \cos 15^\circ$ gesetzt wird. Dieß giebt denn in dem Ausdruck für die Kegelfläche (2) den Werth von

$$p' + p^{vi} = h (\sec \psi' + \sec \xi')$$

und so auf eine ähnliche Art

$$p'' + p^{v} = h (\sec \psi'' + \sec \xi'')$$
$$p''' + p^{iv} = h (\sec \psi''' + \sec \xi''')$$

wenn ψ'', ξ''; ψ''', ξ''', die Winkel bedeuten welche man erhält, wenn in den Formeln für $\tang m'$, $\tang \psi'$, und $\tang \xi'$, der Ordnung nach, 45°, 75° statt 15° gesetzt wird (3. 4.), woraus denn zugleich erhellet, daß man zur Berechnung der Perpendikel wie p', p'' u. s. w. gar nicht einmahl nöthig hat, die Perpendikel ρ', ρ'', u. s. w. selbst zu berechnen, weil für die erstern p', p''.. nur bloß die Winkel, m', m''. erforderlich sind. So läßt sich denn auch der gemeinschaftliche Factor h in allen Werthen von p', p'' u. s. w. in dem Ausdrucke (2) für die Kegelfläche absondern, wodurch denn für dieselbe der Ausdruck

$$S = \frac{\eta . h}{2 \sin \frac{1}{2} \eta} [\beta' (\sec \psi' + \sec \xi') + \beta'' (\sec \psi'' + \sec \xi'') \ldots]$$

erhalten wird.

§. 97.

Zusatz I.

Für einen geraden elliptischen Kegel ist $e = 0$ und $\sec \psi' = \sec \xi'$; $\sec \psi'' = \sec \xi''$ u. s. w. also

$$S = \frac{\eta h}{\sin \frac{1}{2} \eta} (\beta' \sec \psi' + \beta'' \sec \psi'' + \beta''' \sec \psi''')$$

Für diesen Fall wird also die Berechnung der Oberfläche noch leichter.

§. 98.

Zusatz II.

In der Ausübung wird es selten vorkommen, die Oberfläche eines schiefen Kegels so genau zu berechnen, daß man die bisherigen Vorschriften anzuwenden genöthigt seyn sollte, die ich nur für den Fall, wenn die Oberfläche sehr genau verlangt würde, beygebracht habe. Für die gewöhnliche Ausübung mag es immer hinlänglich seyn, sich folgenden Verfahrens zu bedienen.

1. Man

1. Man theile den elliptischen Quadranten ADE in drey oder mehr Theile, dergestalt, daß die Sehnen dieser Theile AD, DY, YE von gleicher Grösse sind, und trage diese gleichen Sehnen, auch aus E, in Z, W, B, so daß der Quadrant EZB von E gegen B, eben so wie der erstere von E gegen A, eingetheilt sey. Zur Erläuterung habe ich jeden Quadranten in drey Theile getheilt, theilt man ihn in mehrere, so erhält man des Kegels Oberfläche noch genauer.

2. An die Mitte y eines jeden solchen Bogens, wie YD, ziehe man eine Tangente yQ, welches leicht durch Anlegung eines Linials so genau geschehen kann, als es für die Ausübung nöthig ist, und fälle dann auf jede solche Tangente von der Spitze F des Kegels ein Perpendikel Fw, welches durch Hülfe eines längst yQ zu verschiebenden Winkelhaakens, und eines Stabes Fw, den man durch F gehen läßt, sich leicht wird bewerkstelligen lassen. Auch schon durch das bloße Augenmaaß wird man den Stab wF leicht in die Lage bringen, daß er mit der Tangente yQ ohne merklichen Fehler einen rechten Winkel Fwy macht.

3. Dann messe man jedes solches Perpendikel wie Fw, am besten längst des angelegten Stabes wF selbst, wenn derselbe etwa mit Abtheilungen versehen wäre, so hat man der

Ordnung nach, für die einzeln Bögen auf dem Umfange AEB die Werthe von p', p'', p'''...p^{VI}.

4. Nun nehme man eine Schnur, oder um Dehnung zu vermeiden, noch besser ein leinenes Band, lege es um des Kegels Umfang AEB, und bezeichne auf dem Bande die Punkte D, Y, E, Z W, B, mit Bleystift, spanne hierauf dieses Band in eine gerade Richtung aus, und messe auf demselben die Länge der Bögen AD, DY, YE, EZ, ZW, WB, oder hier auf dem in eine gerade Linie ausgespannten Quadranten AE, nur die Bögen AD, DY, YE, welche ich der Ordnung nach mit b', b'', b''' bezeichnen will; so ist auch der Bogen EZ $= b'''$, ZW $= b''$, WB $= b'$, und folglich wie aus dem bisherigen erhellet, die dem Bogen AEB zugehörige Kegelfläche $=$

$$\frac{b'(p + p^{VI}) + b''(p'' + p^{V}) + b'''(p''' + p^{IV})}{2}$$

wenn nemlich der elliptische Quadrant AE nur in drey Theile getheilt ist.

§. 99.
Zusatz III.

1. Am bequemsten würde die Rechnung seyn, wenn die Bögen b', b'', b''' genau von gleicher Länge wären, dann hätte man für die halbe Kegelfläche den Ausdruck $\frac{1}{2} b' (p' + p''$

+

$+ p''' \text{ꝛc.} + p^{VI}$), und also nur eine einzige Multiplication zu verrichten, da hingegen wenn nur die Sehnen dieser Bögen einander gleich genommen worden sind (1), die Bögen selbst nicht genau von gleicher Länge ausfallen, und daher in Zus. II. mehrere Multiplicationen erforderlich sind.

2. Um demnach die Bögen AD, DY, YE ꝛc. selbst genau von gleicher Grösse zu erhalten, so lege man gleich anfänglich um den Bogen AEB das (§. 98. 4.) erwähnte Band, spanne es hierauf in eine gerade Linie aus, und theile auf ihr die Länge des Bogens in 6 gleiche Theile, bemerke die Theilpunkte mit Bleystift, und lege nun das eingetheilte Band wieder um den Umfang AEB, so kann man auf demselben in D, Y, E, Z, W, B die auf dem Bande befindlichen Theilpunkte abstechen, und so die Bögen AD, DY, u. s. w. genau von gleicher Grösse erhalten. Sodann ziehe und messe man für jeden einzeln Bogen die Perpendikel p', p'', p''' ꝛc. wie (Zus. II.) gezeigt worden, so ist, wenn die ganze gemessene Länge des Bogens AEB mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet wird, $b' = \frac{1}{6}\mathfrak{B}$, und die dem Bogen $\mathfrak{B}$ zugehörige Kegelfläche $= \frac{1}{12}\mathfrak{B}\,(p' + p'' + p''' \ldots + p^{VI})$, also die ganze Kegelfläche $= \frac{1}{6}\mathfrak{B}\,(p' + p'' \ldots + p^{VI})$.

§. 100.
Zusatz IV.

Man sieht leicht, daß diese Vorschriften (§§. 98. 99.) die Kegelfläche zu finden, allgemein sind, **über welchen Punkt** H **der Grundfläche auch die Spitze** F **des Kegels fallen mag**, da hingegen nach den Vorschriften (§. 92. bis §. 98.) H auf eine der beyden Axen der Ellipse fallen muß, wo denn, wenn H auf die kleine Axe fiele, in den Rechnungen (§. 95 ff.) nichts zu ändern seyn würde, als nur α die kleine Axe und γ die große bedeuten zu lassen. Für den Fall, daß H auf keine der beyden Axen fiele, würde eine unmittelbare Berechnung der Kegelfläche auf noch beschwerlichere Formeln führen als die Rechnung (§. 95). In diesem Falle ist also das practische Verfahren (Zus. III.) das einzige, wovon sich ohne große Weitläufigkeit doch eine hinlängliche Genauigkeit erwarten läßt. Begreiflich muß man aber alsdann für den andern halben Umfang der Ellipse AKB eben so wie für den erstern AEB verfahren, weil wenn H nicht auf eine der beyden Axen fällt, die Theile der Kegelfläche, welche den Bögen AEB, AKB entsprechen, nicht einander gleich und ähnlich sind, und man also nicht die ganze Kegelfläche erhalten würde, wenn man nur die dem halben Umfang AEB entsprechende wie (Zus. IV.) verdoppeln wollte.

§. 101.

§. 101.

Zusatz V.

So erhellet nun überhaupt, wie das Verfahren (Zus. II. III.) selbst für jede andere krumme Linie AEB als für eine Ellipse angewandt werden kann.

Man kann also nach demselben **eine jede Kegelfläche AEBF mit hinlänglicher Genauigkeit finden, die Grundfläche mag, durch welche krumme Linie AEB man will, begränzt seyn,** wenn sie nur nicht eine gar zu unregelmäßige Krümmung, zumahl einwärts gehende Krümmungen, hat, wodurch die Ziehung der Tangenten wie yQ unmittelbar an dem Kegel selbst zu beschwerlich fällt.

Wäre dieß der Fall, so würde man die krumme Linie AEB lieber erst auf dem Papiere zu entwerfen suchen (am besten durch Abscissen und Ordinaten, die man außerhalb des Kegels nähme) und hierauf auch die auf dem Umfange AEB nach Zus. III. bestimmten Punkte A, D, Y, E, Z, u. s. w. durch Abscissen und Ordinaten in die Zeichnung bringen: Ist nun in diesem Risse auch der Punkt H gehörig entworfen worden, so lassen sich nunmehr die Tangenten wie yQ auf dem Papiere ziehen, die Perpendikel Hw abfassen, und aus der

Höhe FH des Kegels; und diesen Perpendikeln Hw, die rechtwinklichten Dreyecke FHw auf dem Papiere zeichnen, deren Hypothenusen Fw alsdann nach dem verjüngten Maaßstabe, nach welchem die krumme Linie entworfen worden ist, die Werthe von p', p'' u. s. w. geben, woraus denn weiter nach der Formel (Aufl. III.) die dem Bogen AEB entsprechende Kegelfläche gefunden werden kann.

§. 102.

Aufgabe.

Es sey (Fig. 57.) AFB ein gerader Kegel, und die Grundfläche ein Kreis dessen Halbmesser AK = r. Dieser Kegel werde mit einer Ebene durchschnitten, welche auf der Oberfläche des Kegels die krumme Linie NML bilde. Man verlangt das Stück der krummen Oberfläche des Kegels, welches zwischen dem Kegelschnitte NML und der Spitze F des Kegels enthalten ist.

Aufl. 1. Man gedenke sich von der Spitze F auf die Ebene des Schnitts, das Perpendikel Fb, und ziehe in dieser Ebene von b auf die Durchschnittslinie NL des Schnitts mit der Grundfläche, das Perpendikel bC. Wenn nun die Ebene FCb die Grundfläche in der geraden

Linie

Linie AB durchschneidet, so geht diese Linie durch den Mittelpunkt der Grundfläche, und in der Ebene FCb liegt zugleich die Axe FK des Kegels, welche die Schnittfläche in dem Punkte c durchschneide. FAB ist der Neigungswinkel der Seitenlinien des Kegels gegen die Grundfläche, und MCA die Neigung des Schnitts gegen die Grundfläche. Diese Sätze lassen sich sämtlich aus der Lehre von den Lagen der Linien und Ebenen sehr leicht ableiten, und bedürfen hier keiner weitern Erläuterung. Ich will die Winkel FAB = FBA mit ε und MCA mit ζ bezeichnen.

2. Ferner sind nach der Natur des geraden Kegels alle Perpendikel z. B. cE, ce′, ca, welche von einem und demselben Punkte c der Axe auf alle Seitenlinien wie FB, FN, FZ, u. d. gl. gefället werden, durchaus von gleicher Grösse, nemlich $= Fc . \sin FcE = Fc . \cos \varepsilon$.

3. Wenn c der Punkt ist, wo des Kegels Axe in die Schnittfläche eintrifft, so hat man auch Nc = Lc; NC = CL; und FN = FL, weil N und L in dem Umfange der Grundfläche angenommen werden.

4. Um nun das Stück der Kegelfläche zu finden, welches zwischen dem Bogen NML und der Spitze F enthalten ist, so sey ed ein Element des Bogens Nd. Diesem Bogen gehöret

höret das Stück NFd der Kegelfläche zu, welches mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet werde. Demnach ist der unendlich schmale Triangel eFd, wenn von e, d nach F gerade Linien gezogen werden, das Differential von $\mathfrak{S}$, d. h. $Fed = d\mathfrak{S}$, so wie der unendlich schmale Flächentheil edc als das Differential des Flächenraums oder Ausschnittes Ncd betrachtet werden kann. Nennt man diesen Ausschnitt $Ncd = S$, so ist $ecd = dS$, und wenn S sich um dS ändert, so ändert sich $\mathfrak{S}$ um $d\mathfrak{S}$.

5. Nun gedenke man sich den körperlichen Raum der Pyramide edcF. Ihre Grundfläche ecd liegt in der Ebene des Schnitts NML, und daher ist ihre Höhe = dem Perpendikel Fb, welches in (1.) auf die Schnittebene herabgefället wurde. Demnach der körperliche Raum dieser Pyramide $= \frac{1}{3} dS . Fb$.

6. In eben dieser Pyramide kann man aber auch das Flächen-Element Fed (4) als Grundfläche, und das von c darauf gefällte Perpendikel ca als die Höhe betrachten. Demnach ist der körperliche Raum dieser Pyramide auch $= \frac{1}{3} d\mathfrak{S} . ca$.

7. Folglich (5. 6)

$$d\mathfrak{S} . ca = dS . Fb$$

oder $$d\mathfrak{S} = \frac{Fb}{ca} . dS$$

8. Aber

8. Aber Fb = Fc . sin Fcb = Fc . sin KeC = Fc . cos ACM = Fc . cos ζ (1).

9. Und wenn man sich von F nach a eine Seitenlinie des Kegels gezogen vorstellet, ca senkrecht darauf = Fc . cos ε (2).

10. Demnach (7)

$$d\mathfrak{S} = \frac{\cos\zeta}{\cos\varepsilon}\, dS$$

Und durch Integration

$$\mathfrak{S} = \frac{\cos\zeta}{\cos\varepsilon} .\, S$$

wo keine Const. hinzu zu addiren ist, weil für S = 0 auch $\mathfrak{S}$ = 0 wird.

Jedes Stück der Kegelfläche, wie NFd = $\mathfrak{S}$, bestimmt sich also durch die ihm auf dem Kegelschnitt NML entsprechende Fläche des Ausschnitts Ncd = S, wenn man solche in den Quotienten multiplicirt, welcher sich ergiebt, wenn der Cosinus des Neigungswinkels der Schnittsfläche gegen die Grundfläche des Kegels, dividirt wird mit dem Cosinus des Winkels, den des Kegels Seitenlinien mit der Grundfläche machen.

11. Bezeichnet man also jetzt die Fläche NcM + cML mit S, so bedeutet $\mathfrak{S}$ die zwischen dem Kegelschnitt NML und der Spitze F ent-

enthaltene Kegelfläche, die denn gleichfalls durch jene Formel $\mathfrak{S} = \frac{\cos \zeta}{\cos \varepsilon} . S$ bestimmt ist.

§. 103.
Zusatz. I.

1. Man nenne den Flächenraum des ganzen Kegelschnitts NML = F, so ist S = F − △NcL = F − ½NL . Cc = F − ½NL (MC − Mc); aber $Mc = \frac{MF . \sin MFc}{\sin McF}$, und MFc oder AFK = 90° − FAK = 90° − ε; McF = KcC = 90° − ACM = 90° − ζ; also $Mc = \frac{MF . \cos \varepsilon}{\cos \zeta}$.

Nennt man demnach die kürzeste Linie FM, welche von des Kegels Spitze zum Umfange des Schnittes herabgezogen werden kann = l, die Linie MC (von M senkrecht auf NL) = g, und NL = h, so wird

$$S = F - \tfrac{1}{2} h \left(g - \frac{l . \cos \varepsilon}{\cos \zeta} \right)$$
$$= F - \tfrac{1}{2} h \frac{(g \cos \zeta - l . \cos \varepsilon)}{\cos \zeta}$$

Demnach (§. 102. 11.)

$$\mathfrak{S} = \frac{F \cos \zeta}{\cos \varepsilon} - \frac{\tfrac{1}{2} h (g : \cos \zeta - l \cos \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$$

Oder

Oder auch

$$S=(F-\tfrac{1}{2}h.g)\frac{\cos\zeta}{\cos\varepsilon}+\tfrac{1}{2}h.l$$

Begreiflich lassen sich an dem vorgegebenen Segment NMLF der Kegelfläche, die Linien h, g, l sehr leicht messen, so wie denn auch der Flächenraum NML = F nach den (§. 39 ff.) gegebenen Vorschriften berechnet werden kann, wenn die dazu gehörigen Grössen bekannt sind. Auch lassen sich die Winkel ζ, ε, wenn sie nicht geradezu gegeben sind, aus den Dimensionen des Segments NMLF sehr leicht ableiten.

2. Man habe z. B. MF = l, MC = g und FC = k gemessen, so ergiebt sich in dem Dreyecke MFC der Winkel FMC = μ durch die bekannte Formel

$$\cos\mu=\frac{l^2+g^2-k^2}{2lg}$$

oder auch, wenn man durch Logarithmen rechnen will

$$\sin\mu=\frac{\sqrt{(l+g+k)(l+g-k)(l+k-g)(g+k-l)}}{2lg}$$

welcher Winkel denn stumpf ist, wenn $l^2+g^2<k^2$.

3. Nun sey ferner gemessen worden FN oder FL, welches Seitenlinien des Kegels sind,

also

also FN = FL = FA = f, so hat man in dem Dreyecke AMC; AM = f — l; MC = g, und den eingeschlossenen Winkel AMC = 90° — μ (2), woraus denn die Winkel FAC = ε und MCA = ζ nach der bekannten Art berechnet werden können.

4. Die Rechnungen (2. 3.) zu vermeiden, wird es in der Ausübung meistens hinlänglich seyn, die Dreyecke FMC, AMC aus den gegebenen Grössen nach einem verjüngten Maaßstabe auf das Papier zu zeichnen, und dann die Winkel ε, ζ zu messen.

§. 104.
Zusatz II.

Von dem Verhältniß dieser Winkel hängt es ab, ob der Schnitt NML eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel ist. Ist nemlich $\zeta < \varepsilon$ so ist NML eine Ellipse. Für $\zeta = \varepsilon$ eine Parabel, für $\zeta > \varepsilon$ eine Hyperbel, unter ζ allemahl den spitzigen Winkel verstanden, unter welchem die Schnittfläche NML gegen die Grundfläche geneigt ist.

§. 105.
Zusatz III.

1. Auch kann man aus diesen Winkeln selbst, mit Zuziehung einiger anderer Grössen z. B. des Halbmessers AK = r = AF cos ε = f . cos ε,

und der Linie $AC = r + KC$, welche sich aus dem Dreyecke AMC finden läßt, die beständigen Grössen für jene krumme Linien, z. B. für die Ellipse und Hyperbel, die beyden Axen, und für die Parabel den Parameter berechnen, welche Grössen denn erforderlich sind, den Flächenraum $NML = F$ in der Formel (§. 103.) berechnen zu können, wenn man sich dazu nicht etwa des practischen Verfahrens (§. 44.), welches in manchen Fällen hinlänglich seyn mag, bedienen wollte.

2. Ich will hier nur die Formeln hersetzen, nach denen man jene beständigen Grössen finden kann. Den Beweis davon wird man leicht aus Kästners Analysis endlicher Grössen, oder auch aus dem IVten Theil meiner practischen Geometrie §. 61. u. f. ableiten können.

I. Wenn NML eine Parabel, also $\zeta = \varepsilon$ ist, so hat man für den Parameter derselben, den ich mit b bezeichnen will, die Formel

$$b = \frac{(r - KC) \sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon}$$

(M. s. a. a. O. meiner practischen Geometrie §. 61. XII. wenn man die dortigen c, μ, f hier die Grössen b, ε, KC bedeuten läßt. Auch ist für den geraden Kegel der dortige Winkel $\nu = \mu$.)

Nun

Nun ist bey der Parabel $\varepsilon = \zeta$, also der Parameter

$$b = \frac{(r - KC)\ \sin 2\zeta}{\sin \zeta} = 2(r - KC)\ \cos \zeta$$

Aber in dem gleichschenklichten Dreyecke AMC in welchem $MAC = \varepsilon = MCA = \zeta$, ist $AC = 2MC \cdot \cos \zeta = 2g \cos \zeta$, und $KC = AC - AK = 2g \cos \zeta - r$; also $r - KC = 2r - 2g \cos \zeta = 2f \cos \zeta - 2g \cos \zeta\ (1) = 2(f - g) \cos \zeta$. Demnach der Parameter

$$b = 2(f - g) \cos \zeta^2 = 2(f - g) \cos \varepsilon^2$$

II. Für eine Ellipse ist $\zeta < \varepsilon$. Bezeichnet man nun die große Axe mit a, so ist nach (pract. Geometr. IV. §. 61. X.)

$$a = \frac{(r + KC)\ \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \zeta)} + \frac{(r - KC)\ \sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$$

weil die dortigen Winkel $\mu = \nu$ für den geraden Kegel, hier $= \varepsilon$ sind.

Aber in dem Dreyecke AMC ist offenbar

$$AC \text{ oder } r + KC = \frac{g \sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon}; \quad \text{folglich}$$

$$KC = \frac{g \sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon} - r \text{ und } r - KC =$$

$$2r - \frac{g \sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon} = 2f \cos \varepsilon - \frac{g \sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon}.$$

Sub-

Substituirt man also diese Werthe in den gefundenen Ausdruck für die große Axe, so wird

$$a = g + \left(2 f \cos \varepsilon - \frac{g \sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon}\right) \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$$

$$= \frac{2 f \cos \varepsilon \sin \varepsilon - 2 g \cos \varepsilon \sin \zeta}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$$

$$= 2 \cos \varepsilon \frac{(f \sin \varepsilon - g \sin \zeta)}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$$

Aber $f \sin \varepsilon =$ der Axe FK und $g \sin \zeta =$ dem Perpendikel MQ = KT, wenn man MT mit AB parallel zieht, also ist auch

$$a = \frac{2 \cos \varepsilon\,(FK - KT)}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$$

$$= \frac{2 \cos \varepsilon . ET}{\sin(\varepsilon - \zeta)} = \frac{2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon . FM}{\sin(\varepsilon - \zeta)}$$

d.h. die große Axe der Ellipse (wegen FM = 1)

$$a = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \zeta)} . 1$$

welches man auch leicht aus dem Dreyecke FYM in welchem MY = a; der Winkel MFY = $180^0 - 2\varepsilon$ und FYM = FBA − BCY = $\varepsilon - \zeta$ hätte ableiten können.

Um die kleine Axe der Ellipse zu finden, ist Pr. G. IV. Th. §. 61. V. IX. der dortige Werth von b nemlich $\frac{\sin(\varepsilon - \zeta) \sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon^2}$

Nun ist bey der Parabel $\varepsilon =$ ...
Parameter

$$b = \frac{(r - KC)\ \sin 2\zeta}{\sin \zeta} = 2(r \ldots$$

Aber in dem gleichschen ...
in welchem MAC $= \varepsilon$ ...
$2MC . \cos\zeta = 2g\ c$ ...
$= 2g \cos\zeta - r$; al ...
$= 2f \cos\zeta - 2g$ ...
Demnach der P ...

$b = 2(f - g)$ ...

II. Fi ...
net man ... den vorhin gefun-
(pract. ... uirt

$$a = \frac{\ldots 2\varepsilon}{\sin \varepsilon} \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin(\varepsilon - \zeta)}} \text{ oder}$$

w ...

$$c = 2l \cos\varepsilon \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin(\varepsilon - \zeta)}}$$

III. Für die Hyperbel ist $\zeta > \varepsilon$. Da findet man denn auf eine ähnliche Weise die große Axe $a = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin(\zeta - \varepsilon)} . l$

kleine Axe $c = 2l \cos\varepsilon \sqrt{\frac{\sin(\zeta + \varepsilon)}{\sin(\zeta - \varepsilon)}}$

wie man auch leicht aus der Vergleichung der Ellipse

... Hyperbel nach Kästners ... d. Grössen §. 401. und

§. 106.

Zusatz IV.

... die krumme Linie ... seyn, so ist ... NMFL oder ... 5.)

... rabel $F = 2 . \frac{2}{3} NC.MO$ ... g (§. 39.) also ... $= \frac{1}{2} h (\frac{1}{3} g + l)$

... all, daß NL durch den Mit... K geht, wird CM die Linie AF ... diren, und zugleich wird $MF = MC$ d. h. $l = g$. Also ist für diesen Fall $S = \frac{2}{3} hg$ d. h. die Kegelfläche FMNL, der parabolischen Fläche NML gleich.

Ueberhaupt sieht man, daß zur Berechnung von S, der Parameter der Parabel so wenig als der Neigungswinkel ζ erforderlich ist, wenn man die drey Linien h, g, l gemessen hat.

§. 107.

Zusatz V.

Ist die krumme Linie eine Ellipse und zwar eine ganze Ellipse MNYL, für welche

= dem Quadrat der kleinen Axe dividirt mit dem Quadrat der großen, weil in der Gleichung daſ. XII. der Buchstabe b den Coefficienten von x^2 bezeichnet, welcher bekanntlich $= \frac{c^2}{a^2}$ ist, wenn c die kleine Axe und a die große bedeutet, welches c denn hier nicht mit dem dortigen c zu verwechseln ist. Man hat demnach für die kleine Axe die Gleichung

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\sin(\varepsilon - \zeta)\,\sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin \varepsilon^2}$$

Also $c = \frac{a}{\sin \varepsilon} \sqrt{[\sin(\varepsilon - \zeta)\,\sin(\varepsilon + \zeta)]}$.

Oder wenn man statt a den vorhin gefundenen Werth substituirt

$$c = \frac{l \sin 2\varepsilon}{\sin \varepsilon} \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin(\varepsilon - \zeta)}} \text{ oder}$$

$$c = 2 l \cos \varepsilon \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon + \zeta)}{\sin(\varepsilon - \zeta)}}$$

III. Für die Hyperbel ist $\zeta > \varepsilon$. Da findet man denn auf eine ähnliche Weise die

große Axe $a = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin(\zeta - \varepsilon)} \cdot l$

kleine Axe $c = 2 l \cos \varepsilon \sqrt{\frac{\sin(\zeta + \varepsilon)}{\sin(\zeta - \varepsilon)}}$

wie man auch leicht aus der Vergleichung der

Ellipse

Ellipse mit der Hyperbel nach Kästners Analysis endl. Grössen §. 401. und 403. ableiten kann.

§. 106.

Zusatz IV.

Man lasse in (§. 102.) die krumme Linie NML erstlich eine Parabel seyn, so ist $z = s$ und also die Kegelfläche NMFL oder

$S = F - \frac{1}{2} h . g + \frac{1}{2} h l .$ (§. 103.)

Nun ist aber bey der Parabel $F = 2 . \frac{2}{3} NC . MC$ $= \frac{2}{3} . NL . MC = \frac{2}{3} h . g$ (§. 39.) also

$S = \frac{1}{6} hg + \frac{1}{2} hl = \frac{1}{2} h (\frac{1}{3} g + l)$

Für den Fall, daß NL durch den Mittelpunkt K geht, wird CM die Linie AF halbiren, und zugleich wird MF = MC d. h. $l = g$. Also ist für diesen Fall $S = \frac{2}{3} h g$ d. h. die Kegelfläche FMNL, der parabolischen Fläche NML gleich.

Ueberhaupt sieht man, daß zur Berechnung von S, der Parameter der Parabel so wenig als der Neigungswinkel z erforderlich ist, wenn man die drey Linien h, g, l gemessen hat.

§. 107.

Zusatz V.

Ist die krumme Linie eine Ellipse und zwar eine ganze Ellipse MNYL, für welche

 das

das Stück der Kegelfläche FMNYLM berechnet werden sollte, so darf man sich jetzt die Grundfläche des Kegels nur durch den Punkt Y gedenken, dann hat man für diesen Fall MC oder g = MY = der großen Axe der Ellipse = a, und NL oder h = 0, weil jetzt die Punkte N und L, in Y zusammenfallen.

Also für diesen Fall schlechtweg

$$S = F.\frac{\cos \varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

wo denn F die ganze Fläche der Ellipse MNYLM bezeichnet, deren Werth = $\frac{1}{4}$ a c π (§. 40. 4.) leicht gefunden werden kann, ohne daß man a und c, erst nach den Formeln (§. 105. II.) zu berechnen braucht, weil sich bey einer ganzen vorgegebenen Ellipse die große und kleine Axe ohne Mühe unmittelbar messen lassen.

Die Neigungswinkel ζ und ε zu finden, würde man denn in den Formeln (§. 103. 2.) g = a, FG oder k = FY = der längsten Linie, welche von F nach dem Umfange des Schnitts herabgezogen werden kann, und l = FM = der kürzesten Linie von F nach dem Umfange des Schnitts, zu setzen haben. Begreiflich sind FY, FM die Linien, welche auf der Seitenfläche des Kegels von F nach den beyden Endpunkten der großen Axe MY herabgehen.

§. 108.

Zu 108.

Zusatz VI.

Ist NML ein hyperbolischer Bogen, so müssen die Axen a und c erst nach (§. 105. III.) berechnet werden, um in dem Werthe von S (§. 103.) die hyperbolische Fläche NML = F nach (§. 41.) aus der Abscisse MC = g, und Ordinate CN = $\frac{1}{2}$ h berechnen zu können, welches denn ebenfalls der Fall seyn würde, wenn NML keine ganze Ellipse wie (§. 107.), sondern bloß ein Stück desselben wäre.

§. 109.

Anmerkung I.

1. Wenn ein solches Segment von einer Kegelfläche wie FMNL vorgegeben ist, so kann man demselben begreiflich nicht ansehen, ob es ein Stück von einem geraden Kegel, und zwar von einem Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist, seyn würde.

2. Man sieht aber leicht, daß sich dieß dadurch wird ausmachen lassen, daß man erstlich die Winkel ζ und ε, unter der Voraussetzung, daß AFB würklich ein solcher gerader Kegel ist, berechnet, und hieraus für die Kegelschnitte NML die beständigen Grössen ableitet.

3. Nun messe man aber auch in diesem Schnitte zwey paar Abscissen und Ordinaten, und

und berechne daraus die beständigen Grössen ohngefähr wie (§. 40. 10.). Stimmen nun die hieraus gefundenen Grössen mit denen (2) überein, so wird NML würklich ein Schnitt aus einem geraden Kegel seyn.

Außerdem könnte man aber in der Ausübung auch wohl vermittelst eines Tasterzirkels untersuchen, ob der Kegel in einer gewissen Weite von F, z. B. bey M, ringsherum einerley Dicke oder Durchmesser hat, in welchem Falle man sich denn gleichfalls von der bey der bisherigen Aufgabe vorausgesetzten Bedingung überzeugen würde.

§. 110.
Anmerkung II.

1. Das Stück der Kegelfläche zwischen LAN und LMN zu berechnen, multiplicire man den Umfang LAN in die halbe Seitenlinie FN oder FA, so hat man erstlich das Stück der Kegelfläche über LAN, davon ziehe man ab das Stück zwischen LMN und der Spitze F, so erhält man das zwischen NAL und NML.

Es ist klar, daß wenn bloß das Stück zwischen NML und NAL vorgegeben ist, sich an demselben die Neigungswinkel MAC = ε und MCA = ζ unmittelbar messen, oder auch durch Hülfe der drey Seiten des Dreyecks AMC bestimmen lassen.

Auch

Auch kann man leicht den Halbmesser AK des Kreises LAN aus der Absciſſe AC und Ordinate CL berechnen, und dann hieraus die Seitenlinien AF oder f = AK sec ε, folglich auch MF oder l = AF - AM finden. Mithin sind alle Grössen bekannt, um die Seitenfläche FMNL oder den Werth von S zu berechnen, dessen Abzug von der Kegelfläche FLAN, das Stück zwischen LMN und LAN geben wird.

2. Es erhellet, daß man auch den körperlichen Raum zwischen LMN und LAN ohne Mühe würde finden können, wenn man von der Pyramide oder dem kegelförmigen Raum FLAN, den körperlichen Raum zwischen NML und der Spitze F abzöge. Die dazu erforderlichen Höhen FK und Fb ergeben sich durch folgende Formeln

$FK = AK . \tan \varepsilon$

$Fb = FM \sin \mu = FM \sin (\varepsilon + \zeta)$

(§. 103. 3.)

§. 111.

Anmerkung III.

1. Es sey (Fig. 58) FAB ein gerader Kegel und die Grundfläche AB ein Kreis, cedk auf der krummen Seitenfläche des Kegels eine beliebige krumme Linie, entstanden durch den Schnitt einer ebenen oder krummen Fläche mit des Kegels Oberfläche. ed ein Element dieser krummen Linie, und Fed das ihm zugehörige

Stückchen der Kegelfläche, welches zwischen den nach e und d gezogenen Seitenlinien Fe und Fdu enthalten ist.

2. Von e und d fälle man in den Ebenen FKt, FKu die Perpendikel eε, dδ auf die Grundfläche herab, und so von allen übrigen Punkten zwischen e und d gleichfalls Perpendikel auf die Grunfläche. Diese Punkte wie ε, δ, auf der Grundfläche will ich die orthographischen Projectionen von denen e, d, der krummen Linie cedk nennen, so wie man sich denn auf diese Weise die ganze Projection εδκ von der krummen Linie cedk auf der Grundfläche gedenken kann.

3. Jedes Stückchen wie Fed auf der krummen Oberfläche des Kegels, wird gegen das entsprechende Flächenräumchen εKδ am Mittelpunkt der Grundfläche, welches auf eben die Weise die Projection von Fed selbst seyn wird, sich verhalten wie die Secante des Winkels, den die Seitenlinien des Kegels mit der Grundfläche machen, zum Sinus totus.

Denn man fälle von e auf Fd das Perpendikel en, und von ε auf Kδ das Perpendikel εν, so ist der Flächenraum des Elementardreyecks $Fde = \frac{Fd \cdot en}{2}$ und des Dreyecks

Kε

$K\varepsilon\delta = \frac{K\delta \cdot \varepsilon\nu}{2}$. Also

$\triangle Fed : \triangle K\varepsilon\delta = Fd \cdot en : K\delta \cdot \varepsilon\nu$.

Aber $Ft : tu = Fe : en$; also $en = \frac{Fe \cdot tu}{Ft}$

$Kt : tu = K\varepsilon : \varepsilon\nu$; also $\varepsilon\nu = \frac{K\varepsilon \cdot tu}{Kt}$

Ferner $Fe : Ft = K\varepsilon : Kt$ oder $\frac{Fe}{Ft} = \frac{K\varepsilon}{Kt}$

Demnach offenbar $en = \varepsilon\nu$ und schlechtweg

$\triangle Fed : \triangle K\varepsilon\delta = Fd : K\delta = Fd : df$

wenn nemlich df in der Ebene des Dreyeckes FKu mit Ku bis an des Kegels Axe parallel gezogen wird.

Nun ist endlich $Fd : df = Fu : Ku$
$= \sec FuK : 1$.

Demnach, wenn der Winkel FuK, der Seitenlinien des Kegels mit der Grundfläche $= \varepsilon$ genannt wird

$\triangle Fed : \triangle K\varepsilon\delta = \sec\varepsilon : 1$.

4. Hieraus folgt denn, daß auch die ganze Kegelfläche $Fek = F\varkappa . \sec\varepsilon$ d. h. der Projectionsfläche (2) multiplicirt in die Secante des Neigungswinkels ε gleich ist, welches zwar eine nicht sehr bekannte, aber allerdings merkwürdige Eigenschaft des Kegels ist.

5. Ist daher die krumme Linie $\varepsilon\delta\varkappa$ so beschaffen, daß sie sich vollkommen quadriren läßt, so wird sich auch das entsprechende Stück Fek der Kegelfläche, welches man erhält, wenn man von allen Punkten der krummen Linie $\varepsilon\delta\varkappa$ Perpendikel bis an die Kegelfläche errichtet, vollkommen quadriren lassen.

Wäre z. B. $\varepsilon\delta\varkappa$ ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt K, oder irgend ein anderer Punkt wäre, so würde edk die Durchschnittslinie einer über $\varepsilon\delta\varkappa$ errichteten senkrechten Cylinderfläche mit der Kegelfläche darstellen, und der Flächenraum Fek würde gleich seyn der Kreisfläche $K\varepsilon\delta\varkappa$ multiplicirt in die Secante des Neigungswinkels ε.

6. Der Satz (4) läßt sich überhaupt von einem jeden Stück der Kegelfläche darthun, wenn auch die Spitze F nicht in derselben liegt. So würde z. B. auch das Stück der Kegelfläche zwischen den Bögen dk und uB, oder $Budk = Bu\delta\varkappa \,.\, \sec\varepsilon$ seyn. Denn

Kegelfl. $FuB = KuB \,.\, \sec\varepsilon$

" " $Fdk = K\delta\varkappa \sec\varepsilon$.

Demnach $FuB - Fdk = (KuB - K\delta\varkappa) \sec\varepsilon$

d. h. $Budk = Bu\delta\varkappa \,.\, \sec\varepsilon$

wo denn der zwischen den Bögen Bu, $\delta\varkappa$ enthaltene Flächenraum die Projection der Kegelfläche Budk auf die Grundfläche darstellt.

Sechs-

Sechstes Kapitel.

Von den körperlichen Räumen und Oberflächen runder Körper.

§. 112.
Erklärung.

Man gedenke sich (Fig. 59) in einer ebenen Fläche eine krumme Linie FLA, und in dieser Ebene zugleich eine gerade Linie FK, um welche sich die ganze Ebene wie um eine Axe drehe, so wird bey dieser Drehung jeder Punkt L der krummen Linie einen Kreis LMH von dem Halbmesser LG beschrieben, wenn LG senkrecht auf FK ist, und die krumme Linie selbst die Oberfläche eines Körpers, dessen Schnitte wie LMH, senkrecht auf die Axe FK, lauter Kreise bilden. Man nennt solche Körper **runde Körper** oder **Sphäroide**, auch wohl **Conoide** und die in der Elementargeometrie vorkommenden Körper Cylinder, Kegel, Kugel, sind nur besondere Fälle solcher runden Körper überhaupt, bey denen die **beschreibende Linie** FLA, welche Krümmung man will, haben kann. Für den Cylinder würde FLA eine gerade mit FK parallele Linie, bey dem Kegel eine

eine gegen FK geneigte Linie, und bey der Kugel ein Halbkreis, oder überhaupt ein Kreisbogen seyn, dessen Mittelpunkt in FK fallen muß. Ist FLA eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, und FK zugleich die Axe dieser krummen Linien, so heißt der durch die Umdrehung von FLA entstandene runde Körper ein parabolisches, elliptisches, hyperbolisches Sphäroid, und so in andern Fällen.

§. 113.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung der beschreibenden krummen Linie FLA zwischen den rechtwinklichten Coordinaten KG = x, GL = y gegeben, den körperlichen Inhalt und die krumme Oberfläche des durch FLA beschriebenen runden Körpers zu finden, wenn die Abscissenlinie KF die Umdrehungsaxe ist.

Aufl. 1. Man nenne den der Abscisse KG zugehörigen Raum des Körpers, der durch eine volle Umdrehung des dieser Abscisse zugehörigen Bogens AL entstanden ist = Z, und lasse nun die Abscisse KG um das Element Gg = dx wachsen, so wird die der Abscisse Kg zugehörige Ordinate gl bey der Umdrehung den

Kreis

Kreis lmh beschreiben, und zwischen den beyden Parallelkreisen LMH, lmh wird eine unendlich dünne Scheibe von dem körperlichen Raume Z enthalten seyn, welche man als das Differential von Z betrachten kann, und deren Inhalt sich unendlich dem körperlichen Raume einer Cylinderscheibe nähern wird, welche den Kreis LMH zur Grundfläche, und das Differential der Abscisse, nemlich Gg, oder dx, zur Höhe haben würde.

2. Der körperliche Inhalt dieser Scheibe ist $y^2\pi . dx$, wenn $y^2\pi$ die Kreisfläche LMH bezeichnet. Also hat man $dZ = y^2 . \pi dx$; und folglich $Z = \pi \int y^2 dx$. Ist also die Gleichung zwischen y und x gegeben, so kann man y durch x, oder auch x durch y ausdrücken, und hieraus durch die Integration von $y^2 dx$ den verlangten körperlichen Raum Z finden.

3. Für die krumme Oberfläche des runden Körpers gedenke man sich die unendlich schmale Zone zwischen beyden Parallelkreisen LMH, lmh, so ist diese $= dS$, wenn der der Abscisse KG zugehörige körperliche Raum LABH die krumme Oberfläche S hat. Eine Sehne die man von L nach l zöge, würde ein unendlich schmales Stück einer Kegelfläche zwischen den Kreisen LMH, lmh beschreiben, dessen Fläche $= \pi . e(LG + lg)$ seyn würde (§. 90.) wenn e die Sehne des Bogens Ll bezeichnet.

4. Je

eine gegen FK geneigte Linie,
Kugel ein Halbkreis, oder über
bogen seyn, dessen Mittelpun
muß. Ist FLA eine Par
Hyperbel, und FK zugl
krummen Linien, so hei
drehung von FLA
ein parabolische
perbolisches
Fällen.

Const

$y^2)^3 + \text{Const}$

Es ist
beyden
den re
KG =
perl
Ob
be demnach die krumme Oberfläche
r parabolischen Conoids LHA oder

$$S = \frac{\pi}{6b}\sqrt{(b^2+4bx)^3} - \tfrac{1}{6}\pi b^2$$

$$= \frac{\pi}{6b}\sqrt{(b^2+4y^2)^3} - \tfrac{1}{6}\pi b^2$$

6. Ist der Parameter b nicht gegeben, so kann man solchen aus den an dem Conoid selbst gemessenen Linien AG = x; GL = y durch den

$=\frac{y^2}{x}$ vorher berechnen, und

.n für S substituiren.

L (Fig. 61) drehe

AG in dem

.den, so entstehet

.LA mit einer conca-

.. Spitze in A, und die

.eis von dem Halbmesser GL

.estimmung dieses körperlichen

.L, muß man erstlich die Gleichung

.AG = x und GL = y suchen.

.urch den Punkt L ziehe man also LU

.arallel mit AG, bis an die Axe AM der Pa-
rabel, so ist die Gleichung zwischen AU und
UL folgende $LU^2 = b.AU$, wenn b den Pa-
rameter bezeichnet. Nun ist aber LU = AG
= x, und GL oder y = AU; demnach die
Gleichung zwischen x und y folgende; $x^2 = by$
und für den körperlichen Raum wird jetzt

$$Z = \pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{x^4}{b^2} dx = \frac{\pi x^5}{5 \cdot b^2} = \frac{\pi x}{5} \cdot \frac{x^4}{b^2}$$

oder auch $Z = \frac{1}{5}\pi x y^2$;

Demnach der körperliche Inhalt gleich einem
Cylinder, welcher den Kreis HL zur Grund-
fläche, und den fünften Theil der Höhe AG
zu seiner Höhe haben würde.

5. Für die Oberfläche dieses Paraboloids hat man erstlich $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$
$= \frac{dy}{b}\sqrt{(b^2+4y^2)}$ (§. 56.)

also $dS = \frac{2\pi}{b} \int y\,dy\,\sqrt{(b^2+4y^2)}$ (§. 113. a.)

$= \pi \int dx \sqrt{(b^2+4bx)}$

Also durch Integration

$$S = \frac{\pi}{6b}\sqrt{(b^2+4bx)^3} + \text{Const}$$

$$= \frac{\pi}{6b}\sqrt{(b^2+4y^2)^3} + \text{Const}$$

Weil nun dieses Integral für $x = o$ oder $y = o$ auch verschwinden muß, so würde

$$o = \frac{\pi}{6b}\sqrt{b^6} + \text{Const}$$

also $\text{Const} = -\frac{1}{6}\pi b^2$

Demnach die krumme Oberfläche des parabolischen Conoids LHA oder

$$S = \frac{\pi}{6b}\sqrt{(b^2+4bx)^3} - \frac{1}{6}\pi b^2$$

$$= \frac{\pi}{6b}\sqrt{(b^2+4y^2)^3} - \frac{1}{6}\pi b^2$$

6. Ist der Parameter b nicht gegeben, so kann man solchen aus den an dem Conoid selbst gemessenen Linien $AG = x$; $GL = y$ durch den

den Ausdruck $b = \frac{y^2}{x}$ vorher berechnen, und dann in den Formeln für S substituiren.

7. Eine Parabel AL (Fig. 61) drehe sich um eine Tangente AG in dem Scheitelpunkt derselben, so entsteht ein kegelartiger Körper HLA mit einer concaven Oberfläche, dessen Spitze in A, und die Grundfläche ein Kreis von dem Halbmesser GL ist. Für die Bestimmung dieses körperlichen Raumes HAL muß man erstlich die Gleichung zwischen AG = x und GL = y suchen.

Durch den Punkt L ziehe man also LU, parallel mit AG, bis an die Axe AM der Parabel, so ist die Gleichung zwischen AU und UL folgende $LU^2 = b \cdot AU$, wenn b den Parameter bezeichnet. Nun ist aber LU = AG = x, und GL oder y = AU; demnach die Gleichung zwischen x und y folgende; $x^2 = by$ und für den körperlichen Raum wird jetzt

$$Z = \pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{x^4}{b^2} dx = \frac{\pi x^5}{5 \cdot b^2} = \frac{\pi x}{5} \cdot \frac{x^4}{b^2}$$

oder auch $Z = \frac{1}{5} \pi x y^2$;

Demnach der körperliche Inhalt gleich einem Cylinder, welcher den Kreis HL zur Grundfläche, und den fünften Theil der Höhe AG zu seiner Höhe haben würde.

8. Ein gewöhnlicher Kegel über der Grundfläche HL und von der Höhe AG, würde den körperlichen Inhalt $\frac{1}{3}\pi x y^2$ haben, also sich zu dem Paraboloid (7) wie 5:3 verhalten

9. Für die Oberfläche des Paraboloids (7) hat man $dy = \frac{2x\,dx}{b}$;

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = ds = \frac{\sqrt{(4x^2 + b^2)}}{b} \cdot dx$$

oder auch $ds = \frac{1}{2} dy \sqrt{\frac{b+4y}{y}}$ welchen Ausdruck durch y ich hier zur fernern Anwendung für bequemer halte. Demnach für die krumme Oberfläche des Körpers

$$S = 2\pi \int y\,ds = \pi \int y\,dy \sqrt{\frac{b+4y}{y}}$$

$$= \pi \int dy \sqrt{(by + 4y^2)}$$

Also durch die Integration, die Oberfläche

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (8y+b)\sqrt{(by+4y^2)} \\ -\frac{1}{4} b^2 \log \frac{8y+b+4\sqrt{(by+4y^2)}}{b} \end{array} \right\} \cdot \frac{\pi}{16}$$

(Integralf. §. XII.)

Elliptisches Sphäroid.

§. 115.

1. Eine Ellipse ALF (Fig. 59) von der AK, KF die beyden halben Axen sind,

sind, nemlich AK $= \frac{1}{2}c$, KF $= \frac{1}{2}a$, dreht sich um eine dieser beyden halben Axen z. B. um KF $= \frac{1}{2}a$, wo a jetzt die große Axe bezeichne, so hat man um den körperlichen Raum und die Fläche des Ellipsoids AFB zu finden, zwischen KG $= x$ und GL $= y$ erstlich die Gleichung

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \cdot x^2 = \frac{c^2(a^2 - 4x^2)}{4a^2}$$

2. Demnach $ydy = -\frac{c^2}{a^2} \cdot xdx$, und

$$dy = -\frac{2xdx}{\sqrt{(a^2-4x^2)}} \cdot \frac{c}{a}$$

Sodann $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$

$$= \frac{dx}{a} \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - (a^2 - c^2)x^2)}}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}}$$

(M. s. auch §. 57). Also

3. Für den körperlichen Inhalt

$$Z = \pi \int y^2 dx = \frac{\pi c^2}{4a^2} \int dx(a^2 - 4x^2)$$

$$= \frac{\pi c^2}{4a^2}(a^2 x - \frac{4}{3}x^3)$$

d. h. der der Abscisse KG $= x$ zugehörige körperliche Raum

$$Z = \frac{1}{4}\pi c^2 x - \frac{1}{3}\pi \frac{c^2}{a^2} \cdot x^3$$

wozu keine Const zu addiren ist, weil für $x = o$ auch $Z = o$ wird.

4. Für $x = \frac{1}{2} a$, erhält man für das halbe Ellipsoid AFB den Inhalt $\frac{1}{12}\pi c^2 a$, demnach für das ganze Ellipsoid FANB den Inhalt $\frac{1}{6}\pi c^2 a$.

5. Für $c = a$, also für eine Kugel, fände man den Inhalt $= \frac{1}{6}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$ wenn $r = \frac{1}{2} a$ den Halbmesser bedeutet, wie auch aus der Elementargeometrie bekannt ist.

6. Drehte sich die Ellipse um die kleine Axe KF $= c$ so darf man in den gefundenen Formeln nur überall a setzen, wo c steht, und c wo a steht, so erhält man

$$Z = \frac{1}{4}\pi a^2 x - \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{c^2} x^3$$

und für das ganze Ellipsoid den Ausdruck $\frac{1}{6}\pi a^2 c$.

7. In (1) erhält man durch die Umdrehung der Ellipse ein längliches Ellipsoid, und in (6) ein nach den Polen der Umdrehungsaxe FN abgeplattetes Ellipsoid. Jenes verhält sich zu diesem $= \frac{1}{6}\pi c^2 a : \frac{1}{6}\pi a^2 c = c : a$. Das abgeplattete hat also einen grössern Inhalt als das länglichte.

8. Für

8. Für die Oberfläche des länglichten Ellipsoids wird (2)

$$S = 2\pi \int y\,ds = \frac{2\pi c}{a^2}\int dx\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - (a^2 - c^2)x^2)}$$

$$= \pi c \int dx \sqrt{\left(1 - \frac{4e^2}{a^2}x^2\right)}$$

wenn man der Kürze halber $\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} = e$ nennt.

9. Demnach (Integralf. §§. XV. XVI. 5.) die der Abscisse x zugehörige Oberfläche

$$S = \pi c\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{\left(1 - \frac{4e^2}{a^2}x^2\right)} + \frac{a}{4e}\,\mathfrak{B}\sin\frac{2e}{a}x\right).$$

Man setze $\mathfrak{B}\sin\frac{2e}{a}x = \psi$; also $\frac{2e}{a}x = \sin\psi$, d. h. man suche einen Winkel ψ, dessen Sinus $= \frac{2e}{a}x$ ist, so hat man

$$\sqrt{\left(1 - \frac{4e^2x^2}{a^2}\right)} = \cos\psi, \text{ und}$$

$$x\sqrt{\left(1 - \frac{4e^2x^2}{a^2}\right)} = \frac{a}{2e}\sin\psi\,.\cos\psi = \frac{a}{4e}\sin 2\psi.$$ Mithin auch

$$S = \frac{\pi a c}{8e}(\sin 2\psi + 2\psi)$$

 durch

durch welche Formel die Rechnung in Zahlen etwas erleichtert wird.

10. Für die Oberfläche des halben Ellipsoids AFB setzt man in den gefundenen Ausdruck (zu welchem weiter keine Const. hinzu zu addiren ist, weil, wie sichs gehört, für $x = 0$ auch $S = 0$ wird) den Werth von $x = \frac{1}{2}a$, so wird die halbe Oberfläche des Ellipsoids =

$\pi c \left(\frac{1}{4} a \sqrt{(1 - e^2)} + \frac{a}{4e} \mathfrak{B} \sin e\right)$ oder wegen $\sqrt{(1 - e^2)} = \frac{c}{a}$, die halbe Oberfläche

$= \pi c \left(\frac{1}{4} c + \frac{a}{4e} \mathfrak{B} \sin e\right)$. Also die ganze

Oberfläche AFBN $= \frac{1}{2} \pi c \left(c + \frac{a}{e} \mathfrak{B} \sin e\right)$.

11. In (8) bedeutet e oder $\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$ d. h. $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\frac{1}{2}a}$ das Verhältniß, welches die Entfernung des Brennpunkts der Ellipse vom Mittelpunkte, nemlich $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ zu der halben großen Axe $\frac{1}{2}a$ hat. Verwandelt sich die Ellipse in einen Kreis, also das Ellipsoid in eine Kugel, so ist $a = c$ also $e = 0$. In diesem Falle ist der Ausdruck $\frac{a}{e} \mathfrak{B} . \sin e = \frac{a}{0}$. Bog sin 0; der erste

Factor

Factor $\frac{a}{o}$ wird unendlich, der zweyte Bog sin o verschwindet. Um zu erfahren, was in diesem Falle das Product $\frac{a}{o}$. Bog sin o für einen Werth erhält, verwandelt man B sin e d. h. den Bogen dessen Sinus = e ist, in eine Reihe, so erhält man

$$B \sin e = e + \frac{1}{2.3} e^3 + \frac{1.3}{1.2.4.5} e^5 \text{ u. s. w.}$$

(Kästners Analysis des Unendl. §. 281.)

Demnach

$$\frac{a}{e} B \sin e = a \left(1 + \frac{1}{2.3} . e^2 + \frac{1.3}{1.2.4} . \tfrac{1}{5} e^4 ..\right)$$

Also für e = o wird $\frac{a}{e}$ B sin e = a = c also

(10) die Oberfläche der Kugel $= \pi c^2$ wie auch aus der Elementargeometrie bekannt ist.

12. Wenn überhaupt e klein ist, so wird es am besten seyn, die Oberfläche des Ellipsoids durch den Ausdruck

$$S = \tfrac{1}{2} \pi c \left(c + a \left(1 + \frac{1}{2.3} . e^2 + \frac{1.3}{1.2.4} . \tfrac{1}{5} e^4 \text{ 2c.}\right)\right)$$

zu berechnen (10. 11.) welche Reihe sich denn desto schneller nähern wird, je kleiner e ist.

 13.

13. Oberfläche des abgeplatteten Ellipsoids (6). In diesem Fall muß man in der Formel (8) vor und hinter dem Integralzeichen nur a statt c und c statt a setzen. Dann wird

$$S = \frac{2\pi a}{c^2} \int dx \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^4 - (c^2 - a^2) x^2)}$$

welches weil $c < a$ besser durch

$$S = \frac{2\pi a}{c^2} \int dx \sqrt{(\tfrac{1}{4} c^4 + (a^2 - c^2) x^2)}$$

dargestellt wird, da denn, wenn man wieder $\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} = e$ nennt, auch

$$S = \pi a \int dx \sqrt{(1 + \frac{4a^2 e^2}{c^4} x^2)} \text{ wird.}$$

14. Oder durch Integration (Integralf. §§. XII. XIII.)

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} x \sqrt{(1 + \frac{4a^2 e^2}{c^4} x^2)} \ldots \\ + \frac{c^2}{4ae} \log \left(\frac{2ae}{c^2} x + \sqrt{\left(1 + \frac{4a^2 e^2}{c^4} x^2\right)} \right) \end{array} \right\} . a\pi$$

wozu keine Const zu addiren ist, weil für $x = 0$ S auch würklich $= 0$ wird, wie sichs gehört. Von einer andern Form dieses Ausdrucks sehe man auch unten §. 116. 12.

15.

15. Soll nun hieraus die ganze Oberfläche des Ellipsoids abgeleitet werden, so setzt man $x = \frac{1}{2}c$ und duplirt den (14) gefundenen Ausdruck. Dieß giebt die ganze Oberfläche

$$\frac{1}{2}a\pi\left(c\sqrt{\left(1+\frac{a^2e^2}{c^2}\right)}+\frac{c^2}{ae}\log\left(\frac{ae}{e}+\sqrt{\left(1+\frac{a^2e^2}{c^2}\right)}\right)\right).$$

Aber $\sqrt{\left(1+\frac{a^2e^2}{c^2}\right)}=\frac{a}{c}$ also die Oberfläche $=\frac{1}{2}a\pi\left(a+\frac{c^2}{ae}\log\frac{a}{c}(1+e)\right)$. Nun hat man aber $a^2-c^2=a^2e^2$; also $c^2=a^2(1-e^2)$ und folglich $\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}}$. Demnach die Oberfläche =

$\frac{1}{2}a\pi\left(a+\frac{c^2}{ae}\log\frac{1+e}{\sqrt{(1-e^2)}}\right)$ d. h. wegen $(1-e^2)=(1+e)(1-e)$ die Oberfläche $=\frac{1}{2}a\pi\left(a+\frac{c^2}{ae}\log\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)=$

$$\frac{1}{2}a\pi\left(a+\frac{c^2}{2ae}\log\frac{1+e}{1-e}\right).$$

16. Wenn e sehr klein oder gar = 0 ist, muß man $\log\frac{1+e}{1-e}$ in eine Reihe verwandeln, dann ist (Kästners Analys. d. U. §. 223.)

$\frac{1}{e} \log \frac{1+e}{1-e} = 2(1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{5}e^4 + \frac{1}{7}e^6 \ldots)$

Demnach des Ellipsoids Oberfläche =

$= \frac{1}{2} a \pi (a + \frac{c^2}{a} (1 + \frac{1}{3} e^2 + \frac{1}{5} e^4 + \ldots))$

Und für $c = a$ also $e = 0$ d. h. für die Kugel die Oberfläche $\frac{1}{2} a \pi (a + a) = a^2 . \pi$.

17. Will man nach dem Ausdrucke $\frac{1}{2} a \pi \left(a + \frac{c^2}{2ae} \log \frac{1+e}{1-e}\right)$ die Oberfläche berechnen, so ist klar, daß weil die bisherigen Logarithmen hyperbolische oder natürliche Logarithmen bedeuten, man log brigg $\frac{1+e}{1-e}$ mit der bekannten Zahl 2,30258509 ... (Kästners Analys. des Unendl. 226. 230.) multipliciren muß, um in der Formel für die Oberfläche den log nat $\frac{1+e}{1-e}$ zu erhalten. Hat man aber Tafeln für die natürlichen Logarithmen, so kann man aus denselben den log nat $\frac{1+e}{1-e}$ geradezu selbst erhalten.

18. Für $c = \frac{230}{231} a$ berechnet Herr Hofr. Kästner Analys. des Unendl. 1799. S. 707 rc. die elliptische Oberfläche unserer Erde, wobey

denn

denn sein dortiges $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ ist, also $=$ meinem e multiplicirt mit $\frac{1}{2}a$.

Nach den neuern Messungen der Erde ist aber vielmehr $c = \frac{309}{310}a$ zu nehmen. Dieß giebt $a - c = \frac{1}{310}a$; $a + c = \frac{619}{310}.a$ also $(a-c)(a+c)$ oder $a^2 - c^2 = \frac{619}{310.310}a^2$, und mein $e = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} = \frac{\sqrt{619}}{310}$. Also durch Logarithmen $e = 0{,}080257$; $e^2 = 0{,}0064412$; $e^5 = 0{,}0000415$; $e^6 = 0{,}0000002$.

Nun ist wegen $\frac{a^2 - c^2}{a^2} = e^2$; der Werth von $c^2 = a^2(1 - e^2)$; also in der Reihe (16) $\frac{c^2}{a} = a(1 - e^2)$.

19. Demnach des Ellipsoids Oberfläche auch $= \frac{1}{2}a^2\pi(1 + (1 - e^2)(1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{5}e^4 \ldots))$ d. h. wenn man die Reihe $1 + \frac{1}{3}e^2 \ldots$ mit $1 - e^2$ würklich multiplicirt $= a^2\pi(1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 - \frac{1}{35}e^6 \ldots)$ Für e^2.. also die (18) angegebenen Werthe substituirt, so wird die Oberfläche der Erde $= a^2 . \pi . 0{,}9978503$. Also 0,9978503 der Oberfläche einer Kugel, welche den Durchmesser des Aequators zu ihrem Durchmesser haben würde; je nachdem man also diesen Durchmesser a in Meilen, Toisen u. d. gl. ausdrückt, würde man die Oberfläche durch die gefundene Formel in Quadratmeilen, Quadrattoisen

toisen u. d. gl. erhalten; bey welcher Rechnung aber denn freylich der Bruch 0,9978.... noch auf mehr Decimalstellen als die angegebenen berechnet werden müßte, wenn man die Oberfläche bis auf einzelne Quadratmeilen u. d. gl. richtig erhalten wollte, womit ich mich aber hier, da es mehr in die Geographie gehört, nicht weiter aufhalten will. Ich habe durch das Beyspiel nur den Gebrauch der Reihe (19) zeigen wollen, wenn man nicht etwa nach der Formel (17) selbst rechnen wollte, welches aber, wenn e klein ist, wohl nicht rathsam seyn möchte, wenn man nicht mit den größern Logarithmentafeln versehen ist.

20. Verlangt man den körperlichen Inhalt eines ellipsoidischen Segments wie FHL, so ziehe man von dem körperlichen Raume des halben Ellipsoids BFA = $\frac{1}{12}\pi c^2 a$ den körperlichen Raum des Segments Z oder ABHL (3) ab, so erhält man für das Segment FHL den Ausdruck

$$FHL = \tfrac{1}{12}\pi c^2 a - \tfrac{1}{4}\pi c^2 x + \tfrac{1}{3}\pi \frac{c^2}{a^2} x^3.$$

In diesen Ausdruck setze man $x = \frac{1}{2}a - w$, wo $w = FG$ den Abstand des Mittelpunktes G des Kreises HML von F bezeichne, so erhält man nach einer leichten Rechnung das Segment

$$FHL = \tfrac{1}{3}\pi \frac{c^2 w^2}{a^2} (3a - 2w)$$

21. Für ein kugelförmiges Segment FHL setzt man c = a = dem Durchmesser der Kugel, so erhält man für ein Segment von der Kugel

$$\text{FHL} = \tfrac{1}{6}\pi\, w^2 (3a - 2w)$$

Aber für eine Kugel ist FAN ein Kreis und FG : GL = GL : GN oder w : y = y : a — w d. h. $y^2 = aw - w^2$; also $a = \frac{y^2 + w^2}{w}$;

demnach $\text{FHL} = \frac{1}{6}\pi\, w (3y^2 + w^2)$ welche Formel dazu dient, sogleich aus FG = w, und GL = y den Inhalt des Kugelschnitts zu finden, ohne daß man nöthig hat, daraus erst den Durchmesser der Kugel zu berechnen.

22. Den Ausdruck in (20) würde man auch erhalten, wenn man die Gleichung der Ellipse zwischen den Coordinaten FG = w und GL = y, nemlich

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(aw - w^2)$$

zum Grunde legte, und durch die Integration der Formel $\pi y^2\, dw$, welche das Differential des Segments FHL ausdrückt, dieß Segment bestimmte. Man würde nemlich erhalten FHL

$$= \pi . \frac{c^2}{a^2} \int (aw - w^2)\, dw = \pi . \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{aw^2}{2} - \frac{w^3}{3}\right)$$

welches

welches mit dem Ausdrucke (20) einerley ist, Die Const ist $=0$, weil das Segment für $w=0$ verschwindet.

23. Für die Oberfläche $\mathfrak{S}$ eines solchen Segments wie FHL erhält man

$$\mathfrak{S}=2\pi\int y\,ds=2\pi\int y\sqrt{(dy^2+dw^2)}$$

oder weil $dy=\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{(a-2w)}{2y}dw$, nach gehöriger Substitution

$$\mathfrak{S}=\frac{\pi c}{a}\int dw\sqrt{(c^2+4e^2aw-4e^2w^2)}$$

wo $\frac{a^2-c^2}{a^2}$ der Kürze wegen $=e^2$ genannt worden ist.

Also nach gehöriger Integration (Integralf. §§. XV. XVI.)

$$\mathfrak{S}=\left\{\begin{array}{l} ac+(2w-a)\sqrt{u} \\ +\frac{e^2a^2+c^2}{e}\mathfrak{B}\sin\frac{a\sqrt{u}+(2w-a)c}{e^2a^2+c^2)}e \end{array}\right\}\cdot\frac{\pi c}{4a}$$

wo $\sqrt{(c^2+4e^2aw-4e^2w^2)}$ der Kürze halber $=\sqrt{u}$ gesetzt worden ist.

24. Wegen $e^2a^2=a^2-c^2$ wird auch

$$\mathfrak{S}=\left\{\begin{array}{l} c+\frac{(2w-a)\sqrt{u}}{a} \\ +\frac{a}{e}\mathfrak{B}\sin\frac{a\sqrt{u}+(2w-a)c}{a^2}.e \end{array}\right\}\cdot\frac{\pi c}{4}$$

Nach

Nach dieser Formel läßt sich also für jedes w oder FG, des ellipsoidischen Segments HFL Oberfläche berechnen.

25. Für die Oberfläche des halben Ellipsoids setzt man $w = \frac{1}{2}a$; dann ist $\sqrt{u} = a$, wenn statt e^2 in dem Werthe von $\sqrt{u}$ zugleich $\frac{a^2 - c^2}{a^2}$ gesetzt wird, und folglich die halbe Oberfläche des Ellipsoids $= \frac{\pi c}{4}(c + \frac{a}{e}$ B sin $e)$ wie (10).

26. Für die Oberfläche eines Kugelsegments ist (wegen $a = c$ bey der Kugel) $e = 0$ also (23) $S = \frac{\pi c}{a} \int c\, dw = \pi c \cdot w$; d. h. der Umfang der Kugel $= \pi \cdot c$ multiplicirt in die Höhe $w =$ FG des Segments, wie auch aus der Elementargeometrie bereits bekannt ist.

27. Wenn FN nicht, wie bisher, die große Axe des Ellipsoids, sondern die kleine wäre, das Ellipsoid also, ein nach den Polen F, N, abgeplattetes wäre, so darf man in der Formel (20) für den körperlichen Inhalt des Segments FHL, nur die Buchstaben a und c verwechseln, und man erhält demnach für den körperlichen Raum des Segments FHL den Ausdruck FHL $= \frac{1}{6}\pi \frac{a^2 w^2}{c^2}(3c - 2w)$.

28.

28. Und für die Oberfläche desselben die Formel

$$S = \frac{\pi a}{c} \int \sqrt{(a^2 + 4e^2 cw - 4e^2 w^2)}\, dw.$$

29. Weil aber jetzt $e^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$, und der Werth von e^2 verneint ist, wegen $c < a$, so nenne man jetzt $\frac{a^2 - c^2}{c^2} = e^2$, so wird

$$S = \frac{\pi a}{c} \int \sqrt{(a^2 - 4e^2 cw + 4e^2 w^2)}\, dw$$

wovon das Integral jetzt logarithmisch ist, (Integralf. §§. XII. XIII.) nemlich

$$S = \left\{ \begin{array}{c} a + \frac{2w - c}{c} \sqrt{u} \\ + \frac{c}{e} \log \frac{(2w - c)e + \sqrt{u}}{a - ec} \end{array} \right\} \cdot \frac{\pi a}{4}$$

wenn jetzt die Wurzelgröße $\sqrt{(a^2 - 4e^2 cw + 4e^2 w^2)}$ mit $\sqrt{u}$ bezeichnet wird.

Hyperbolisches Conoid.

§. 116.

1. Es sey (Fig. 60) die krumme Linie AL ein hyperbolischer Bogen, A der Scheitelpunkt der Hyperbel, und AR die gerade Linie in welche die große Axe der Hyperbel fällt, d. h. AR die Verlängerung der großen Axe.

Der

Der Mittelpunkt C der Hyperbel würde von A um die halbe große Axe $= \frac{1}{2}a$ entfernt seyn. Ueber C hinaus z. B. bey α würde sich in dem Abstand $C\alpha = CA = \frac{1}{2}a$ die entgegengesetzte Hyperbel $\alpha\lambda$ anfangen, die uns aber jetzt nichts angeht. Ich betrachte zuerst das hyperbolische Conoid HAL, welches entsteht, wenn sich die Hyperbel AL um die große Axe, oder vielmehr um ihre Verlängerung AR dreht.

2. In diesem Falle ist die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $AG = x$ und $GL = y$ wie bekannt

$$y^2 = \frac{c^2}{a} x + \frac{c^2}{a^2} x^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax + x^2)$$

wenn nemlich c die so genannte kleine Axe der Hyperbel bedeutet.

3. Dieß giebt

$$2y\,dy = \frac{c^2}{a^2} (a + 2x)\, dx; \text{ also}$$

$$dy = \frac{c^2}{a^2} \frac{a + 2x}{2y} \cdot dx$$

oder wenn man statt y setzt $\frac{c}{a} \sqrt{(ax + x^2)}$

$$dy = \frac{c(a + 2x)}{2a\sqrt{(ax + x^2)}} \cdot dx$$

$$dy^2+dx^2=\left(\frac{c^2\,(a+2\,x)^2}{4a^2\,(ax+x^2)}+1\right)dx^2 \text{ d. h.}$$

$$ds^2=\frac{a^2c^2+4(a^2+c^2)\,ax+4(a^2+c^2)x^2}{4a^2\,(ax+x^2)}\,dx^2$$

Also

$$ds=\frac{\sqrt{(c^2+4ae^2x+4e^2x^2)}}{2\sqrt{(ax+x^2)}}\,.\,dx$$

wenn man der Kürze halber $\frac{a^2+c^2}{a^2}=e^2$ nennt.

4. Nun also erstlich für den körperlichen Raum Z des hyperbolischen Conoids HAL

$$Z=\pi\int y^2\,dx=\pi\left(\frac{c^2\,x^2}{2a}+\frac{c^2}{3a^2}\,x^3\right)$$

$$\text{d. h. } Z=\frac{\pi\,c^2\,x^2}{6a^2}\,(3a+2)$$

wozu weiter keine Const. zu addiren ist, weil, wie sichs gehört, dieser Ausdruck schon für $x=0$, selbst $=0$ wird. Man kann also für jede Abscisse $AG=x$ durch den gefundenen Ausdruck, den körperlichen Inhalt des Conoids HAL finden.

5. Für die krumme Fläche des Conoids hat man (3)

S =

$$S = 2\pi\int y\,ds$$
$$= \frac{\pi c}{a}\int dx\,\sqrt{(c^2 + 4ae^2x + 4e^2x^2)}$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach (Integralf. §§. XII. XIII.) und setzt in dem gefundenen Integrale die Wurzelgrösse der Kürze halber $=\sqrt{u}$, so ergiebt sich

$$S = \left\{ \begin{array}{l} -ac + (2x + a)\sqrt{u} \\ + \frac{c^2 - a^2e^2}{e}\log\frac{(2x+a)e + \sqrt{u}}{ae + c} \end{array} \right\} \cdot \frac{\pi c}{4a}$$

welches wegen $c^2 - a^2 e^2 = -a^2$ (3) sich in

$$S = \left\{ \begin{array}{l} -c + \frac{2x+a}{a}\sqrt{u} \\ -\frac{a}{e}\log\frac{(2x+a)e + \sqrt{u}}{ae + c} \end{array} \right\} \cdot \frac{\pi c}{4}$$

verwandelt.

6. Die Hyperbel AL (Fig. 61) von der AM die Verlängerung der großen Axe ist, drehe sich um eine Linie AG, welche durch den Scheitelpunkt A der Hyperbel auf der Linie AM senkrecht ist, also die Hyperbel in A berührt, so entsteht ein hyperbolisches Conoid HAL, dessen krumme Fläche einwärts gekrümmt ist.

Für dieses Conoid ist die Gleichung zwischen AG = x und GL = y folgende

$$x^2 = \frac{c^2}{a} y + \frac{c^2}{a^2} y^2 = \frac{c^2}{a^2} (ay + y^2)$$

wie leicht daraus erhellet, daß die Gleichung zwischen AU und LU

$$LU^2 = \frac{c^2}{a} . AU + \frac{c^2}{a^2} AU^2$$

und $LU = AG = x$; $AU = GL = y$ ist.

Dieß giebt

$$y^2 + ay = \frac{a^2}{c^2} x^2$$

Also

$$y = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{c^2} x^2)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}a + \frac{a}{2c} \sqrt{(c^2 + 4x^2)}$$

Demnach

$$dy = \frac{2axdx}{c\sqrt{(c^2 + 4x^2)}}$$

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{c^4 + 4(a^2 + c^2)x^2}{c^2(c^2 + 4x^2)} . dx^2$$

Also $ds = \dfrac{\sqrt{(c^4 + 4(a^2 + c^2)x^2)}}{c\sqrt{(c^2 + 4x^2)}} . dx$

Mithin wegen $y^2 = \frac{a^2}{c^2} x^2 - ay$

Z =

$$Z = \pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{a^2}{c^2} . x^2 dx - \pi \int a y dx$$

d.h. wenn man statt y den gefundenen Werth substituirt, der körperliche Inhalt des Conoids

$$Z = \frac{\pi a^2 x^3}{3 c^2} + \frac{\pi a^2 x}{2} - \frac{\pi a^2}{2 c} \int dx \surd (c^2 + 4 x^2)$$

$$= \frac{\pi a^2 x^3}{3 c^2} + \frac{\pi a^2 x}{2}$$

$$- \frac{\pi a^2}{2 c} \left(\frac{x \surd (c^2 + 4 x^2)}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{4} \log \frac{2 x + \surd (c^2 + 4 x^2)}{c} \right)$$

d. h.

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} x \left(\frac{x^2}{3 c^2} + \frac{1}{2} - \frac{\surd (c^2 + 4 x^2)}{4 c} \right) \\ - \frac{c}{8} \log \frac{2 x + \surd (c^2 + 4 x^2)}{c} \end{array} \right\} . \pi a^2$$

wozu weiter keine Const. hinzu zu addiren ist. Der körperliche Inhalt für jede Abscisse x hängt also von hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen ab.

In dieser Formel kann statt $\surd (c^2 + 4 x^2)$ auch $(y + \frac{1}{2} a) \frac{2 c}{a}$ (aus obiger Gleichung für y) gesetzt werden, welches denn auch

 Z =

$$Z = \left[\begin{array}{l} x\left(\frac{x^2}{3c^2} + \frac{1}{2} - \frac{2y+a}{4a}\right) \\ -\frac{c}{8}\log\left(\frac{2x}{c} + \frac{2y}{a} + 1\right) \end{array}\right] \cdot \pi a^2$$

giebt, wo denn x und y an dem gegebenen Conoid unmittelbar gemessen werden können. Mißt man noch ein paar andere Coordinaten x' und y', so lassen sich daraus, wenn a und c nicht gegeben wären, doch diese Grössen berechnen, ohngefähr wie (§. 40. 9.).

7. Für die krumme Seitenfläche des Conoids LHA (6) erhält man $2\pi\int yds$ oder

$$S = \frac{a\pi}{c^2}\int dx\sqrt{(c^4 + 4(a^2 + c^2)x^2)}$$
$$-\frac{a\pi}{c}\int dx\sqrt{\frac{c^4 + 4(a^2 + c^2)x^2}{c^2 + 4x^2}}$$

wovon zwar der erste Theil durch hyperbolische Logarithmen integrirt werden kann, der zweyte aber, wegen der doppelten Wurzelgrösse im Zähler und Nenner, nicht anders als durch eine unendliche Reihe integrabel ist, von der sich aber kein grosser Vortheil erwarten läßt. Man sieht indessen, daß dieser zweyte Theil auch $= a\pi ds$ das Integral davon also $= a\pi . s$ ist, wo dann s die Länge des hyperbolischen Bogens AL für die Abscisse AG $= x$ bedeutet. Ihn

aus

aus dieser Abscisse x zu berechnen (welche Abscisse denn in der Hyperbel selbst, eigentlich der Ordinate LU gleich ist) könnte nun zwar die Annäherungsmethode (§. 62.) gebraucht werden. Es ist aber klar, daß man an dem vorgegebenen Conoid auch wohl den Bogen AL ohne große Mühe unmittelbar wird messen können, und so ist denn die Fläche S durch hyperbolische Logarithmen und durch den hyperbolischen Bogen s = AL selbst bestimmt. Man sehe auch (11).

8. In der Ausübung verlangt man in vielen Fällen nicht immer die größte Genauigkeit, und so mögte es denn oft bloß hinlänglich seyn, den Bogen LA in kleine Theile wie A1; 1, 2; 2, 3; u. s. w. = △s abzutheilen, und dann durch Hülfe der Weiten oder Durchmesser des Conoids die man in 1, 2, 3, u. s. w. leicht messen kann, die einzeln Flächenzonen zwischen A und 1, zwischen 1 und 2, zwischen 2 und 3 u. s. w. nach der Art zu berechnen, wie bey der abgekürzten Kegelfläche (§. 90.) gezeigt worden ist. Man nehme die kleinen Bögen A1; 1, 2; 2, 3; u. s. w. einander gleich, und so klein, daß man sie ohne großen Fehler mit ihren Sehnen für einerley halten kann, so daß also △s eine jede von den Sehnen A1; 1, 2; u. s. w. bezeichne. Die Weiten des Conoids in 1, 2, 3, u. s. w. seyen der Ordnung nach

y', y'', y''', y^{IV} u. s. w, so ist (§. 90.) die Zone zwischen A und 1 $= \pi y' \cdot \Delta s$

$$1 \text{ und } 2 = \pi(y' + y'')\Delta s$$
$$2 \text{ und } 3 = \pi(y'' + y''')\Delta s$$
$$3 \text{ und } 4 = \pi(y''' + y^{IV})\Delta s$$

Also z. B. alle Zonen zwischen A und 4, d. h. das Stück der Oberfläche des Conoids, welches dem Bogen A4 entspricht

$$= \pi \Delta s(y^{IV} + 2(y' + y'' + y'''))$$

und so in andern Fällen.

Dieß Verfahren kann in der Ausübung überhaupt auf alle Conoide und Sphäroide angewandt werden, bey denen es nicht darauf ankömmt, die Oberfläche mit der größten Schärfe zu erhalten, oder deren Oberfläche auch von einer Integration abhängen würde, die sich weder durch Kreisbogen noch durch Logarithmen, noch sonst auf eine bekannte Art völlig genau bewerkstelligen läßt.

9. Drehete sich die bisher betrachtete Hyperbel AL um eine Linie KG' (Fig. 62) welche durch den Mittelpunkt K der Hyperbel auf der großen Axe senkrecht steht, so ergiebt sich ein hyperbolisches Konoid LABH, dessen Grundfläche ein Kreis von dem Halbmesser

KA

$KA = KB = \frac{1}{2} a$. Die Gleichung zwischen $KG' = x$ und $G'L = y$ läßt sich aus der zwischen AG und GL, wo AG durch den Scheitelpunkt der Hyperbel gieng (6) wegen $KG' = AG = y$ und $G'L = GL + G'G = GL + \frac{1}{2}a$ leicht ableiten.

Denn da jetzt GL das y in (6) bedeutet, so ist das jetzige G'L oder $y = \frac{a}{2c}\sqrt{(c^2+4x^2)}$. Also bleibt das jetzige ds = dem in (6) d.h.

$$ds = dx\frac{\sqrt{(c^4+4(a^2+c^2)x^2)}}{c\sqrt{(c^2+4x^2)}}$$

10. Also jetzt für den körperlichen Raum des Conoids LABH

$$Z = \pi\int y^2\,dx = \frac{a^2\pi}{4c^2}\int(c^2+4x^2)\,dx$$

$$= \frac{a^2\pi x}{4} + \frac{a^2\pi x^3}{3c^2}$$

$$= a^2\pi x\left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{3c^2}\right)$$

wozu weiter keine Const zu addiren ist.

Und für die Fläche S des Conoids

$$S = 2\pi\int y\,ds$$

$$= \frac{a\pi}{c^2}\int dx\sqrt{(c^4+4(a^2+c^2)x^2)}$$

 wovon

28. Und für die Oberfläche desselben die Formel

$$S = \frac{\pi a}{c} \int \sqrt{(a^2 + 4e^2 cw - 4e^2 w^2)}\, dw.$$

29. Weil aber jetzt $e^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$, und der Werth von e^2 verneint ist, wegen $c < a$, so nenne man jetzt $\frac{a^2 - c^2}{c^2} = e^2$, so wird

$$S = \frac{\pi a}{c} \int \sqrt{(a^2 - 4e^2 cw + 4e^2 w^2)}\, dw$$

wovon das Integral jetzt logarithmisch ist, (Integralf. §§. XII. XIII.) nemlich

$$S = \left\{ \begin{array}{l} a + \frac{2w - c}{c} \sqrt{u} \\ + \frac{c}{e} \log \frac{(2w - c)e + \sqrt{u}}{a - ec} \end{array} \right\} \cdot \frac{\pi a}{4}$$

wenn jetzt die Wurzelgrösse $\sqrt{(a^2 - 4e^2 cw + 4e^2 w^2)}$ mit $\sqrt{u}$ bezeichnet wird.

Hyperbolisches Conoid.

§. 116.

1. Es sey (Fig. 60) die krumme Linie AL ein hyperbolischer Bogen, A der Scheitelpunkt der Hyperbel, und AR die gerade Linie in welche die große Axe der Hyperbel fällt, d. h. AR die Verlängerung der großen Axe.

Der

Der Mittelpunkt C der Hyperbel würde von A um die halbe große Axe $= \frac{1}{2}a$ entfernt seyn. Ueber C hinaus z. B. bey α würde sich in dem Abstand $C\alpha = CA = \frac{1}{2}a$ die entgegengesetzte Hyperbel $\alpha\lambda$ anfangen, die uns aber jetzt nichts angeht. Ich betrachte zuerst das hyperbolische Conoid HAL, welches entsteht, wenn sich die Hyperbel AL um die große Axe, oder vielmehr um ihre Verlängerung AR dreht.

2. In diesem Falle ist die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $AG = x$ und $GL = y$ wie bekannt

$$y^2 = \frac{c^2}{a} x + \frac{c^2}{a^2} x^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax + x^2)$$

wenn nemlich c die so genannte kleine Axe der Hyperbel bedeutet.

3. Dieß giebt

$$2y\,dy = \frac{c^2}{a^2} (a + 2x)\, dx; \text{ also}$$

$$dy = \frac{c^2}{a^2} \frac{a + 2x}{2y} \cdot dx$$

oder wenn man statt y setzt $\frac{c}{a} \sqrt{(ax + x^2)}$

$$dy = \frac{c(a + 2x)}{2a\sqrt{(ax + x^2)}} \cdot dx$$

$$dy^2+dx^2=\left(\frac{c^2\,(a+2\,x)^2}{4\,a^2\,(a\,x+x^2)}+1\right)dx^2 \text{ d. h.}$$

$$ds^2=\frac{a^2c^2+4(a^2+c^2)\,a\,x+4(a^2+c^2)x^2}{4\,a^2\,(a\,x+x^2)}\,dx^2$$

Also

$$ds=\frac{\sqrt{(c^2+4\,a\,e^2\,x+4\,e^2\,x^2)}}{2\sqrt{(a\,x+x^2)}}.\,dx$$

wenn man der Kürze halber $\frac{a^2+c^2}{a^2}=e^2$ nennt.

4. Nun also erstlich für den körperlichen Raum Z des hyperbolischen Conoids HAL

$$Z=\pi\int y^2\,dx=\pi\left(\frac{c^2\,x^2}{2a}+\frac{c^2}{3a^2}\,x^3\right)$$

$$\text{d. h. } Z=\frac{\pi\,c^2\,x^2}{6\,a^2}\,(3\,a+2\,)$$

wozu weiter keine Const. zu addiren ist, weil, wie sichs gehört, dieser Ausdruck schon für $x=0$, selbst $=0$ wird. Man kann also für jede Abscisse $AG=x$ durch den gefundenen Ausdruck, den körperlichen Inhalt des Conoids HAL finden.

5. Für die krumme Fläche des Conoids hat man (3)

S =

$$S = 2\pi \int y\,ds$$

$$= \frac{\pi c}{a} \int dx \sqrt{(c^2 + 4ae^2 x + 4e^2 x^2)}$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach (Integralf. §. XII. XIII.) und setzt in dem gefundenen Integrale die Wurzelgrösse der Kürze halber $= \sqrt{u}$, so ergiebt sich

$$S = \left\{ \begin{array}{l} - ac + (2x + a)\sqrt{u} \\ + \frac{c^2 - a^2 e^2}{e} \log \frac{(2x + a)\, e + \sqrt{u}}{ae + c} \end{array} \right\} . \frac{\pi c}{4a}$$

welches wegen $c^2 - a^2 e^2 = - a^2$ (3) sich in

$$S = \left\{ \begin{array}{l} - c + \frac{2x + a}{a} \sqrt{u} \\ - \frac{a}{e} \log \frac{(2x + a)\, e + \sqrt{u}}{ae + c} \end{array} \right\} . \frac{\pi c}{4}$$

verwandelt.

6. Die Hyperbel AL (Fig. 61) von der AM die Verlängerung der großen Axe ist, drehe sich um eine Linie AG, welche durch den Scheitelpunkt A der Hyperbel auf der Linie AM senkrecht ist, also die Hyperbel in A berührt, so entsteht ein hyperbolisches Conoid HAL, dessen krumme Fläche einwärts gekrümmt ist.

Für dieses Conoid ist die Gleichung zwischen AG = x und GL = y folgende

$$x^2 = \frac{c^2}{a} y + \frac{c^2}{a^2} y^2 = \frac{c^2}{a^2} (ay + y^2)$$

wie leicht daraus erhellet, daß die Gleichung zwischen AU und LU

$$LU^2 = \frac{c^2}{a} . AU + \frac{c^2}{a^2} AU^2$$

und LU = AG = x; AU = GL = y ist.

Dieß giebt

$$y^2 + ay = \frac{a^2}{c^2} x^2$$

Also

$$y = -\tfrac{1}{2} a + \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 + \frac{a^2}{c^2} x^2)}$$

$$= -\tfrac{1}{2} a + \frac{a}{2c} \sqrt{(c^2 + 4x^2)}$$

Demnach

$$dy = \frac{2axdx}{c\sqrt{(c^2 + 4x^2)}}$$

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{c^4 + 4(a^2 + c^2)x^2}{c^2(c^2 + 4x^2)} . dx^2$$

Also $ds = \frac{\sqrt{(c^4 + 4(a^2 + c^2)x^2)}}{c\sqrt{(c^2 + 4x^2)}} . dx$

Mithin wegen $y^2 = \frac{a^2}{c^2} x^2 - ay$

Z =

$$Z = \pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{a^2}{c^2} . x^2 dx - \pi \int a y dx$$

d. h. wenn man statt y den gefundenen Werth substituirt, der körperliche Inhalt des Conoids

$$Z = \frac{\pi a^2 x^3}{3 c^2} + \frac{\pi a^2 x}{2} - \frac{\pi a^2}{2 c} \int dx \sqrt{(c^2 + 4x^2)}$$

$$= \frac{\pi a^2 x^3}{3 c^2} + \frac{\pi a^2 x}{2}$$

$$- \frac{\pi a^2}{2 c} \left(\frac{x \sqrt{(c^2 + 4x^2)}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{4} \log \frac{2x + \sqrt{(c^2 + 4x^2)}}{c} \right)$$

d. h.

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} x \left(\frac{x^2}{3 c^2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{(c^2 + 4x^2)}}{4 c} \right) \\ - \frac{c}{8} \log \frac{2x + \sqrt{(c^2 + 4x^2)}}{c} \end{array} \right\} . \pi a^2$$

wozu weiter keine Const. hinzu zu addiren ist. Der körperliche Inhalt für jede Abscisse x hängt also von hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen ab.

In dieser Formel kann statt $\sqrt{(c^2 + 4x^2)}$ auch $(y + \frac{1}{2} a) \frac{2c}{a}$ (aus obiger Gleichung für y) gesetzt werden, welches denn auch

 Z=

$$Z = \left[\begin{array}{l} x\left(\frac{x^2}{3c^2} + \frac{1}{2} - \frac{2y+a}{4a}\right) \\ - \frac{c}{8} \log\left(\frac{2x}{c} + \frac{2y}{a} + 1\right) \end{array} \right] . \pi a^2$$

giebt, wo denn x und y an dem gegebenen Conoid unmittelbar gemessen werden können. Mißt man noch ein paar andere Coordinaten x′ und y′, so lassen sich daraus, wenn a und c nicht gegeben wären, doch diese Grössen berechnen, ohngefähr wie (§. 40. 9.).

7. Für die krumme Seitenfläche des Conoids LHA (6) erhält man $2\pi \int y ds$ oder

$$S = \frac{a\pi}{c^2} \int dx \sqrt{(c^4 + 4(a^2 + c^2) x^2)}$$

$$- \frac{a\pi}{c} \int dx \sqrt{\frac{c^4 + 4(a^2 + c^2) x^2}{c^2 + 4x^2}}$$

wovon zwar der erste Theil durch hyperbolische Logarithmen integrirt werden kann, der zweyte aber, wegen der doppelten Wurzelgrösse im Zähler und Nenner, nicht anders als durch eine unendliche Reihe integrabel ist, von der sich aber kein grosser Vortheil erwarten läßt. Man sieht indessen, daß dieser zweyte Theil auch $= a\pi ds$ das Integral davon also $= a\pi . s$ ist, wo dann s die Länge des hyperbolischen Bogens AL für die Abscisse AG = x bedeutet. Ihn aus

aus dieser Abscisse x zu berechnen (welche Abscisse denn in der Hyperbel selbst, eigentlich der Ordinate LU gleich ist) könnte nun zwar die Annäherungsmethode (§. 62.) gebraucht werden. Es ist aber klar, daß man an dem vorgegebenen Conoid auch wohl den Bogen AL ohne große Mühe unmittelbar wird messen können, und so ist denn die Fläche S durch hyperbolische Logarithmen und durch den hyperbolischen Bogen s = AL selbst bestimmt. Man sehe auch (11).

8. In der Ausübung verlangt man in vielen Fällen nicht immer die größte Genauigkeit, und so mögte es denn oft bloß hinlänglich seyn, den Bogen LA in kleine Theile wie A1; 1, 2; 2, 3; u. s. w. = △s abzutheilen, und dann durch Hülfe der Weiten oder Durchmesser des Conoids die man in 1, 2, 3, u. s. w. leicht messen kann, die einzeln Flächenzonen zwischen A und 1, zwischen 1 und 2, zwischen 2 und 3 u. s. w. nach der Art zu berechnen, wie bey der abgekürzten Kegelfläche (§. 90.) gezeigt worden ist. Man nehme die kleinen Bögen A1; 1, 2; 2, 3; u. s. w. einander gleich, und so klein, daß man sie ohne großen Fehler mit ihren Sehnen für einerley halten kann, so daß also △s eine jede von den Sehnen A1; 1, 2; u. s. w. bezeichne. Die Weiten des Conoids in 1, 2, 3, u. s. w. seyen der Ordnung nach

y', y'', y''', y^{IV} u. s. w, so ist (§. 90.) die Zone zwischen A und 1 $= \pi y', \triangle s$

1 und 2 $= \pi (y' + y'') \triangle s$

2 und 3 $= \pi (y'' + y''') \triangle s$

3 und 4 $= \pi (y''' + y^{IV}) \triangle s$

Also z. B. alle Zonen zwischen A und 4, d. h. das Stück der Oberfläche des Conoids, welches dem Bogen A4 entspricht

$$= \pi \triangle s (y^{IV} + 2(y' + y'' + y'''))$$

und so in andern Fällen.

Dieß Verfahren kann in der Ausübung überhaupt auf alle Conoide und Sphäroide angewandt werden, bey denen es nicht darauf ankömmt, die Oberfläche mit der größten Schärfe zu erhalten, oder deren Oberfläche auch von einer Integration abhängen würde, die sich weder durch Kreisbogen noch durch Logarithmen, noch sonst auf eine bekannte Art völlig genau bewerkstelligen läßt.

9. Drehete sich die bisher betrachtete Hyperbel AL um eine Linie KG' (Fig. 62) welche durch den Mittelpunkt K der Hyperbel auf der großen Axe senkrecht steht, so ergiebt sich ein hyperbolisches Konoid LABH, dessen Grundfläche ein Kreis von dem Halbmesser

KA

$KA = KB = \frac{1}{2} a$. Die Gleichung zwischen $KG' = x$ und $G'L = y$ läßt sich aus der zwischen AG und GL, wo AG durch den Scheitelpunkt der Hyperbel gieng (6) wegen $KG' = AG = y$ und $G'L = GL + G'G = GL + \frac{1}{2} a$ leicht ableiten.

Denn da jetzt GL das y in (6) bedeutet, so ist das jetzige G'L oder $y = \frac{a}{2c} \sqrt{(c^2 + 4x^2)}$. Also bleibt das jetzige ds = dem in (6) d. h.

$$ds = dx \frac{\sqrt{(c^4 + 4(a^2 + c^2) x^2)}}{c \sqrt{(c^2 + 4x^2)}}$$

10. Also jetzt für den körperlichen Raum des Conoids LABH

$$Z = \pi \int y^2 dx = \frac{a^2 \pi}{4c^2} \int (c^2 + 4x^2) dx$$

$$= \frac{a^2 \pi x}{4} + \frac{a^2 \pi x^3}{3c^2}$$

$$= a^2 \pi x \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{3c^2} \right)$$

wozu weiter keine Const zu addiren ist.

Und für die Fläche S des Conoids $S = 2\pi \int y ds$

$$= \frac{a \pi}{c^2} \int dx \sqrt{(c^4 + 4 (a^2 + c^2) x^2)}$$

 wovon

wovon das Integral, wenn man $c^4+4(a^2+c^2)x^2$ der Kürze halber mit u bezeichnet.

$$S=\left[\begin{array}{l}\frac{x\sqrt{u}}{2}\\ +\frac{c^4}{4\sqrt{(a^2+c^2)}}\log\frac{2x\sqrt{(a^2+c^2)}+\sqrt{u}}{c^2}\end{array}\right]^{x=\frac{a\pi}{c^2}}$$

ist (Integralf. XII. XIII.)

Körperlicher Inhalt und Fläche des Conoids sind also für den Fall (9) vollkommen genau darzustellen.

11. Zieht man von dem für S in (10) gefundenen Werthe, die Grösse $a.\pi.s$ ab, so hat man (7) die Fläche des Conoids (6).

Anmerkung.

12. Wer in Formeln, wie die bisherigen, nicht mit den darin vorkommenden Wurzeln selbst rechnen will, wird durch Hülfe trigonometrischer Formeln in jeden Falle leicht Mittel finden, die Wurzelgrössen zu vermeiden. Man setze z. B. in dem Werthe von S (10) $\sqrt{u}$ oder $\sqrt{(c^4+4(a^2+c^2)x^2)}$ = dem Ausdrucke $c^2\sqrt{(1+\frac{4(a^2+c^2)}{c^4}x^2)}$ und suche nun einen Winkel φ, dessen Tangente

=

$= \frac{2x\sqrt{(a^2+c^2)}}{c^2}$, so hat man

$\sqrt{u} = c^2 \sqrt{(1+\tang\varphi^2)} = c^2 \sec\varphi$

Mithin die logarithmische Grösse in (10) = $\log(\tang\varphi + \sec\varphi) = \log\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$;

ferner $x = \frac{c^2 \tang\varphi}{2\sqrt{(a^2+c^2)}}$ und folglich $\frac{x\sqrt{u}}{2}$

$= \frac{c^4 \tang\varphi \sec\varphi}{4\sqrt{(a^2+c^2)}}$; demnach die Fläche

$$S = \frac{a\pi c^2}{4\sqrt{(a^2+c^2)}} \cdot \left\{ \begin{matrix} \tang\varphi \sec\varphi \\ + \log\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \end{matrix} \right\}$$

13. Und so in andern Fällen z. B. in der Formel (§. 115. 14.) wenn man dorten $\frac{2ae}{c^2}x = \tang\varphi$ setzen würde, das dortige

$$S = \frac{\pi c^2}{4e}(\tang\varphi \sec\varphi + \log\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi))$$

werden würde, wo denn in (12. 13.) die natürlichen Logarithmen genommen werden.

§. 117.

Ein Elliptischer oder auch ein Kreisbogen kleiner als ein Quadrant, dreht sich um seinen Sinus. Inhalt und Oberfläche des Sphäroids zu finden.

1. Es sey ALF (Fig. 63) der elliptische Bogen, welcher sich um KF drehe, wo KF auf AC einer der halben Axen der Ellipse, z. B. auf der halben kleinen Axe, senkrecht stehe, so ist AFB das durch die Umdrehung entstandene Sphäroid, C der Mittelpunkt der Ellipse, und CE parallel mit KF die andere halbe Axe; also $CE = \frac{1}{2}a$, wenn $CA = \frac{1}{2}c$.

Ich nenne hier $KF = h$ den Sinus des Bogens ALF, und KA oder den Quersinus $= k$, welcher denn der Halbmesser der Grundfläche AB des Sphäroids seyn wird.

2. Nun ist die Gleichung der Ellipse zwischen CN und NL

$$NL^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4CN^2)$$

Nennt man nun KG wie bisher $= x$; $GL = y$, so hat man $CN = x$; $NL = GL + GN = GL + CK = GL + AC - AK = y + \frac{1}{2}c - k$.

3. Also die Gleichung zwischen x und y

$$(y + (\tfrac{1}{2}c - k))^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4x^2)$$

folglich

$$y = -b + \frac{c}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$$

wenn man $\frac{1}{2}c - k$ der Kürze halber $= b$ nennt.

4.

4. Hieraus

$$y^2 = b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c \cdot b}{a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)} - \frac{c^2}{a^2}x^2$$

Demnach für den der Abscisse $KG = x$ entsprechenden körperlichen Raum $Z = \pi \int y^2 dx$ durch Integration

$$Z = \pi x\left(b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 x^2}{3a^2}\right)$$

$$- \frac{\pi b c}{a}\int dx \sqrt{(a^2 - 4x^2)}$$

oder

$$Z = \pi x\left(b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 x^2}{3a^2} - \frac{cb}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}\right)$$

$$- \tfrac{1}{4}\pi a b c \,\mathfrak{B} \sin \frac{2x}{a}$$

wozu weiter keine Const. zu addiren ist.

5. Setzt man in diesen Ausdruck $x = KF = h$, so erhält man das ganze Sphäroid AFB über der Grundfläche AB.

6. Aber für $x = h$ wird $y = 0$, wenn $ALF \leqq ALE$ d. h. ALF nicht grösser als ein Quadrant der Ellipse ist. Demnach (3) $(\tfrac{1}{2}c - k)^2$ oder $b^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4h^2)$ oder

$$b = \frac{c}{2a}\sqrt{(a^2 - 4h^2)}.$$

7. Setzt man demnach, um den ganzen Raum AFB zu erhalten, in (5) $x = h$, so wird die darin vorkommende Irrationalgrösse $= \frac{bc}{2a} \sqrt{(a^2 - 4h^2)} = b^2$ (6), und der ganze Raum AFB nach gehöriger Substitution $= \pi h \left(\frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 h^2}{3a^2}\right) - \frac{1}{4} \pi abc \mathfrak{B} \sin \frac{2h}{a}$.

8. An dem vorgegebenen Sphäroid AFB lassen sich a und c nicht unmittelbar messen. Aber man kann sie aus zwey paar Coordinaten durch Rechnung finden.

Hier ist z. B. erstlich sogleich für $x = h$; $y = 0$, also wie bereits gefunden worden (6)

$$\left(\tfrac{1}{2} c - k\right)^2 = \frac{c^2}{4a^2} (a^2 - 4h^2) \ (\odot)$$

Ist nun ferner für $x = n$ der Werth von $y = m$ gemessen worden, so hat man die zweyte Gleichung

$$\left(m + \tfrac{1}{2} c - k\right)^2 = \frac{c^2}{4a^2} (a^2 - 4n^2) \ (☽)$$

Aus welchen beyden Gleichungen ☉ und ☾ man denn die Werthe von a, c durch k, h, m, n bestimmen kann.

9. Ist ALF ein Kreisbogen von dem Halbmesser r, so setzt man in den Ausdruck (4)

a =

$a = c = 2r$. Dann wird in dem Sphäroid AFB, welches entsteht wenn ein Kreisbogen ALF sich um seinen Sinus KF dreht, erstlich für jede Abscisse $KG = x$ der körperliche Inhalt ALHB oder

$$Z = \pi x (b^2 + r^2 - \tfrac{1}{3}x^2 - b\sqrt{(r^2 - x^2)}) - \pi b r^2 \mathfrak{B} \sin \frac{x}{r}$$

und dann (7) der ganze körperliche Inhalt

$$AFB = \pi h (r^2 - \tfrac{1}{3}h^2) - \pi b r^2 \mathfrak{B} \sin \frac{h}{r}.$$

10. Den Halbmesser r zu finden, wenn das Sphäroid vorgegeben ist, dient die Gleichung ⊙ in (8) wenn man darinn $a = c = 2r$ setzt. Man erhält dadurch $(r - k)^2 = r^2 - h^2$ also $r = \frac{k^2 + h^2}{2k}$, woraus denn des Sphäroids AFB Inhalt (9), bloß durch die Grössen k, h, die sich an ihm unmittelbar messen lassen, gefunden werden kann. Der Werth von b in der Formel (9) ist $= r - k$, oder auch $= \sqrt{(r^2 - h^2)}$.

11. Drehte sich die Ellipse um eine Linie KF, welche mit der halben kleinen Axe parallel wäre, so hat man in den gefundenen Formeln nur überall a zu setzen wo c steht, und c wo a steht. Also wird für diesen Fall

Z =

$$Z = \pi x \left(b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 \cdot x^2}{3c^2} - \frac{ba}{2c}\sqrt{(c^2 - 4x^2)}\right)$$

$$- \tfrac{1}{4}\pi abc\, \mathfrak{B} \sin \frac{2x}{c}$$

und der ganze Inhalt AFB =

$$\pi h \left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 h^2}{3c^2}\right) - \tfrac{1}{4}\pi abc\, \mathfrak{B} \sin \frac{2h}{c}.$$

12. Für die Oberflächen der in diesem § betrachteten Sphäroide erhält man ein Differential, welches auf bekannte Arten sich nicht in einem endlichen Ausdrucke integriren läßt. In diesem Falle bedient man sich am bequemsten des Verfahrens (§. 116. 8.), die Oberfläche, falls sie verlangt würde, durch eine Näherung zu finden.

13. Indessen läßt sich auch die Oberfläche auf die Rectification der Ellipse bringen, die man denn nach (§. 61.) vornehmen kann.

Es wird nemlich (§. 57. 1.)

$$ds = \frac{\sqrt{(a^4 - 4(a^2 - c^2)x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - 4x^2)}}\,dx$$

Also aus (3) den Werth von y gesetzt, dS oder

$$2\pi y ds = -2\pi b ds + \frac{c\pi}{a^2} dx \sqrt{(a^4 - 4(a^2 - c^2)x^2)}$$

14.

14. Demnach durch Integration

$$S = -2\pi b s + \frac{c\pi x}{2a^2}\sqrt{(a^4 - 4(a^2 - c^2)x^2)}$$

$$+ \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}} \mathfrak{B}\sin\frac{2x\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a^2}$$

Wozu keine Const zu addiren ist, weil für $x = 0$ auch der elliptische Bogen AL oder $s = 0$, und folglich, wie sich gehört, auch $S = 0$ wird.

15. Man kann demnach, um S zu finden, für jede Abscisse x entweder den elliptischen Bogen AL nach (§. 91.) berechnen, oder welches in der Ausübung am leichtesten ist, ihn auf dem Sphäroid selbst messen. Es ist also S theils durch den erwähnten elliptischen Bogen s, theils durch einen Kreisbogen, theils durch einen algebraischen Theil nach der (14) angegebenen Formel vollkommen bestimmt.

16. Ist die krumme Linie ALF ein Kreisbogen von dem Halbmesser r, so hat man $a = c = 2r$, also (13)

$$dS = -2\pi b\,ds + 2r\pi\,dx$$

Demnach

$$S = 2r\pi x - 2\pi b s$$
$$= 2\pi(rx - bs)$$

wo jetzt s den Kreisbogen AL, welcher der Abscisse x zugehört, bedeutet.

17. Man setzt in den gefundenen Formeln $x=h$, und $s=$ dem Bogen ALF um die Oberfläche des ganzen Sphäroids AFB zu erhalten.

§. 118.

Körperlicher Inhalt eines Sphäroids, wenn sich (Fig. 64) ein elliptischer Bogen ALEF, der grösser als ein Quadrant ALE ist, um seinen Sinus FK dreht.

1. In diesem Falle entsteht ein runder Körper ALEFeHBA oben bey F mit einer conoidischen Vertiefung EFe.

2. Man muß also von dem körperlichen Raume den der Quadrant AE beschreiben würde, indem sich alles um KF dreht, den Raum der conoidischen Vertiefung EFe, welche durch den Bogen $EF=Fe$ beschrieben wird, abziehen, oder vielmehr, man gedenke sich in E eine Tangente, welche KF verlängert in M durchschneide, so beschreibt der Quadrant AE nebst der Tangente EM einen runden Körper, dessen Grundfläche AB ein Kreis von dem Halbmesser AK ist, und oben würde er durch eine Kreisfläche Ee von dem Halbmesser EM begränzt seyn. Von diesem Körper zieht man ab, das Conoid, dessen Spitze F und die Grundfläche eben der Kreis von dem Halbmesser

ꝛesser EM seyn würde, so hat man den verꝛngten körperlichen Raum ALEFeHBA.

3. Ich setze wieder wie in (§. 117.) CA $= \frac{1}{2}c$; CE $= \frac{1}{2}a$; KA $= k$, und jetzt KC $= k - \frac{1}{2}c = b$, so erhält man nunmehr zwischen KG $= x$ und GL $= y$ die Gleichung

$$(y - b)^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4x^2)$$

nach ähnlichen Betrachtungen wie (§. 117.)

Also $y = b + \frac{c}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$

$$y^2 = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + \frac{bc}{a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$$

Demnach zuerst in dem Sphäroid AEMHB, den einer jeden Abscisse KG $= x$ zugehörigen körperlichen Raum $\pi \int y^2 dx$ oder

$$Z = \pi x\left(b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2x^2}{3a^2} + \frac{bc}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\pi a b c \mathfrak{B} \sin \frac{2x}{a}$$

und nun für $x = KM = CE = \frac{1}{2}a$, den ganzen Raum zwischen den Kreisflächen AB und Ee d. h. ALMHB $= \frac{1}{2}a\pi(b^2 + \frac{1}{6}c^2) + \frac{1}{4}\pi a b c \mathfrak{B} \sin 1$, oder wegen $\mathfrak{B} \sin 1 = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$; ALMHB $= \frac{1}{2}a\pi.(b^2 + \frac{1}{6}c^2) + \frac{1}{8}\pi^2 a b c.$

4. Jetzt sey in dem conoidischen Raum EFe (2) für die Abscisse Kg = x die Ordinate gl = y, so hat man, wenn gl bis CE verlängert wird, vermöge der Gleichung für die Ellipse

$$\mathrm{ln}^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4\,\mathrm{Cn}^2)$$

oder wegen Cu = Kg = x und ln = gn — gl = KC — gl = b — y

$$(b-y)^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4x^2)$$

Demnach

$$y = b - \frac{c}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$$

$$y^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2x^2}{a^2} - \frac{bc}{a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$$

und $\pi\int y^2\,dx$, oder der einer jeden Abscisse x entsprechende conoidische Raum

$$Z' = \pi x\left(b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2x^2}{3a^2} - \frac{bc}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}\pi abc\,\mathfrak{B}\sin\frac{2x}{a} + \mathrm{Const.}$$

Die beständige Grösse muß hier dadurch bestimmt werden, daß der conoidische Raum eFE erst da anfängt, wo x = KF = h; also muß Z' = o werden für x = h; dieß giebt für die Const den Werth

πh

$$\pi h \left(-b^2 - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2 h^2}{3a^2} + \frac{bc}{2a}\sqrt{(a^2 - 4h^2)}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\pi abc\, \mathfrak{B} \sin \frac{2h}{a}$$

5. Setzt man nun in den Werth von Z', $x = KM = \frac{1}{2}a$, so erhält man für die ganze conoidische Vertiefung EFe den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\pi a (b^2 + \tfrac{1}{6}c^2) - \tfrac{1}{8}\pi^2 abc + \text{Const.}$$

Mithin für den körperlichen Raum des Sphäroids ALEFeHBA (1) den Werth

$$Z - Z' = \tfrac{1}{4}\pi^2 abc - \text{Const.}$$

Weil nun vermöge der Gleichung (4) für $x = h$ der Werth von $y = 0$ seyn muß, so hat man

$$b^2 = \frac{c^2}{4a^2}(a^2 - 4h^2) \text{ oder } b = \frac{c}{2a}\sqrt{(a^2 - 4h^2)};$$

und folglich auf beyden Seiten mit b multiplicirt $b^2 = \frac{bc}{2a}\sqrt{(a^2 - 4h^2)}$ dieß statt der Irrationalgrösse in dem Ausdrucke der Const. (4) substituirt, giebt

$$\text{Const} = \pi h\left(-\tfrac{1}{4}c^2 + \frac{c^2h^2}{3a^2}\right) + \tfrac{1}{4}\pi abc\,\mathfrak{B}\sin\frac{2h}{a}$$

Mithin

$$Z - Z' = \pi h\left(\tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2h^2}{3a^2}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\pi abc\left(\pi - \mathfrak{B}\sin\frac{2h}{a}\right)$$

6. Man sieht, daß dieser Ausdruck ganz dem (§. 117. 7.) ähnlich ist, wenn wenn nur das dortige b oder KC in Anwendung auf die 64te Figur negativ setzt, weil in (Fig. 63) K zwischen A und C, in Fig. 64 aber außerhalb A und C fällt. Dorten war $b = \frac{1}{2}c - k$ (§. 117. 3.) hier aber $= k - \frac{1}{2}c$ (3). Also ist auch hieraus klar, daß das b der 64ten Figur das entgegengesetzte von dem b der 63ten Figur ist. Ferner bedeutete in dem Ausdrucke (§. 117. 3.) $\mathfrak{B} \sin \frac{2h}{a}$ einen Bogen dessen Sinus $\frac{2h}{a}$ ist $< 90^0$ oder π. In Figur 64 ist der beschreibende Bogen ALEF $> 90^0$, oder bestimmter, grösser als der elliptische Quadrant ALE, dem am Mittelpunkte C ein Winkel ACE von 90^0 entspricht, und darum hat man in dem Ausdruck (5) einen Bogen $= \pi - \mathfrak{B} \sin \frac{2h}{a}$ (4) der das Complement dessen in (§. 117. 3.) zu 180^0 ist.

Also verwandelt sich der Ausdruck (§. 117. 3.) völlig in den gegenwärtigen (5), wenn man das dortige b negativ und statt des dortigen $\mathfrak{B} \sin \frac{2h}{a}$ die Ergänzung zu 180^0 setzt.

Man hätte also die Rechnung für die Aufgabe (§. 117.) sogleich auch aus der für die Auf-

Aufgabe (§. 118.) ableiten können, aber man würde dieß vielleicht wegen der konischen Vertiefung die sich bey dem letztern Falle ergiebt, nicht sogleich ohne weitern Beweis zugegeben haben.

7. Für $a = c = 2r$ d. h. wenn ALEF ein Kreisbogen ist, erhält man (5) für den Inhalt des Sphäroids den Ausdruck

$$\pi h \left(r^2 - \frac{1}{3}h^2\right) + \pi b r^2 \left(\pi - \text{B sin.} \frac{2h}{a}\right)$$

8. Ist der Bogen ALEF = 180°, so entsteht durch die Umdrehung eines Halbkreises ALE (Fig. 65) um die durch K oder F gezogene Tangente KM, ein runder Körper, oben mit einer konischen Vertiefung, für welchen $h = 0$, also der Inhalt $= \pi^2 br^2 = \pi^2 r^3$ seyn würde, weil zugleich $b = r$ wird.

9. Ist aber ALF eine halbe Ellipse, so wird der Inhalt des durch sie entstehenden runden Körpers $= \frac{1}{4}\pi a b c \pi = \frac{1}{8}\pi^2 a c^2$, weil jetzt $b = \frac{1}{2}c$, wenn sich die Ellipse um eine Linie KM drehet, welche auf der halben kleinen Axe $KC = \frac{1}{2}c$ senkrecht steht, und also die Ellipse in K berührt.

10. Ist aber KM auf der halben großen Axe $CK = \frac{1}{2}a$ senkrecht, so wäre der Inhalt des runden Körpers $= \frac{1}{8}\pi^2 ca^2$.

11. Wenn man sich einen Körper wie (8. 9. 10.) mit einer ebenen Fläche durchschnitten gedenkt, welche mit der Grundfläche AB parallel ist, so wird die Durchschnittsfigur allemahl einen Ring zwischen zwey concentrischen Kreisen geben, und der Körper selbst wird das Ansehen eines **Wulstes**, oder wenn man ihn sich hohl gedenkt, das Ansehen eines in einem Kreise herumgehenden **Gewölbes** haben, dessen jeder Schnitt senkrecht auf die Grundfläche und durch den Mittelpunkt K der Grundfläche geführt, der beschreibenden Figur ALF gleich und ähnlich ist.

12. Für die **Oberfläche** eines Körpers wie (1) wird vermöge der Gleichung (3) völlig nach dem Verfahren (117. 13.)

$$S = 2\pi bs + \frac{c\pi x}{2a^2}\sqrt{(a^4 - 4(a^2 - c^2)x^2)}$$

$$+ \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}}\,\mathfrak{B}\sin\frac{2x\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a^2}$$

und folglich wenn man $x = \frac{1}{2}a$ setzt, zuerst für den auswärts gehenden Theil der Oberfläche des Körpers der Ausdruck

$$2\pi bs + \tfrac{1}{4}c^2\pi + \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}}\,\mathfrak{B}\sin\frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$$

den ich mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen will. s bedeutet in diesem Ausdrucke den Quadranten ALE.

13.

13. Für die Oberfläche der conoidischen Vertiefung EFe wird die einer jeden Absciſſe $Kg = x$ (4) vermöge der für y gefundenen Gleichung (4), entſprechende Fläche S' völlig wie nach dem Verfahren (§. 117)

$$= 2\pi b s' - \frac{c\pi x}{2a^2} \sqrt{(a^4 - 4(a^2 - c^2)x^2)}$$

$$+ \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}} \mathfrak{B} \sin \frac{2x\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a^2}$$

$$+ \text{Const.}$$

wo denn $\text{Const.} = \frac{c\pi h}{2a^2} \sqrt{(a^4 - 4(a^2 - c^2)h^2)}$

$$- \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}} \mathfrak{B} \sin \frac{2h\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a^2}$$

wird, weil für $x = h$ ſowohl der elliptiſche Bogen $FE = s'$, als auch die Fläche S' verſchwinden muß.

Setzt man nun in den Ausdruck für S' die Abſciſſe $x = KM = CE = \frac{1}{2}a$, und läßt s' den elliptiſchen Bogen EF bezeichnen, ſo wird die ganze Fläche der conoidiſchen Vertiefung, wenn man ſie mit $\mathfrak{S}'$ bezeichnet

$$\mathfrak{S}' = 2\pi b s' - \tfrac{1}{4}c^2\pi - \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}} \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$$

$$+ \text{Const}$$

Demnach die Oberfläche des ganzen Körpers $= \mathfrak{S} + \mathfrak{S}' = 2\pi b(s + s') + \text{Const},$

 wo

wo denn statt Const. der gefundene Werth (13) und statt s + s' der ganze beschreibende Bogen ALEF gesetzt werden muß. (4

14. Eben diese Formel würde man auch aus der (§. 117. 14.) erhalten, wenn man dort b (negativ) und $x = b$ setzte (13).

15. Für ein Gewölbe wie (11) setzt man $h = 0$ (8. 9.) $b = \frac{1}{2}c$; dann wird Const. = 0, und die Oberfläche des Körpers schlechtweg $= c\pi(s + s')$ worin $s + s'$ den Umfang der halben Ellipse ALF (Fig. 65) bedeuten muß.

16. Ist ALF ein Halbkreis, so hat man $s + s' = \frac{1}{2}c\pi = r\pi$, und $c = 2r$, demnach die Oberfläche des runden Körpers (8) $= 2r^2\pi^2$. Sie ist also gleich der Hälfte einer Kugelfläche deren Halbmesser = r seyn würde, multiplicirt in die Ludolphische Zahl π, oder auch der krummen Seitenfläche eines Cylinders gleich, dessen Höhe und Halbmesser der Grundfläche dem Halbmesser r des beschreibenden Kreises gleich seyn würde, multiplicirt in die Ludolphische Zahl.

Anwendung des bisherigen überhaupt auf ringförmige Körper.

§. 119.

1. Es sey AEF (Fig. 66) eine beliebige krumme Linie in der Ebene MKA, und diese

Ebene

Ebene drehe sich um eine Linie MK welche ganz außerhalb der krummen Linie AEF falle, so wird die krumme Linie AEF bey der Drehung jener Ebene einen ringförmigen Körper beschreiben, dessen Grundfläche zwischen zwey concentrischen Kreisen von den Halbmessern KA, KF enthalten ist, wenn KFA auf KM senkrecht, die krumme Linie in F und A durchschneidet.

2. Inhalt und Oberfläche eines solchen ringförmigen Körpers zu finden, so sey E der höchste Punkt der krummen Linie über AK, und das Perpendikel EC = HK = h, so wie dessen Abstand von der Umdrehungsaxe KM d. h. EH = CK = b.

3. Dann beschreibt bey der Umdrehung (1) die Linie EH einen Kreis, und der Bogen AE rechter Hand CE einen runden Körper zwischen den beyden durch KA und EH beschriebenen Kreisen, dessen Inhalt man durch die Formel $\pi \int y^2 dx$ finden kann, wenn die Gleichung zwischen den senkrechten Coordinaten KG = x und GL = y gegeben ist, und man nach der Integration x = CE = h setzt.

4. Der Bogen EF linker Hand EC, wird dagegen zwischen den durch EH und KF beschriebenen Kreisflächen einen Körper beschreiben, der eine von dem durch AEF beschriebenen Ringe

Ringe umgebende Höhlung darstellt, deren Inhalt man ebenfalls durch die Formel $\pi\int y^2 dx$ bestimmen kann, wenn man jetzt für den Theil EF der krummen Linie, die Gleichung zwischen KG = x und, Gl = y als gegeben ansieht, und gleichfalls nach der Integration x = h setzt.

5. Um demnach den Inhalt des ringförmigen Körpers zu finden, zieht man von dem runden Körper (3) den (4) ab.

6. Begreiflich kann FlE auch ein Bogen von einer andern krummen Linie als ALE seyn. Es kömmt bloß darauf an, daß man aus irgend einer Gleichung für die krummen Linien ALE, FlE diejenige zwischen den rechtwinklichten Coordinaten KG, GL, oder KG, Gl zu finden weis, welches denn durch die Betrachtung der Figur, und die bekannte Methode eine Gleichung für eine krumme Linie auf eine andere Abscissenlinie zu bringen (M. s. Kästners An. d. Endl. §. 422.) in jedem Falle leicht bewerkstelliget werden kann.

7. Für die Oberfläche des ringförmigen Körpers sucht man die beyden Integrale $2\pi\int y\,ds$, so giebt das erstere aus der Gleichung zwischen KG = x und GL = y den Theil der Oberfläche, welcher durch den Bogen ALE beschrieben wird, und das zweyte aus der Gleichung zwischen KG = x und Gl = y den Theil

der

der Oberfläche, welcher durch den Bogen ElF beschrieben wird, in jedem Integrale $x=h$ gesetzt. Die Summe von beyden giebt dann die ganze krumme Oberfläche des ringförmigen Körpers.

8. Ich nehme in dem bisherigen an, daß jeder Bogen ALE, FlE übrigens von der Beschaffenheit ist, daß jeder Abscisse x nur eine Ordinate entspricht. Wäre aber z. B. (Fig. 67) $ae''e'e'''le^0$ der um km sich drehende Bogen, so würde der Ausdruck $\pi\int y^2 dx$ für $x=kh$ nicht gerade zu den von ale^0 beschriebenen körperlichen Raum geben (so wenig als die bekannte Formel $\int y dx$ den zwischen der erwähnten krummen Linie und der Abscissenlinie kh enthaltenen Flächenraum), weil denen zwischen kh'' und kh' fallenden Abscissen erstlich eine Reihe von Ordinaten für den Theil $e''e'$ der krummen Linie, dann eine zweyte Reihe für den Theil $e'e'''$, und eine dritte für den Theil le''' zugehört. Man nenne also die Ordinaten für den Bogen $e'e''=u$, für den $e'e'''=v$, für den $le'''=z$, so giebt der Ausdruck $\pi\int z^2 dx$ den durch den Bogen le''' um km beschriebenen körperlichen Raum; hievon muß man nun abziehen den Theil, welcher durch den Bogen $e'''e'e''$ beschrieben wird, weil dieser Theil außerhalb des Körpers fällt, und gleichsam eine einwärtsgehende Höhlung darstellt; aber dieser abzuziehende Theil ist gleich dem durch den Bogen $e'e'''$ beschriebenen kör-

per-

perlichen Raum, weniger demjenigen, welcher durch $e'e''$ bey der Drehung um km beschrieben wird, also $=\pi\int v^2\,dx-\pi\int u^2\,dx$; demnach der körperliche Raum, welcher durch $e''e'e'''l$ um km beschrieben wird $=\pi\int z^2\,dx-\pi\int v^2\,dx+\pi\int u^2\,dx$ die einzeln Integrale so bestimmt, daß sie für $x=kh''$ verschwinden, und nach geschehener Integration $x=kh'$ gesetzt.

Die Ordinaten für den Bogen ae'' seyen mit q und die für den Bogen le^0 mit w bezeichnet, so ist der durch
ae'' beschriebene körperliche Raum $=\pi\int q^2\,dx$
le^0 = = = = $=\pi\int w^2\,dx$
wo $\int q^2\,dx$ so bestimmt werden muß, daß es für $x=0$, $\pi\int w^2\,dx$ aber daß es für $x=kh'$ verschwindet. Nach geschehener Integration wird dann in das Integral $\pi\int q^2\,dx$, $x=kh''$, und in das $\pi\int w^2\,dx$, $x=kh$ gesetzt. Es erhellet also, daß aus der allgemeinen Gleichung für die krumme Linie $ae''e'e'''le^0$ erst besondere Gleichungen bloß für die einzelnen Theile ae''; $e''e'$, $e'e'''$ u. s. w. gesucht werden müssen, ehe man dann durch eine gehörige Summirung der partiellen Integrale wie $\int z^2\,dx$, $\int u^2\,dx$ rc. mit Betrachtung derjenigen, welche zugleich abgezogen werden müssen (z. B. des obigen $\int v^2\,dx$) den durch die ganze krumme Linie $ae''..le^0$ beschriebenen runden Körper erhalten kann.

Zehn-

Aehnliche Betrachtungen sind in Ansehung der Oberfläche des, durch die krumme Linie beschriebenen Körpers anzustellen, womit ich mich aber hier weiter nicht aufhalten will, da Körper von der Art wie (8) in der Ausübung doch wohl nicht häufig vorkommen werden.

9. Ist demnach (Fig. 66) der ringförmige Körper zu bestimmen, der durch die Umdrehung der krummen Linien ALE, FIE entsteht, so müssen Betrachtungen wie (8) zu Hülfe genommen werden, wenn etwa die Bögen ALE oder FIE von der daselbst erwähnten Beschaffenheit seyn sollten.

10. Aus der Hauptgleichung für die krumme Linie, wie ae''e'e'''le°, partielle Gleichungen für die einzelnen Bögen ae'', e''e', e'e''', u. s. w. zu erhalten, setzt die allgemeine Auflösung der Gleichungen voraus, die aber nicht in unserer Gewalt steht, und nur in besonderen Fällen statt finden kann.

11. Uebrigens könnten aber die einzeln Bögen ae'', e''e' u. s. w. auch Stücken von andern krummen Linien seyn, und also nicht zu einer und derselben krummen Linie gehören. In jedem Falle wenn die Gleichungen für diese Stücken gegeben sind, läßt sich der daraus entstehende runde oder auch ringförmige Körper nach Betrachtungen wie (8) berechnen.

§. 120.

perlichen Raum, m ...
durch e'e'' be ...
ben wird, als ... zu §. 119.
nach der ... piel. 1. Es sey (Fig. 66.
e''e'e'''l u ... el deren Scheitelpunkt E,
... der Axe EC der Parabel pa-
so bestim ... öge der Gleichung der Parabel
und n ... = a . EN
gesetz ... Parameter bedeutet.

... n EC = h, CK = b, so hat man
m ... x = h — EN; also EN = h — x
... oder y = b + NL d. h. NL = y — b
...

$$(y-b)^2 = a(h-x)$$

$$y = b + \sqrt{a(h-x)}$$

... den Bogen AE der Parabel, wobey denn das Wurzelzeichen immer als positiv betrachtet wird, und so wäre dieß erstlich die Gleichung für den Theil AE der Parabel.

2. Bedeutet aber y = Gl eine Ordinate für den Theil EF der Parabel, so ist die besondere Gleichung für den Bogen ElF nach ähnlichen Betrachtungen folgende

$$y = b - \sqrt{a(h-x)}$$

wo das Wurzelzeichen immer negativ genommen werden muß.

3. Also

3. Also hat man erstlich für den durch E um KM beschriebenen körperlichen Raum (§. 119. 3.) und (§. 120. 1.)

$\pi \int y^2 dx =$

$= \pi \int (b^2 + 2b\sqrt{a(h-x)} + a(h-x))\, dx$

$= \pi ((b^2 + ah)x - \frac{ax^2}{2} + 2b\sqrt{a} \int dx \sqrt{(h-x)})$

$= \pi ((b^2 + ah)x - \frac{ax^2}{2} - \frac{4}{3}(h-x)b\sqrt{a}\sqrt{(h-x)})$
$+ \text{Const}$

$= \pi ((b^2 + ah)x - \frac{ax^2}{2} - \frac{4}{3}(h-x)b\sqrt{a}\sqrt{(h-x)})$
$+ \frac{4}{3}\pi hb\sqrt{ah}$

wenn das Integral für $x = 0$ verschwinden soll.

Setzt man nun $x = h$, so wird des durch den Bogen AE beschriebenen runden Körpers Inhalt

$Z = \pi (b^2 + \frac{1}{2}ah)h + \frac{4}{3}\pi hb\sqrt{ah})$

$= \pi h (b^2 + \frac{1}{2}ah + \frac{4}{3}b\sqrt{ah})$

4. Aus der Gleichung (2) für den durch den Bogen EF um KM beschriebenen runden Körper findet man auf eine ähnliche Art

$\pi \int y^2 dx = \pi h (b^2 + \frac{1}{2}ah - \frac{4}{3}b\sqrt{ah}) = Z'$

5. Demnach (§. 119. 5.) der körperliche Inhalt des durch die Parabel AEF beschriebenen Ringes $= Z - Z'$ $= \frac{8}{3}\pi bh\sqrt{ah}$.

6. Für die Oberfläche dieses parabolischen Ringes hat man erstlich in Rücksicht auf den Theil der Oberfläche, welcher durch den Bogen AE beschrieben wird

$$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{dx \sqrt{(\frac{1}{4}a + h - x)}}{\sqrt{(h - x)}}$$

Also die durch AE beschriebene Oberfläche

$$S = 2\pi \int y\,ds$$

$$= 2\pi \int (b\,ds + dx \sqrt{a} \sqrt{(\tfrac{1}{4}a + h - x)}) \;.\; (1)$$

$$= 2\pi\,(bs - \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{4}a + h - x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}) + \text{Const}$$

Da nun für $x = 0$, so wohl der Bogen $AL = s$ als auch die Fläche S verschwinden muß, so erhält man $\text{Const} = \frac{4}{3}\pi (\frac{1}{4}a + h)^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}$.

7. Demnach $x = h$ gesetzt, die durch den Bogen AE beschriebene Fläche $= 2\pi(bs - \frac{1}{12}a^2) + \text{Const}$, wo jetzt s den ganzen parabolischen Bogen AE und Const die (6) gefundene beständige Grösse bezeichnet.

8. Auf eine ähnliche Weise findet man für den durch FE beschriebenen Theil der Oberfläche S′ (den Werth von y aus (2) genommen, und den Bogen $FI = s'$ genannt)

$$S' = 2\pi\,(bs' + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{4}a + h - x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}) + \text{Const}$$

und $\text{Const} = -\frac{4}{3}\pi (\frac{1}{4}a + h)^{\frac{3}{2}} \sqrt{a}$; mithin für $x = h$ die durch den Bogen FE beschriebene Fläche $= 2\pi\,(bs' + \frac{1}{12}a^2) + \text{Const}$.

9.

9. Also die ganze krumme Oberfläche des parabolischen Ringes (6) durch Addition von (7) und (8) $= 2\pi b\ (s + s')$ wo $s + s'$ den ganzen Bogen AEF bezeichnet, der denn entweder unmittelbar gemessen, oder aus seinen Coordinaten wie EC, FC nach (§. 56. oder 60) berechnet werden kann.

Zweytes Beyspiel. 1. Es sey AEF (Fig. 66) eine Ellipse und $EC = h = \frac{1}{2}a$ = der halben großen Axe.

So ist die Gleichung für den Bogen AE, wenn $KG = x$ und $GL = y$ genannt werden nach (§. 118. 3.)

$$y = b + \frac{c}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$$

und für den Bogen FE, wenn jetzt $KG = x$ und $Gl = y$ gesetzt werden

$$y = b - \frac{c}{2a}\sqrt{(a^2 - 4x^2)}$$

Dieß giebt denn völlig wie (§. 118. 3.) den durch den Bogen AE beschriebenen körperlichen Raum Z

$$\tfrac{1}{2}a\pi\,(b^2 + \tfrac{1}{6}c^2) + \tfrac{1}{8}\pi^2 abc$$

und für den durch den Bogen FE beschriebenen körperlichen Raum, den Werth

$$Z' = \tfrac{1}{2}a\pi\,(b^2 + \tfrac{1}{6}c^2) - \tfrac{1}{8}\pi^2 abc$$

 welcher

welcher Ausdruck sich aus dem (§. 118. 4.) für Z' gefundenen Werthe ergiebt, wenn man in denselben $x = KH = CE = \frac{1}{2}a$ setzt. Die dortige Const ist begreiflich für den gegenwärtigen Fall $= 0$.

2. Folglich der körperliche Inhalt des elliptischen Ringes $= Z - Z' = \frac{1}{4}\pi^2 . abc$.

3. Man findet denselben Ausdruck, wenn EC nicht die halbe große, sondern die halbe kleine Axe bedeutet. Zwey elliptische ringförmige Körper haben also für einerley b d. h. für einerley Abstand des Mittelpunktes C der um KM sich drehenden Ellipse AEF gleichen körperlichen Raum, die Linie KM mag mit der halben großen oder kleinen Axe parallel seyn.

4. Für die Fläche S des durch AE beschriebenen Theiles der Oberfläche des Ringes erhält man nach (§. 118. 12.) wenn man dort $x = \frac{1}{2}a$ setzt, und s den Quadranten AE bedeutet

$$S = 2\pi bs + \frac{1}{4}c^2\pi + \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}} \text{ Blin } \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$$

und für den durch den Quadranten FE beschriebenen Theil der Oberfläche

$$S' = 2\pi bs' - \frac{1}{4}c^2\pi - \frac{c\pi a^2}{4\sqrt{(a^2 - c^2)}} \text{ Blin } \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$$

aus

aus (§. 118. 13.) das dortige $x = \frac{1}{2}a$ und Const $= 0$ gesetzt, wie für den gegenwärtigen Fall sich findet.

5. Demnach die ganze krumme Oberfläche des Ringes $= S + S' = 2\pi b (s + s')$, wo also $s + s'$ den elliptischen Umfang AEF bedeutet, der also unmittelbar gemessen, oder nach (§. 57. und 61.) berechnet werden kann.

6. Für einen durch einen Halbkreis AEF beschriebenen Ring setzt man $a = c = 2r$; dieß giebt den Inhalt $= \pi^2 b r^2$, und die Oberfläche $= 2\pi^2 b r$ weil $s + s'$ für diesen Fall $= r\pi$ ist.

7. Gedenkt man sich den in einem Kreise um KM herumgehenden Ring hohl, so wird er ebenfalls wie in (§. 118. 11.) ein Gewölbe vorstellen, welches in einer gewissen Entfernung $KC = b$ kreisförmig um K herumgeht. Für $b = r$ erhält man den Fall (§. 118. 16.) Das Beyspiel (I) würde ein parabolisches in einem Kreise herumgeführtes Gewölbe geben.

Mehrere besondere Beyspiele werden nicht nöthig seyn, die Aufgabe (§. 119.) zu erläutern.

8. Man wird aber überhaupt wenn die beschreibende krumme Linie AEF von der Art ist, daß sie durch eine

mit KM parallele Linie CE in zwey gleiche und ähnliche Hälften AE, FE zerfällt, folgende allgemeine Auflösung nicht überflüssig finden

9. Man nenne die Function wodurch die Ordinate NL durch die Abscisse CN $= x$ ausgedrückt wird $= \varphi x$, so hat man für den Bogen AE allgemein in Rücksicht auf die Abscissenlinie KM die Coordinaten KG $= x$ und GL $= y =$ GN + NL $= b + \varphi x$; und für den Theil EF der krummen Linie die Coordinaten KG $= x$ und Gl $= b - \varphi x$.

Also für den durch AE um KM beschriebenen körperlichen Raum für jede Abscisse

$$Z = \pi \int y^2 dx = \pi \int (b^2 + 2b\varphi x + (\varphi x)^2) dx$$
$$= \pi b^2 x + 2b\pi \int dx . \varphi x + \pi \int dx . (\varphi x)^2$$

das Integral $\int dx \varphi x$ von $x = 0$ bis $x =$ CE $= h$, nenne man F, und das Integral $\int dy (\varphi x)^2$ von $x = 0$ bis $x = h$, setze man $= G$, so ist für $x =$ KH $=$ CE $= h$ der körperliche Raum, welcher durch den Bogen AE beschrieben worden

$$Z = \pi b^2 h + 2b\pi F + \pi G$$

und so auf eine ähnliche Weise der durch den Bogen FE beschriebene körperliche Raum

$$Z' = \pi b^2 h - 2b\pi F + \pi G$$

Dem-

Demnach der körperliche Raum des von AEF beschriebenen Ringes $= Z + Z' = 4\,b\pi . F$.

Hier bedeutet also $F = \int dx(\varphi x)$ offenbar den Flächenraum, der zwischen der krummen Linie AE, und den beyden geraden Linien AC und CE enthalten ist. Dieser Flächenraum also in $4\,b\pi$ multiplicirt, giebt zum Produkt den körperlichen Inhalt des durch AEF beschriebenen Ringes.

10. Ferner wird für die Oberfläche des Ringes erstlich in Rücksicht auf den durch AE beschriebenen Theil der Oberfläche, $dy = d(\varphi x) = \varphi' x . dx$ wo $\varphi' x$ eine Function von x bedeutet, welche man durch die Differentiation der ersteren φx sehr leicht erhält.

Demnach

$$ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{((\varphi' x)^2 + 1)}$$

und für den durch AE beschriebenen Theil der Oberfläche des Ringes

$$S = 2\pi \int y\, ds = 2\pi \int (b + \varphi x)\, ds$$
$$= 2\pi \int b\, ds + 2\pi \int \varphi x\, dx \sqrt{((\varphi' x)^2 + 1)}$$
$$= 2\pi b s + 2\pi H$$

wo s den Bogen AE und H das Integral von $\varphi x . dx \sqrt{((\varphi' x)^2 + 1)}$ bedeutet, dieß Integral von $x = 0$ bis $x = CE = h$ genommen.

So wird denn auf eine ähnliche Weise der durch den Bogen FE beschriebene Theil der Oberfläche des Ringes

$$S' = 2\pi b s' - 2\pi H$$

wo $s' = s$ den Bogen FE bedeutet.

Folglich die Oberfläche des Ringes $= S + S' = 2\pi b (s + s') =$ dem Produkt aus $2\pi b$ in den Umfang AEF, der in jedem Falle auch unmittelbar gemessen werden kann, wenn man ihn nicht durch die Integration des für ds gefundenen Differentials berechnen will.

11. Doch setzt diese allgemeine Auflösung voraus, daß die krumme Linie AE so beschaffen ist, daß nicht die Bemerkungen (§. 119. 8.) dabey zu erörtern sind.

Conchoidisches Sphäroid.

§. 121.

1. Es sey (Fig. 59) und in der Aufgabe §. 113. AL ein Bogen von einer Muschellinie oder Conchoide, die Asymptote falle in die Richtung der Linie KF, und C sey der feste Punkt um den die Conchoide auf die bekannte Art (M. s. Kästners Anal. endl. Grössen §. 479.) beschrieben worden ist; das Perpendikel CA auf die Asymptote FK schneidet die krumme Linie in A, so daß $CK = b$ und

KA

KA = a die beständigen Grössen sind, welche in der Gleichung der Conchoide vorkommen. Nennt man nemlich die Abscissen auf der Asymptote KG = x, und die Ordinaten GL = y, so ist die Gleichung für die Muschellinie (a. a. O. 481.)

$$x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$$

weil nemlich das ER oder PM (a. a. O.) hier = x und das dortige RM oder EP hier = y sind.

2. Ich nehme hier die Ordinaten y bloß positiv und betrachte also nur denjenigen Theil der Conchoide, welchen man die obere Conchoide nennt. Sie drehe sich also um die Asymptote KF, man verlangt den einem jeden Bogen AL zugehörigen körperlichen Raum des durch die Umdrehung entstehenden conchoidischen Sphäroids ALBH.

3. Man würde einen sehr unbequemen Ausdruck für diesen körperlichen Raum erhalten, wenn man ihn durch die Abscisse KG = x bestimmen wollte, d. h. in dem Ausdrucke $Z = \pi \int y^2 dx$, die Ordinate y durch x ausdrücken, und dann integriren wollte, weil y durch x nicht anders als vermittelst einer Gleichung vom 4ten Grade gefunden werden kann,

 deren

deren Auflösung mit Schwürigkeiten verknüpft ist, da es hingegen leicht ist, die Abscisse x durch jede Ordinate y, nach dem angegebenen Ausdrucke zu finden.

Es ist also vortheilhaft, den Werth von Z (§. 113.) bloß durch die Ordinate y auszudrücken, welches denn auf folgende Weise geschieht.

4. Erstlich hat man durch die Differenziation

$$dx = -\frac{(a^2 b + y^3)\, dy}{y^2 \sqrt{(a^2 - y^2)}}$$

Also $\pi \int y^2\, dx$ oder

$$Z = -a^2 b \pi \int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} - \pi \int \frac{y^3\, dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$$

$$= -a^2 b \pi \mathfrak{B} \sin \frac{y}{a} + \tfrac{1}{3} \pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$$

(Integralf. §. XXII. XXIII.) $\mp$ Const. weil nun $Z = 0$ für $y = KA = a$, so erhält man Const $= \frac{1}{2} \pi^2 a^2 b$, weil für $y = a$ $\mathfrak{B} \sin \frac{y}{a} = \mathfrak{B} \sin 1 = \frac{1}{2} \pi$.

Demnach des conchoidischen Sphäroids Inhalt $Z = \pi a^2 b \left(\frac{1}{2}\pi - \mathfrak{B} \sin \frac{y}{a}\right)$

$$+ \frac{\pi}{3}(2a^2 + y^2) \sqrt{(a^2 - y^2)}$$

Oder

Oder wegen $\frac{1}{2}\pi - \mathfrak{B}\sin\frac{y}{a} = \mathfrak{B}\cos\frac{y}{a}$

$$Z = \pi a^2 b \mathfrak{B}\cos\frac{y}{a} + \frac{\pi}{3}(2a^2+y^2)\sqrt{(a^2-y^2)}$$

$$= \pi a^2 b \mathfrak{B}\cos\frac{y}{a} + \frac{\pi}{3}\frac{(2a^2+y^2)xy}{b+y}$$

5. Für $y=0$, erhält man den ganzen ins Unendliche längst der Asymptote hinausgehenden körperlichen Raum $= \pi a^2 b . \mathfrak{B}\cos o + \frac{2}{3}\pi a^3 = \pi a^2 (\frac{1}{2}\pi b + \frac{2}{3}a)$ weil $\mathfrak{B}\cos o = \frac{1}{2}\pi$.

6. Für die Oberfläche des Sphäroids für jeden Werth von y, ergiebt sich kein Differential, welches nach den bekannten Methoden bequem zu integriren wäre. Man wird also die Oberfläche, falls sie verlangt würde, am bequemsten nach (§. 116. 8.) durch eine Näherung finden können.

§. 122.

Anmerkung.

Die bisherigen Beyspiele mögen hinreichend seyn, die Anwendung der für den Inhalt und die Oberfläche runder Körper angegebenen Fundamentalformeln $Z = \pi\int y^2 dx$ und $S = 2\pi\int y ds$ zu erläutern, welche Beyspiele denn zugleich diejenigen runden Körper betreffen, welche vorzüglich in der Ausübung vorkommen.

In

In Fällen wo die Integrale $\int y^2 dx$; $\int y ds$ sich nicht in endlichen Ausdrücken darstellen lassen, muß man solche durch Näherungen zu erhalten suchen, so wie solches oben bereits bey der Berechnung der Oberfläche eines runden Körpers gezeigt worden ist.

1. Hier ist nun auch noch das Verfahren den körperlichen Inhalt runder Körper durch eine Näherung zu bestimmen. Man gedenke sich (Fig. 63), um den körperlichen Raum zwischen den beyden Kreisflächen AB, HL zu bestimmen, die Abscisse KG welche durch die Mittelpunkte K, G, jener beyden Kreise geht, in gleich große kleine Theile $= \varepsilon$ getheilt, und durch die Theilpunkte 1, 2, 3 ꝛc. Schnitte mit AB parallel, so ist zwischen jedem Paare von Schnitten eine körperliche Scheibe enthalten, deren Höhe oder Dicke $= \varepsilon$ ist, und welche man als einen abgekürzten Kegel betrachten, und nach (§. 80.) berechnen kann.

2. Man nenne die Ordinaten durch K, 1, 2, 3, 4, u. s. w. y^0, y', y'', y''', y^{IV} ꝛc. so ist der körperliche Raum zwischen

K und 1 $= \frac{1}{3}\varepsilon\pi((y^0+y')^2 - y^0 y')$

1 und 2 $= \frac{1}{3}\varepsilon\pi((y'+y'')^2 - y'y'')$

u. s. w.

Daher

Daher der ganze körperliche Raum zwischen K und G

$= \frac{1}{3}\varepsilon\pi ((y^0 + y')^2 + (y' + y'')^2 .. (y^{N-1} + y^N)^2)$
$- \frac{1}{3}\varepsilon\pi (y^0 y' + y' y'' .... + y^{N-1} y^N)$

3. Man nenne den erwähnten körperlichen Raum $= Z$, so kann man dafür, wie eine leichte Rechnung zeigt, auch folgenden Ausdruck gebrauchen

$$Z = \tfrac{1}{4}\varepsilon\pi [(y^0 + y')^2 + (y' + y'')^2 .. + + (y^{N-1} + y^N)^2]$$
$$+ \tfrac{1}{12}\varepsilon\pi [(y^0 - y')^2 + (y' - y'')^2 .. + + (y^{N-1} - y^N)^2]$$

welche Formel sich darauf gründet, daß z. B. der körperliche Raum zwischen

K und 1 $= \frac{1}{3}\varepsilon\pi (\frac{3}{4}(y^0 + y')^2 + \frac{1}{4}(y^0 - y')^2)$
1 und 2 $= \frac{1}{3}\varepsilon\pi (\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2$
u. s. w. ist.

4. Dieser für Z gefundene Ausdruck ist sehr bequem, wenn man durch Zeichnung die Seiten von ein Paar Quadraten finden will, welche den Summen der in $\frac{1}{4}\varepsilon\pi$ und $\frac{1}{12}\varepsilon\pi$ zu multiplicirenden Quadrate gleich seyn würden.

Nachdem man nemlich die Ordinaten y^0, y', y'' u. s. w. gemessen hat, so berechne man ihre Summen und Differenzen nemlich

y^0

$y^0 + y' = a'$; $y^0 - y' = b'$ oder auch $y' - y^0 = b'$
$y' + y'' = a''$; $y' - y'' = b''$ oder auch $y'' - y' = b''$
u. s. w. u. s. w.

und trage nun nach einem verjüngten Maaßstabe auf den einen Schenkel eines rechten Winkels LAH (Fig. 68) aus A in α', α'', α''', die eben gefundenen Werthe von a', a'', a''' u. s. w. trage auch $A\alpha'$ oder a' auf den anderen Schenkel AL aus A in 1, so ist die Hypothenuse von α'' nach 1 die Seite eines Quadrats welches $= (a')^2 + (a'')^2$ seyn würde. Nun trage man die gefundene Hypothenuse aus A in 2, und fasse die neue Hypothenuse von α''' nach 2, so hat man die Seite eines Quadrats, welches $= (a')^2 + (a'')^2 + (a''')^2$ gleich seyn würde, u. s. w. So erhält man endlich die Seite eines Quadrats, welches $= (a')^2 + (a'')^2 + (a''')^2 + (a^{IV})^2 \ldots + (\alpha^N)^2$ seyn würde. Ich will diese Seite, die man leicht auf dem verjüngten Maaßstabe messen kann $=$ A nennen.

Auf dieselbe Weise verfahre man, um die Seite B eines Quadrats zu finden, welches der Summe von $(b')^2 + (b'')^2 + (b''')3 \ldots + (b^N)^2$ gleich seyn würde. Sind nun A und B gefunden, so hat man

$$Z = \tfrac{1}{4} s\pi (A^2 + \tfrac{1}{3} B^2)$$

5. Dieß Verfahren, die Grössen A und B durch Zeichnung zu finden, erspart also die

Mühe

Mühe der Berechnung aller einzeln Quadrate in dem Ausdrucke für Z, und kann in vielen Fällen, wo es auf die größte Genauigkeit nicht ankömmt, vortheilhaft in der Ausübung angewandt werden.

6. Unter den Werthen von b', b'', b''' werden sehr oft welche vorkommen, welche man in der Zeichnung ohne merklichen Fehler weglassen kann. Man nimmt also nur immer diejenigen Werthe von b, welche noch erheblich genug sind, um in Betrachtung zu kommen, und findet daraus den Werth von B. Begreiflich würde man auch in der Rechnung selbst solche Werthe von b weglassen, deren Betrachtung von keinem erheblichen Einflusse auf die Berechnung des Inhalts von Z seyn würden. Fände man z. B. $A = 10,52$, und unter den Werthen von b einen $= 0,1$, so würde man $b^2 = 0,01$ erhalten, welches denn in Absicht von $A^2 = 110,6..$ ohne merklichen Irrthum würde weggelassen werden können.

7. Um die Ordinaten durch K, 1, 2, .. G (Fig. 63) an dem vorgegebenen runden Körper ALHB messen zu können, gedenke man sich durch die Mittelpunkte G, K, der beyden Kreisflächen HL, BA, ein paar Liniale oder Stäbe GI, KW, welche auf einem außerhalb des Körpers senkrecht an GI, und KW angesetzten Stabe RW, die Höhe $IW = KG$ abschneiden.

Diese

Diese Höhe IW theile man nun in die gleichen Theile $= \varepsilon$, in welche man eigentlich KG sich eingetheilt gedenken müßte, bey $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ und lasse nun längst RW einen Stab senkrecht auf WR dergestalt parallel mit sich selbst verschieben, daß man ihn nach und nach an die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ bringt, so wird dessen Endpunkt auf dem Bogen AL die Punkte $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \ldots$ bezeichnen, welche die Endpunkte der durch 1, 2, 3, 4, ... gehenden Ordinaten seyn würden. Mißt man nun auf diesem Stabe, der von seinem Endpunkte an, in Fuße, Zolle u. s. w. getheilt seyn kann, die Weiten AW, $\alpha'\alpha$, $\beta'\beta$, $\gamma'\gamma$ u. s. w und dann auch die Halbmesser KA oder GL, so hat man der Ordnung nach, die Ordinaten

$$y^o = KA$$
$$y' = \alpha' 1 = KA + AW - \alpha'\alpha$$
$$y'' = \beta' 2 = KA + AW - \beta'\beta$$
$$y''' = \gamma' 3 = KA + AW - \gamma'\gamma$$
u. s. w.

Da man die Ordinaten y', y'' rc. nicht innerhalb des Körpers messen kann, so muß man sie durch Linien, die sich außerhalb des Körpers messen lassen, auf die angezeigte Art zu bestimmen suchen. Sonst könnte man auch wohl in α', β', γ' u. s. w. den Umfang des runden Körpers messen, und daraus seine Weiten oder Durchmesser berechnen, deren Hälften denn der

Ordnung

Ordnung nach ebenfalls die gedachten Ordinaten geben würden.

§. 123.
Aufgabe.

Die Oberfläche eines jeden runden Körpers auf die Quadratur einer krummen Linie zu bringen.

Aufl. 1. Wenn ALF (Fig. 59.) die beschreibende krumme Linie ist (§. 112.) deren Gleichung zwischen $KG = x$ und $GL = y$ als bekannt vorausgesetzt wird, so ist nach (§. 113.) die Oberfläche des runden Körpers zwischen den Parallelkreisen AB und LH oder

$$S = 2\pi \int y\, ds$$

und $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$

2. Man setze $\frac{dy}{dx} = p$, so wird

$$S = 2\pi \int y \sqrt{(1 + p^2)} . dx$$

3. Man construire also eine krumme Linie, deren Ordinate z für jede Absciſſe x dem Werthe von $y \sqrt{(1 + p^2)}$ gleich ist, wo $y \sqrt{(1 + p^2)}$ aus der zwischen y und x gegebenen Gleichung (1) durch x ausgedrückt werden kann, so drückt $\int y \sqrt{(1 + p^2)} . dx$ oder $\int z\, dx$ den Flächenraum dieser krummen Linie für jede Absciſſe x aus.

aus. Diesen multiplicire man also in 2π, so hat man die Oberfläche des runden Körpers für jede Abscisse x.

4. Die krumme Linie (3) selbst zu zeichnen, von deren Quadratur die Bestimmung der Oberfläche des runden Körpers abhängt, so gedenke man sich an jedem Punkt L, welcher der Abscisse $KG = x$ entspricht, eine Normallinie LQ gezogen, welche die Abscissenlinie in Q schneidet, so ist die Subnormallinie $GQ = \frac{ydy}{dx} = y \cdot p$ (2), und folglich $LQ = \sqrt{(LG^2 + QG^2)} = \sqrt{(y^2 + y^2 p^2)} = y\sqrt{(1 + p^2)} = z$; d. h. die Normallinie LQ ist für jede Abscisse x sogleich die Ordinate selbst, für diejenige krumme Linie, von deren Quadratur die Oberfläche des runden Körpers abhängt.

5. Ist also z. B. ALF (Fig. 69) die die Oberfläche des Körpers beschreibende krumme Linie, und sind LG, L′G′, L″G″ Ordinaten derselben, LQ, L′Q′, L″Q″ die Normallinien an L, L′, L″, so trage man LQ, auf die Verlängerung der Ordinate GL, aus G in l, und eben so L′Q′ aus G′ in l′, L″Q″ aus G″ in l″, u. s. w. so ist, wenn AK selbst auch schon in A normal ist, All′l″F′ die krumme Linie, deren Flächeninhalt zwischen dem Bogen AlF′, und der Abscisse KF, man nur in 2π multipliciren darf, um

um die von ALF beschriebene krumme Oberfläche des runden Körpers zu erhalten.

6. Exempel. Es sey z. B. ALF ein elliptischer Quadrant, KF $= \frac{1}{2}$a die halbe große Axe und KA $= \frac{1}{2}$c die halbe kleine, so hat man

$$p = \frac{dy}{dx} = - \frac{2x}{\sqrt{(a^2 - 4x^2)}} \cdot \frac{c}{a} \text{ (§. 115. 2.)}$$

und $$\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{\sqrt{\left(a^2 - \frac{4(a^2 - c^2)}{a^2} x^2\right)}}{\sqrt{(a^2 - 4x^2)}}$$

$$y\sqrt{(1 + p^2)} \text{ oder } z = \frac{c}{2a}\sqrt{\left(a^2 - \frac{4(a^2 - c^2)}{a^2} x^2\right)}$$

und $$z^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2(a^2 - c^2)}{a^4} x^2$$

Dieß wäre demnach die Gleichung für die krumme Linie All'l''F', woraus erhellet, daß auch diese einen elliptischen Bogen darstellet, und die halbe kleine Axe dieser Ellipse $= \frac{1}{2}$c, die halbe große $= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2 - c^2)}}$ seyn würde.

7. Für x = KF $= \frac{1}{2}$a würde die Ordinate FF' $= z = \frac{c^2}{2a}$, und für x = 0 die Ordinate KA $= \frac{1}{2}$c.

8. Ist

aus. Diesen multiplicire man also ... hat man die Oberfläche des runden ... jede Abscisse x.

4. Die krumme Linie (... von deren Quadratur ... Oberfläche des runden ... gedenke man sich an ... der Abscisse KG = x ... Linie LQ gezogen ... Q schneidet, so i...

$\frac{ydy}{dx} = y \cdot p(2$ ...

$+ QG^2) =$ ... denn für

$= z$; d. h ... durch den Qua-

scisse x s... wird, den Quadrat-

krumm...

fläche ... $\pi \cdot \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{2}c^2 \pi$

...in bekannt ist.

... ALF beschriebene krumme Dre... Körpers zu erhalten.

Es sey z. B. ALF ein ... $= \frac{1}{2}a$ die halbe große ... kleine, so hat man ... (S. 115. 2.)

9. Ist bey einem vorgegebenen runden Körper die Gleichung für die beschreibende krumme Linie ALF nicht gegeben, so kann man sie doch aus einigen gemessenen Abscissen und Ordinaten sehr leicht nach einem verjüngten Maaßstabe so genau auf dem Papiere zeichnen, daß sich alsdann auch durch Ziehung von Normallinien wie LQ, L'Q' u. s. w. (die man immer mit hinlänglicher Genauigkeit bloß nach dem Augenmaaße ziehen kann) die krumme Linie AllF'

...au wird construiren lassen, als nöthig
...dratinhalt KAF'F etwa nach dem
...4.) zu finden. Ist dann dieser
... man die Oberfläche des von
...nden Körpers $= 2\pi$.KAF'F.

...s Verfahren nicht an-
...s (§. 116. β.) ange-
...er sehr gute Dienste
...enn die dortigen
... Körper selbst
... auch nach einem
...eoenen ähnlichen Ver-
...ann.

8. Ist a von c sehr wenig unterschieden, so wird beynahe $z^2 = \frac{1}{4}c^2$ oder $z = \frac{1}{2}c$ d. h. die krumme Linie Al'F' würde nur sehr wenig von einer geraden mit KF parallelen Linie abweichen, und für $a = c$ d.h. wenn ALF ein Quadrant von einem Kreise wäre, würde Al'F' vollkommen eine gerade mit KF parallele Linie seyn, welche von KF um $KA = \frac{1}{2}c$ abstehen würde.

Der Flächenraum zwischen Al'F' und KF würde für diesen Fall ein Quadrat seyn, dessen Seite $KA = KF = \frac{1}{2}c$, und folglich der Inhalt $= \frac{1}{4}c^2$ seyn würde. Dieß gäbe denn für die halbe Kugelfläche, welche durch den Quadranten AF beschrieben wird, den Quadratinhalt (№ 5.)

$$S = 2\pi . \tfrac{1}{4}c^2 = \tfrac{1}{2}c^2\pi$$

wie ohnehin bekannt ist.

9. Ist bey einem vorgegebenen runden Körper die Gleichung für die beschreibende krumme Linie ALF nicht gegeben, so kann man sie doch aus einigen gemessenen Abscissen und Ordinaten sehr leicht nach einem verjüngten Maaßstabe so genau auf dem Papiere zeichnen, daß sich alsdann auch durch Ziehung von Normallinien wie LQ, L'Q' u. s. w. (die man immer mit hinlänglicher Genauigkeit bloß nach dem Augenmaaße ziehen kann) die krumme Linie

All'F'

A I I'F' so genau wird construiren lassen, als nöthig ist, ihren Quadratinhalt KAF'F etwa nach dem Verfahren (§. 44.) zu finden. Ist dann dieser gefunden, so hat man die Oberfläche des von ALF beschriebenen runden Körpers $=2\pi$.KAF'F.

10. Will man dieses Verfahren nicht anwenden, so wird doch das (§. 116. β.) angegebene, in der Ausübung immer sehr gute Dienste leisten, in welchem Falle man denn die dortigen Ordinaten, wenn sie sich an dem Körper selbst nicht bequem messen lassen, auch nach einem dem (§. 122. γ.) angegebenen ähnlichen Verfahren bestimmen kann.

Siebentes Kapitel.

Von sphäroidischen Körpern, welche entstehen wenn eine krumme Linie sich um eine Axe dreht, dabey aber ihre Gestalt ändert, jedoch so, daß die Schnitte eines solchen Körpers, senkrecht auf jene Axe, sämmtlich einander ähnlich sind.

§. 124.

Erklärung.

1. Es sey (Tab. VI. Fig. 70.) $A\alpha K$ in der Ebene AKF eine beliebige krumme Linie, sie drehe sich um FK als Axe, und ändere dabey ihre Gestalt, jedoch so, daß wenn die drehende Ebene KFA in die Lage KFC kömmt, die auf KF senkrechten Ordinaten, wie z. B. FA, fa, $\varphi\alpha$ u. d. gl. sich nunmehr in FC, fc, $\varphi\gamma$ verwandelt haben, und also die krumme Linie während ihrer Drehung um den Winkel AFC, die Gestalt $Gc\gamma K$ angenommen habe.

2. Sind nun für jeden Winkel AFC die neuen oder abgeänderten Ordinaten FC, fc, $\varphi\gamma$ u. d. gl. allemahl in dem Verhältnisse der ursprünglichen AF, af, $\alpha\varphi$, so daß

$AF : af = CF : cf$; $AF : \alpha\varphi = CF : \gamma\varphi$ oder auch $AF : CF = af : cf = \alpha\varphi : \gamma\varphi$ welche Ordinaten man auch betrachten mag, so wird die krumme Linie $Aa\alpha K$ bey der erwähnten Veränderung ihrer Gestalt, die krumme Oberfläche eines Körpers beschreiben, dessen parallele auf KF senkrechte Schnitte wie AFC, afc, $\alpha\varphi\gamma$, oder auch wie ACDE acde, $\alpha\gamma\delta\varepsilon$ durch den ganzen Körper hindurch, wie leicht zu erachten ist, vollkommen einander ähnlich seyn werden. Da diese Körper in der Ausübung öfters vorkommen, wie z. B. jede Kuppel auf einem Thurme ausweiset, so will ich sie der Kürze halber auch kuppelförmige Körper nennen, und nun Formeln für die Berechnung ihres Inhalts und ihrer Oberfläche geben.

§. 125.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt und die Oberfläche eines kuppelförmigen Körpers zu bestimmen, wenn die Gleichungen für die beschreibende krumme Linie $Aa\alpha K$ (§. 124.), und für die Grundfläche ACDE des Körpers gegeben sind.

Auflösung I.

Für den körperlichen Inhalt.

1. Man nehme die Abscissen für die krumme Linie AaK auf der Axe FK, und es seyen für dieselbe die rechtwinklichten Coordinaten Ff = x, fa = y, und die Gleichung zwischen x und y gegeben.

2. Für x = 0 sey in der Grundfläche y = FA = a, und die mit den Ordinaten fa Parallele AFD zur Abscissenlinie für die krumme Linie ACD angenommen, deren rechtwinklichte Coordinaten für jeden Punkt M, von A angerechnet, AP = t; PM = u seyen.

3. Vermöge der zwischen t und u gegebenen Gleichung kann der Quadratinhalt der ganzen Grundfläche ACDE, so wie auch eines jeden Theiles derselben z. B. AFC als bekannt angesehen werden. Ich will die veränderliche Fläche AFC = T nennen.

4. Man benenne den dieser Fläche AFC = T und der Abscisse Ff = x zugehörigen körperlichen Raum zwischen den ähnlichen Figuren afc und AFC mit Z, so hat man, wenn $\alpha\varphi\gamma$ einen Schnitt unendlich nahe bey afc vorstellet, zwischen den beyden ähnlichen Parallelschnitten afc, $\alpha\varphi\gamma$, das Differenzial von Z, ein unendlich dünnes prismatisches Scheibchen, dessen Grundfläche = afc und Höhe = fφ = dx.

5. Dem-

5. Demnach $d\mathfrak{Z} = afc.dx$. Aber wegen der Aehnlichkeit der beyden Schnitte AFC, afc ist

$$AFC : afc = AF^2 : af^2$$

d. h. $T : afc = a^2 : y^2$ (1. 2.)

oder $afc = \frac{y^2}{a^2} . T$

6. Mithin

$$d\mathfrak{Z} = \frac{T}{a^2} . y^2 dx$$

oder $\mathfrak{Z} = \frac{T}{a^2} \int y^2 dx$

wovon man das Integral so nimmt, daß es für $x = 0$ verschwindet.

Dann hat man für jedes gegebene T durch die Integration den der Abscisse $Ff = x$ entsprechenden körperlichen Raum AFCfca.

7. Verlangt man den der ganzen Grundfläche AEDC zugehörigen körperlichen Raum, für jede Abscisse $Ff = x$, so wird statt T nur die ganze Grundfläche selbst gesetzt.

8. Man gedenke sich für den Fall (7) die Figur AaK so um die Axe FK sich drehend, daß sie ihre Gestalt nicht zugleich ändert, so würde die krumme Linie AaK bloß einen runden Körper beschreiben, dergleichen im

F

I

me L

für

F

vorigen Kapitel vorkommt. Dort fanden wir für den einer jeden Abscisse x entsprechenden körperlichen Raum die Formel

$$Z = \pi \int y^2 dx$$

9. Also ist im Falle die krumme Linie zugleich ihre Gestalt ändert wie (§. 124.) der körperliche Raum des durch sie entstandenen Körpers

$$3 = \frac{T}{a^2 \pi} . Z$$

10. Man darf also den runden Körper, welcher durch die Umdrehung von AaK entstehen würde, nur mit $\frac{T}{a^2 . \pi}$ multipliciren, um den Inhalt des kuppelförmigen Körpers (1) zu erhalten.

11. Weil AFC : afc auch = $FM^2 : fm^2$ d. h. T : afc = $k^2 : z^2$ wo FM = k, und z die der Abscisse x entsprechende Ordinate der krummen Linie MmK bedeutet, so hat man auch afc = $\frac{T}{k^2} z^2$ und $3 = \frac{T}{k^2} \int z^2 dx$, folglich auf eine ähnliche Art auch

$$3 = \frac{T}{k^2 . \pi} . Z'$$

wenn

wenn Z' den körperlichen Raum des durch die krumme Linie KmM beschriebenen runden Körpers bedeutet.

12. Es kann also jede von den krummen Linien wie KaA, KmM, KcC, KdD u. d. gl. in welche sich die beschreibende KaA abändert, zur Bestimmung des körperlichen Raumes Z auf die angeführte Weise gebraucht werden, wenn nur die Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, oder x, z der erwähnten krummen Linien bekannt ist, um daraus Z oder Z' zu finden, wo denn $a^2 . \pi$, oder k^a π allemahl die kreisförmige Grundfläche des von KaA, oder KmM ꝛc. beschriebenen runden Körpers ausdrückt.

Auflösung II.

Für die Oberfläche.

13. Man führe auch durch die Axe FK zwey einander unendlich nahe Schnitte durch den Körper (1), so ist zwischen diesen Schnitten und den vorhin erwähnten Parallelschnitten, oder vielmehr zwischen den krummen Linien die diese Schnitte auf der Oberfläche des Körpers geben (nemlich MmμK, CcγK, acd, a$\gamma\delta$) ein Viereck mc$\gamma\mu$ enthalten, welches, weil $\gamma\mu$ mit cm parallel ist, sich unendlich einem Parallelogramm nähert, dessen Grundlinie = cm, und die Höhe ein von μ auf cm gefälltes Perpendikel seyn würde.

14. Ich betrachte dieß unendlich kleine Flächentheilchen $cm\gamma\mu$ erstlich als ein Element des Flächenraumes $MGcm = \mathfrak{S}'$, welcher denn, in so ferne Mm, Cc einander selbst unendlich nahe sind, auch wieder als ein Element des Flächenraumes $AaMm = S$ angesehen werden kann, und suche nun dieß kleine Parallelogramm $m\mu c\gamma$ durch Differentialien auszudrücken, um dann durch Integration den Flächenraum $MCmc$, und daraus durch eine abermahlige Integration, den Flächenraum $AMam$, für jede Abscisse $Ff = x$, und jeden Winkel AFM, den die zwey Schnitte KFM, KFA mit einander machen, zu erhalten.

15. Man nenne in der Grundfläche den der Abscisse $AP = t$, und Ordinate $PM = u$ zugehörigen Bogen $AM = s$, so ist $MC = ds$ und

$$MC : mc = MF : mf = AF : af = a : y$$

Also $mc = \frac{y}{a} . MC = \frac{y}{a} ds$.

16. Von μ fälle man auf fm das Perpendikel μn, und von n auf cm das Perpendikel $n\rho$, so ist auch $\mu\rho$ auf cm senkrecht, und des Parallelogramms $m\mu\gamma c$ (13) Höhe.

17. Man gedenke sich an M eine Tangente MT, welche die Abscissenlinie FA in T durchschneidet, und nenne den Winkel den FM mit

dieser

dieser Tangente macht, nemlich FMR $= \varphi$, so ist φ auch als der Winkel zu betrachten, den das Element MC $= ds$ mit FM macht. Weil nun fm parallel mit FM, und das Bogen-Element mc auch mit MC parallel ist, so ist auch der Winkel fmc $=$ FMC $= \varphi$, und $n\rho = nm \cdot \sin\varphi$, wo $nm =$ dem Unterschiede der beyden Ordinaten $\varphi\mu$, fm d. h. dem Differentiale der Ordinate fm gleich ist. Nun hat man FM : fm $=$ FA : fa d. h. FM : fm $= a : y$ also $fm = \frac{y}{a} \cdot FM$, mithin, in so ferne FM für den ganzen Bogen $Mm\mu K$ als constant zu betrachten ist, und sich für andere Punkte m bloß fm ändert, das Differential von fm d. h. $nm = \frac{FM}{a} dy$, und folglich

$$n\rho = nm \cdot \sin\varphi = \frac{FM \cdot \sin\varphi}{a} dy.$$

18. Demnach wegen $n\mu = f\varphi = dx$

$$\mu\rho = \sqrt{(n\mu^2 + n\rho^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{FM^2 \cdot \sin\varphi^2}{a^2} dy^2\right)}$$

und das Flächenelement $\mu m c \gamma = mc \cdot \mu\rho =$

$$d\mathfrak{S} = \frac{y}{a} ds \sqrt{\left(dx^2 + \frac{FM^2 \sin\varphi^2}{a^2} dy^2\right)} \; (15).$$

19. Weil nun ds, FM, φ, für den zwischen den krummen Linien $M\mu mK$, $Cc\gamma K$ ent-

wofür auch

$$S = \frac{dt}{a^2} \int y\, dx \sqrt{((1+p^2)a^2 + Q^2 P^2)}$$

gesetzt werden kann, weil bey dieser Integration nur y, x, P als variabel, alle übrigen Grössen aber als constante zu betrachten sind (19).

24. Integrirt man nun den gefundenen Ausdruck von neuen, so daß nur t, p, u als veränderlich, alle übrigen Grössen als constant angesehen werden, und nimmt das Integral so, daß es für t = 0 verschwindet, so hat man den von A angerechneten Flächenraum AaMm für jede Abscisse AP = t, oder Ordinate PM = u, also auch für jeden Winkel wie AFM, d. h.

$$S = \frac{1}{a^2} \int dt \int y\, dx \sqrt{((1+p^2)a^2 + Q^2 P^2)}$$

Einige Beyspiele werden den Gebrauch der gefundenen Formeln erläutern.

Berechnung einer Kuppel deren Grundfläche (z. B. bey einem Thurme) wie gewöhnlich ein reguläres Polygon, und die Seitenflächen durch Kreisquadranten begränzt werden.

§. 126.

1. Es sey das reguläre Vieleck ACBDGE (Fig. 71.) die Grundfläche einer Kuppel, K senkrecht über dem Mittelpunkte F, ihre Spitze;

KA,

KA, KC, KB u. s. w. ihre Kanten, wodurch die Seitenflächen AKC, KCB u. s. w. begränzt werden.

Es sollen KA, KC, KB Kreisquadranten seyn, deren Mittelpunkt in F falle.

Man sieht leicht, daß die körperlichen Räume über den gleichschenklichten Dreyecken AFC, CFB u. s. w. sämmtlich einander gleich sind. So auch die Seitenflächen wie AKC, CKB u. s. w. und daß jeder Schnitt wie acbd parallel mit der Grundfläche, ein der Grundfläche ähnliches Polygon geben muß.

2. Ich suche einen von den körperlichen Räumen z. B. AFCK, und eine von den Seitenflächen AKC, so hat man alle übrigen.

3. Vergleicht man den körperlichen Raum AFCK oder auch den zwischen den ähnlichen Dreyecken AFC, afc, mit der bisherigen Fig. 70, so ist der dortige Bogen AC hier eine gerade Linie AC, und die dortige krumme Linie AaK hier ein Kreisquadrant von dem Halbmesser AF = FK = a.

4. Also hat man erstlich die Gleichung zwischen Ef = x und fa = y, nemlich

$$y^2 = a^2 - x^2$$

5. Nun muß man auch in der Grundfläche die Gleichung für die gerade Linie AC haben.

enthaltenen Flächenstreifen $\mathfrak{S}$ (14) als constante Grössen zu betrachten sind, und nur x und y sich ändern, so integrire man den (18) gefundenen Ausdruck so, daß er für $x = 0$ verschwindet, so hat man, wenn $\frac{dy}{dx}$ der Kürze halber mit P bezeichnet wird

$$\mathfrak{S} = \frac{ds}{a} \int y\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{FM^2 \sin \varphi^2}{a^2} P^2\right)}$$

20. Durch diesen Ausdruck erhält man also den Flächenraum MmCc, für jede Abscisse $Ff = x$. Da nun aber dieser Flächenraum wieder als das Differential von $MAma = S$ zu betrachten ist, so hat man durch abermalige Integration, bey der denn x, y, als constante Grössen, und hingegen s, FM, φ als variabel betrachtet werden

$$S = \frac{1}{a} \int ds \int y\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{FM^2 \cdot \sin \varphi^2}{a^2} P^2\right)}$$

21. In diesem Ausdrucke ist $FM \sin \varphi =$ dem Perpendikel FQ auf die Tangente an M. Dieß Perpendikel kann man aus der Gleichung der krummen Linie AMD für jede Abscisse $AP = t$, oder Ordinate $PM = u$ berechnen.

Denn erstlich hat man für den Punkt M die Subtangente $PT = \frac{u\,dt}{du}$, und folglich

tang

$$\text{tang}\,T = \frac{PM}{PT} = \frac{du}{dt}$$

daraus $\sin T = \frac{\text{tang}\,T}{\sqrt{(1+\text{tang}\,T^2)}} =$

$\frac{du}{\sqrt{(du^2+dt^2)}} = \frac{du}{ds}$ wo s den Bogen AM bedeutet (15).

Ferner.

$FT = FP + PT = AF - AP + PT$ d. h.

$FT = a - t + \frac{udt}{du}$ und

$$FQ = FT.\sin T = \left(a - t + \frac{udt}{du}\right)\frac{du}{ds}$$

22. Man setze $\frac{du}{dt} = p$, so hat man $ds = dt\sqrt{(1+p^2)}$, wo denn sowohl p als $\sqrt{(1+p^2)}$ bloß von u oder t abhängen. Diese Werthe in den Ausdruck für das Perpendikel FQ ($= FM \sin\varphi$) substituirt geben $FM \sin\varphi$ oder $FQ = \frac{(a-t)\,p+u}{\sqrt{(1+p^2)}}$ auch eine Function von t oder u.

23. Also erhält man auch, wenn man der Kürze halber $(a-t)\,p+u = Q$ nennt $S = \frac{dt\sqrt{(1+p^2)}}{a} \int y\,dx \sqrt{\left(1 + \frac{Q^2\,P^2}{a^2\,(1+p^2)}\right)}$ wofür

wofür auch

$$\mathfrak{S} = \frac{dt}{a^2} \int y\,dx \sqrt{((1+p^2)a^2 + Q^2 P^2)}$$

gesetzt werden kann, weil bey dieser Integration nur y, x, P als variabel, alle übrigen Grössen aber als constante zu betrachten sind (19).

24. Integrirt man nun den gefundenen Ausdruck von neuen, so daß nur t, p, u als veränderlich, alle übrigen Grössen als constant angesehen werden, und nimmt das Integral so, daß es für t = o verschwindet, so hat man den von A angerechneten Flächenraum AaMm für jede Abscisse AP = t, oder Ordinate PM = u, also auch für jeden Winkel wie AFM, d. h.

$$S = \frac{1}{a^2} \int dt \int y\,dx \sqrt{((1+p^2)a^2 + Q^2 P^2)}$$

Einige Beyspiele werden den Gebrauch der gefundenen Formeln erläutern.

Berechnung einer Kuppel deren Grundfläche (z. B. bey einem Thurme) wie gewöhnlich ein reguläres Polygon, und die Seitenflächen durch Kreisquadranten begränzt werden.

§. 126.

1. Es sey das reguläre Vieleck ACBDGE (Fig. 71.) die Grundfläche einer Kuppel, K senkrecht über dem Mittelpunkte F, ihre Spitze; KA,

KA, KC, KB u. s. w. ihre Kanten, wodurch die Seitenflächen AKC, KCB u. s. w. begränzt werden.

Es sollen KA, KC, KB Kreisquadranten seyn, deren Mittelpunkt in F falle.

Man sieht leicht, daß die körperlichen Räume über den gleichschenklichten Dreyecken AFC, CFB u. s. w. sämmtlich einander gleich sind. So auch die Seitenflächen wie AKC, CKB u. s. w. und daß jeder Schnitt wie acbd parallel mit der Grundfläche, ein der Grundfläche ähnliches Polygon geben muß.

2. Ich suche einen von den körperlichen Räumen z. B. AFCK, und eine von den Seitenflächen AKC, so hat man alle übrigen.

3. Vergleicht man den körperlichen Raum AFCK oder auch den zwischen den ähnlichen Dreyecken AFC, afc, mit der bisherigen Fig. 70, so ist der dortige Bogen AC hier eine gerade Linie AC, und die dortige krumme Linie AaK hier ein Kreisquadrant von dem Halbmesser AF = FK = a.

4. Also hat man erstlich die Gleichung zwischen Ef = x und fa = y, nemlich

$$y^2 = a^2 - x^2$$

5. Nun muß man auch in der Grundfläche die Gleichung für die gerade Linie AC haben.

Es seyen also für einen unbestimmten Punkt M derselben, die senkrechten Coordinaten, wie bisher AP = t, PM = u.

Der Centriwinkel AFC des Polygons = α so hat man FAC = FCA = $90^0 - \frac{1}{2}\alpha$, und $u = t \cot \frac{1}{2}\alpha$, welches also die verlangte Gleichung wäre.

6. Hieraus in der allgemeinen Formel (§. 125. 9.) T = dem Flächenraume des Dreyecks AFC = $\frac{1}{2}$ CN . AF (wenn CN senkrecht auf AF) = $\frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$, weil CN = $a \sin \alpha$ und AF = a.

Demnach

$$3 = \frac{T}{a^2} \int y^2 dx = \frac{1}{2} \sin \alpha \int dx (a^2 - x^2)$$

d. h.

$$3 = \frac{1}{2} a^2 x \sin \alpha - \frac{x^3}{6} \sin \alpha$$

wozu keine Const zu addiren ist.

7. Verlangt man also den ganzen körperlichen Raum AFCK, so setzt man x = a; dann wird derselbe = $\frac{1}{3} a^3 \sin \alpha$.

Für ein reguläres Sechseck wäre z. B. $\alpha = 60^0$. Also $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, folglich der körperliche Raum über AFC = $\frac{1}{6} a^3 \sqrt{3}$ und der Inhalt der ganzen Kuppel = $a^3 \sqrt{3}$.

8. Für

8. Für eine der Seitenflächen wie AKC hat man in der allgemeinen Formel (§. 125. 24.)

$$P = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ (§. 125. 19.)}$$

$p = \frac{du}{dt} = \cot\frac{1}{2}\alpha$ (4) und (§. 125. 22.)

$1 + p^2 = 1 + \cot\frac{1}{2}\alpha^2 = \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha^2$; und

$Q = (a - t)p + u = a\cot\frac{1}{2}\alpha$ (5).

9. Demnach, diese Werthe in (§. 125. 23.) substituirt, das Flächenelement $S =$

$$\frac{dt}{a^2}\int y dx \sqrt{\left(a^2 \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{a^2\cot\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}{y^2}\right)}$$

$$= \frac{dt}{a^2}\int dx \sqrt{(a^2 \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha^2 y^2 + a^2\cot\frac{1}{2}\alpha^2 x^2)}$$

Oder $a^2 - x^2$ statt y^2 gesetzt, nach gehöriger Rechnung

$$S = \frac{dt}{a}\int dx \sqrt{(a^2 \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha^2 - x^2)}$$

d. h. nach (Integralf. XV. XVI. 8.)

$$S = \frac{dt}{a}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}x\sqrt{(a^2\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha^2 - x^2)} \\ + \frac{1}{2}a^2\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha^2\,\mathfrak{B}\sin\frac{x}{a\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha}\end{array}\right\}$$

Setzt man hierin $x =$ der ganzen Höhe der Kuppel $= a$, so wird dieß Integral für die ganze Höhe

$$= \frac{dt}{a} \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} a^2 \cot \frac{1}{2}\alpha \\ + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha^2 \, \mathfrak{B} \sin \frac{1}{\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha} \end{matrix} \right]$$

Man nenne

$$\mathfrak{B} \sin \frac{1}{\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha} = \beta, \text{ so ist}$$

$$\frac{1}{\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha} = \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sin \beta; \text{ also } \beta = \tfrac{1}{2}\alpha$$

Demnach das Integral oder der Werth von S für die ganze Höhe der Kuppel = $\frac{1}{2} a\, dt (\cot \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha^2)$.

Wird dieß wieder integrirt, so daß es für $t = 0$ verschwindet (§. 125. 24.) so ist

$$S = \frac{at}{2} (\cot \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha^2)$$

10. Hieraus die ganze Fläche AKC zu erhalten, muß man in der Grundfläche den Werth t der Abscisse $= AN = a - FN = a - a \cos \alpha = a(1 - \cos \alpha) = 2 a \sin \frac{1}{2}\alpha^2$ setzen. Dieß giebt denn eine Seitenfläche wie $AKC = a^2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 (\cot \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha^2) = a^2 (\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2} a^2 (\sin \alpha + \alpha)$.

11. Ist z. B. die Grundfläche ein reguläres Sechseck, so hat man

$\alpha =$

$\alpha = 60^\circ = 1{,}0471975$ in Decimaltheilen des
$\sin\alpha = 0{,}8660254$ Halbmessers

$1{,}9132229$

davon die Hälfte $= 0{,}95661145$; also eine Seitenfläche $= a^2 . 0{,}95661145$, und wenn man das sechsfache hievon nimmt, die ganze Oberfläche der Kuppel $= a^2 . 5{,}7396687$.

12. Man sieht leicht, daß sobald die Grundfläche ein reguläres Polygon ist, für jede Seitenfläche der Kuppel folgende allgemeine Formel statt finden muß S=

$$\frac{1}{a^2}\int dt \int y\,dx \sqrt{(a^2 \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha^2 + a^2 \cot \tfrac{1}{2}\alpha^2 P^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{a} \int y\,dx \sqrt{(\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \cot \tfrac{1}{2}\alpha^2 P^2)}$$

$$= \frac{t}{a} \int y\,dx \sqrt{(\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \cot \tfrac{1}{2}\alpha^2 P^2)}$$

weil hinter dem Wurzelzeichen alles nur von y und x abhängt. Nimmt man nun für die ganze Seitenfläche AKC, $t = 2a \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2$ (10) und setzt nach geschehener Integration $x = FK =$ der Höhe der Kuppel, so erhält man für die Seitenfläche AKC den Ausdruck

$$2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2 \int y\,dx \sqrt{(\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \cot \tfrac{1}{2}\alpha^2 P^2)}$$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \int y\,dx \sqrt{(1 + \cot \tfrac{1}{2}\alpha^2 P^2)}.$$

$$=\frac{dt}{a}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}a^2 \cot\frac{1}{2}\alpha \\ +\frac{1}{2}a^2 \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha^2\, \mathfrak{B} \ldots\end{array}\right.$$

... und- ...trum- dessen ... $= k$,

Man nenne

$$\mathfrak{B}\sin \frac{1}{\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha} = \ldots$$

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha} = \ldots$$

... und x ist, ... aber mit h be-

Demnach ... $(r^2 - x^2)$ ... $\mathfrak{S}$ für die ... wenn man das dortige $c =$ $\frac{1}{2} a\, d t (\cot$ ...

... also erstlich für den körperlichen ...um über dem Dreyecke $AFC = T$

$t = \ldots$

$$\mathfrak{Z} = \frac{T}{k^2}\int y^2\, dx$$

weil in (§. 125. 9.) das dortige a jetzt $= k$ heißt.

3. Nun $y^2 = b^2 - 2b\sqrt{(r^2 - x^2)} + r^2 - x^2$

$$\int y^2 dx = (b^2 + r^2)x - \frac{x^3}{3} - 2b\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

$$= (b^2 + r^2)x - \frac{x^3}{3} - bx\sqrt{(r^2 - x^2)} - r^2 b\, \mathfrak{B}\sin\frac{x}{r}$$

wozu keine Const. zu addiren ist.

4. Setzt man nun $x = FK = h$, so wird der Inhalt über dem Dreyecke AFC durch den Ausdruck

T

$-h^3 \ldots hh \sqrt{(r^2 - h^2)} - r^2 h \ldots$

$v = 0$, demnach zufolge

... der Wurzelgröße in den

und zugleich $D = \frac{1}{2} k^2 \sin\alpha$

so wird der Inhalt (4) =

$\sin\alpha \left((r^2 - \frac{1}{3} h^2) h - r^2 (r - R) \ldots \right)$

welches denn noch mit der Anzahl der Seiten des Polygons ACBDGE multiplicirt werden muß, um den körperlichen Inhalt der ganzen Kuppel zu erhalten.

6. Für eine der Seitenflächen der Kuppel wie AKG, ist

$\frac{dy}{p}$ ... für eine Abscisse ... $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ ... und die Formel (§. 26. ...)

$\int y\,dx$ ... nach gehöriger Rechnung =

$$\int dx \sqrt{(r^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 x^2)} - h \int \frac{dx \sqrt{(r^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2 x^2)}}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

Berechnung einer Kuppel, wenn die Grundfläche ein reguläres Polygon, und die krumme Linie AaK ein Kreisbogen ist, dessen Sinus = FK = h und Quersinus AF = k, der Halbmesser = r ist.

§. 127.

1. Die Gleichung zwischen y und x ist, wenn man r — k der Kürze halber mit b bezeichnet

$$y = -b + \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

aus (§. 117. 3.) wenn man das dortige c = a = 2r setzt.

2. Also erstlich für den körperlichen Raum über dem Dreyecke AFC = T

$$z = \frac{T}{k^2} \int y^2 dx$$

weil in (§. 125. 9.) das dortige a jetzt = k heißt.

3. Nun $y^2 = b^2 - 2b\sqrt{(r^2 - x^2)} + r^2 - x^2$

$$\int y^2 dx = (b^2 + r^2)x - \frac{x^3}{3} - 2b \int dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

$$= (b^2 + r^2)x - \frac{x^3}{3} - bx\sqrt{(r^2 - x^2)} - r^2 b \operatorname{Arc\,Sin} \frac{x}{r}$$

wozu keine Const. zu addiren ist.

4. Setzt man nun x = FK = h, so wird der Inhalt über dem Dreyecke AFC durch den Ausdruck

T

$\frac{1}{r^2}\left((h^2 - \ldots)h - \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{2}h\sqrt{(r^2-h^2)} - r^2 b \,\text{Bog.}\sin\frac{h}{r}\right)$ bestimmt.

5. Für $x = h$ ist $y = b$, demnach zufolge der Gleichung (1)

$$0 = -b + \sqrt{(r^2-h^2)}$$

d. h. $\sqrt{(r^2-h^2)} = b$.

Man setze dieß statt der Wurzelgröße in den Ausdruck (4) und zugleich $P = \frac{1}{2}k^2 \sin\alpha$ (§. 126. 6.) so wird der Inhalt (4) =

$$\frac{k^2}{r^2}\sin\alpha\left((r^2 - \frac{1}{3}h^2)h - r^2 b\,\text{Bog.}\sin\frac{h}{r}\right)$$

welches denn noch mit der Anzahl der Seiten des Polygons ACBDGE multiplicirt werden muß, um den **körperlichen Inhalt** der **ganzen Kuppel** zu erhalten.

6. **Für eine der Seitenflächen** der Kuppel wie AKG ist

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$$

und in der Formel (§. 126. 12.)

$\int y\,dx\sqrt{(1 + \cos\frac{1}{2}\alpha^2 p^2)}$ nach gehöriger Rechnung =

$$\int dx\sqrt{(r^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2 x^2)} - b\int\frac{dx\sqrt{(r^2-\sin\frac{1}{2}\alpha^2 x^2)}}{\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

7. Man

7. Man sieht leicht, daß hier nur der erste Theil des Integrals sich genau darstellen läßt, daß aber der zweyte negative Theil sich entweder nur durch eine unendliche Reihe integriren, oder auf einen elliptischen Bogen reduciren läßt. Vergleicht man nemlich die hinter dem Integralzeichen befindliche Formel, mit derjenigen, welche wir oben für einen elliptischen Bogen gefunden haben (§. 57. 1.) d. h. mit

$$\frac{dx\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2-c^2}{a^2}x^2)}}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}}$$

worauf sich jene (6) leicht bringen läßt, so hat man $r^2 = \frac{1}{4}a^2$; also $r = \frac{1}{2}a$, oder $a = 2r$, und $\frac{a^2-c^2}{a^2} = \sin\frac{1}{2}\alpha^2$; demnach $c = a\cos\frac{1}{2}\alpha = 2r\cos\frac{1}{2}\alpha$.

8. Man sieht demnach, daß die Integralformel $\int\frac{dx\sqrt{(r^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2 x^2)}}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ einem elliptischen Bogen gleich ist, den man für eine Abscisse $= x$, die auf der großen Axe zu nehmen ist, berechnen muß, und daß die große Axe dieser Ellipse oder $a = 2r$, und die kleine Axe $c = 2r\cos\frac{1}{2}\alpha$ seyn muß.

9. Ohne indessen diesen elliptischen Bogen durch unmittelbare Rechnung wie oben

§§.

§§. [illegible] gelehret worden, für den Werth von $x = FK = h$ zu bestimmen, wird man leicht finden, daß er auch die Länge des Bogens KmM bezeichnet, welcher auf der Seitenfläche KAC vermittelst eines durch die Axe FK und durch die auf AC senkrechte Linie FM gelegten Schnittes KEM entstehen würde.

Man nenne für jede Abscisse $Ff = x$, die Ordinate fm des Schnittes $KmM = z$, und den Bogen $Mm = \sigma$, so hat man $d\sigma = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$.

Aber ist aber $z = fa \,.\, \cos afm = fa \,.\, \cos AFM = y \cos \frac{1}{2}\alpha$, also

$$dz^2 = dy^2 \cos \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{x^2 dx^2}{r^2 - x^2} \cos \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$ und

$$d\sigma = \frac{dx \sqrt{(r^2 - x^2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2)}}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$ d. h. der zweyte Theil des Integrals (6) bezeichnet den Bogen $Mm = \sigma$; Nimmt man also dieß Integral für $x = FK = h$, so bedeutet σ den Bogen MmK.

Da nun der erste Theil des Integrals (6) nemlich

$$\int dx \sqrt{(r^2 - x^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2)} = \tfrac{1}{2}x \sqrt{(r^2 - x^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2)} + \frac{r^2}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha} \mathfrak{B} \sin \frac{x \sin \frac{1}{2}\alpha}{r}$$

für $x = h$ den Werth

[illegible] für den [illegible]

$h\sqrt{(r^2 - h^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2)} + \frac{[illegible]}{2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha} \mathrm{B}\sin \frac{[illegible]}{r}$

erhält, so hat man wegen der mit $2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha$ in (§. 126, 12.) vorzunehmenden Multiplication für die Fläche AKC den Ausdruck

$h \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{(r^2 - h^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2)} + r^2 \mathrm{B}\sin \frac{h \sin \tfrac{1}{2}\alpha}{r}$

[illegible] für jede [illegible] also wenn man [illegible]

$\frac{h \sin \tfrac{1}{2}\alpha}{r} = \sin \beta$ setzt, nach gehöriger Rechnung die Fläche AKC = MHA [illegible]

$\tfrac{1}{2}r^2 (\sin 2\beta + 2\beta) - 2 h \cos \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\alpha$

10. Kann man also den Bogen KmM etwa unmittelbar messen, so hat man nicht nöthig ihn nach (8. 9.) selbst zu berechnen.

11. Ist der Halbmesser r nicht gegeben, so kann man ihn aus FK = h und FA = k berechnen, denn man hat (5)

$\sqrt{(r^2 - h^2)} = b = r - k$ (1)

Also $r^2 - h^2 = (r - k)^2 = r^2 - 2rk + k^2$

Demnach $r = \frac{h^2 + k^2}{2k}$

§. 128.

Aufgabe.

Die Oberfläche einer Eben-Kuppel, deren Grundfläche ein reguläres Polygon ist, auf die Oberfläche eines runden Körpers zu bringen.

Aufl. 1. Wenn n die Anzahl der Seiten des regulären Polygons ist, so hat man für die Oberfläche der Kuppel, welche ich jetzt mit S bezeichnen will, die Formel

$$S = 2n \sin \tfrac{1}{2}\alpha \int y dx \sqrt{\left(1 + \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha^2 \cdot dy^2}{dx^2}\right)}$$

(§. 126. 12.)

2. Nun ist für jede Abscisse x in der krummen Linie KmM (§. 127.) die Ordinate $z = y \cos \frac{1}{2}\alpha$, also $y = \frac{z}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$ und $\frac{dz}{dx} = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \cdot dy}{dx}$ demnach

$$S = \frac{2n \sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \int z dx \sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)}$$

$$= 2n \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \int z d\sigma,$$

wenn σ den Bogen Mm bedeutet.

3. Man gedenke sich nun die krumme Linie KmM um die Axe FK sich drehend, so daß sie

sie einen runden Körper beschreiben würde, dessen Oberfläche ich mit S' bezeichnen will, so ist

$$S' = 2\pi \int z\, d\sigma \text{ (§. 113. 4.)}$$

Demnach $\frac{S'}{2\pi} = \int z\, d\sigma$

3. Folglich (2) die Oberfläche der Kuppel

$$S = \frac{n \tan \frac{1}{2}\alpha}{\pi} \cdot S'$$

4. Man darf also nur die Oberfläche des durch MmK beschriebenen runden Körpers mit $\frac{n \tan \frac{1}{2}\alpha}{\pi}$ multipliciren, um die Oberfläche der Kuppel zu erhalten.

5. Die Gleichung für die krumme Linie MmK ergiebt sich denn in jedem Falle leicht aus derjenigen für die krumme Linie AaK, wodurch die einzeln Seitenflächen der Kuppel begränzt werden, wenn man in die leztere nur $\frac{z}{\cos \frac{1}{2}\alpha}$ statt y setzt (2).

6. Da nun im vorhergehenden Kapitel umständlich von den Oberflächen runder Körper gehandelt worden ist, so können die dortigen Vorschriften ohne Mühe und mit der gehörigen Veränderung (3) auch auf alle Kuppeln, deren Grund-

Grundflächen reguläre Vielecke sind, angewandt werden.

In der Ausübung sind A a K gewöhnlich Kreisbogen, bald ein- bald auswärts gekrümmt, in welchem Falle denn M m K eine elliptische Krümmung erhalten wird.

§. 129.

Anmerkung.

1. Weil in der allgemeinen Formel für die Oberfläche der im gegenwärtigen Kapitel betrachteten Körper nemlich (§. 125. 20.)

$$S = \frac{1}{a} \int ds \int y dx \sqrt{\left(1 + \frac{FM^2 \sin\varphi^2}{a^2} p^2\right)}$$

der Ausdruck FM $\sin\varphi$ oder $\frac{(a-t)\,p + u}{\sqrt{(1+p^2)}}$

(§. 125. 22.) das Perpendikel von F (Fig. 70) auf die Tangente an jedem Punkt M des Umfangs der Grundfläche bedeutet (a. a. O.) so erhellet, daß wenn die krumme Linie AM entweder ein aus dem Mittelpunkte F beschriebener Kreisbogen wie bey runden Körpern (§. 112.) oder auch eine gerade Linie wie in dem Beyspiele (§§. 126. und 127.) ist, der Werth dieses Perpendikels allemahl einer beständigen Grösse gleich seyn, d. h. weder von t noch u abhängen wird.

2. In

[illegible] ist also das Integral

$$\int y\,dx\,\sqrt{\left(1+\frac{FM^2 \sin\varphi^2}{a^2}\,p^2\right)}$$

blos von y oder x abhängig, und enthält also nach der Integration weder die Grösse t noch u.

3. Folglich wird dann schlechtweg

$$S=\frac{R\,.\,s}{a}$$

wenn R das Integral (2) bedeutet, wo denn $s=\int dt\,\sqrt{(1+p^2)}$ erst von t oder u abhängt.

4. Wenn aber FM sin φ oder in (1) $\frac{(a-t)p+u}{\sqrt{(1+p^2)}}$ nicht für jeden Punkt M der krummen Linie AM einerley Werth hat, sondern auch von t oder u abhängt, so wird auch R die Grössen t oder u enthalten, und dann läßt sich das Integral (1)

$$S=\frac{1}{a}\int R\,ds$$

nicht mehr geradezu durch $\frac{R\,.\,s}{a}$ ausdrücken, sondern man muß dann R durch t, und ds durch dt ausdrücken, und das Integral suchen, welches denn in den meisten Fällen ziemlich verwickelt ausfallen wird.

5. In

5. In Fällen, wo das Perpendikel FQ = FM sin φ sich mit der Absciſſe AP oder t nicht sehr stark ändert, wie wenn z. B. die Grundfläche eine von einem Kreise nicht sehr abweichende Ellipse wäre, läßt sich das Perpendikel FM sin φ, oder auch die Größe $\frac{FM^2 \sin\varphi^2}{a^2}$ beynahe durch A + B . ψ t ausdrücken, wo A eine von t nicht abhängige unveränderliche Größe, B eine kleine Größe ebenfalls von t unabhängig, ψ t aber eine Function von t bedeutet, welche sich aus der Gleichung für die krumme Linie AM finden läßt.

In diesem Falle läßt sich also

$$\sqrt{\left(1+\frac{FM^2 \sin\varphi^2 . P^2}{a^2}\right)} = \sqrt{(1+A.P^2 + B.\psi t.P^2)} = \sqrt{(1+A.P^2)} \times \sqrt{\left(1+\frac{B.\psi t}{1+A.P^2}P^2\right)}$$

beynahe durch

$$\sqrt{(1+A.P^2)}.\left[1+\frac{B.\psi t}{2(1+A.P^2)}P^2\right]$$

d. h. durch $\sqrt{(1+A.P^2)}+\frac{B.\psi t.P^2}{2\sqrt{(1+A.P^2)}}$

ausdrücken; weil B eine sehr kleine Größe bezeichnen soll.

6. Dieß

6. Dieß giebt demnach

$$S = \int \frac{ds}{a} \int y\, dx \sqrt{(1 + A . P^2)}$$

$$+ \int \frac{ds}{a} \int \frac{y\, d x . B . \psi t . P^2}{2\sqrt{(1 + A . P^2)}}$$

d. h. wenn man zuerst so integrirt, daß bloß y oder x als veränderlich angesehen werden, wo denn P ebenfalls von x oder y abhängt

$$S = \int \frac{\mathfrak{X} ds}{a} + \int \frac{ds . B . \psi t}{2a} . \mathfrak{X}'$$

wenn das Integral $\int y\, dx \sqrt{(1 + AP^2)} = \mathfrak{X}$

und $\int \frac{y P^2 dx}{\sqrt{(1 + AP^2)}} = \mathfrak{X}'$ der Kürze halber gesetzt werden.

7. Weil nun bey der zweyten Integration (4) nur die von t abhängigen Größen, also s und ψt als veränderlich angesehen werden, die Integrale $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ aber bloß von x oder y abhängig sind, so erhält man

$$S = \frac{\mathfrak{X} . s}{a} + \frac{B \mathfrak{X}'}{2a} \int \psi t . ds$$

Den Gebrauch dieser Formel werde ich in der folgenden Aufgabe erläutern.

§. 130.

§. 130.

Aufgabe.

Die Grundfläche ACDE eines kuppelförmigen Körpers (Fig. 70.) sey eine Ellipse, und der beschreibende Bogen AaK ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt L in die große Axe AD der Ellipse falle. Man verlangt des Körpers Inhalt und Oberfläche.

Aufl. 1. Es sey die halbe große Axe der Ellipse nemlich AE $= \alpha$, die halbe kleine $= \gamma$, der Halbmesser LA des Bogens AaK $= r$, und der Abstand LF der beyden Mittelpunkte F, L $= b = r - \alpha$, die Höhe FK des Bogens Aak $= h$, so ist des Körpers Inhalt

$$\mathfrak{J} = \frac{T}{\alpha^2 \pi} \cdot Z$$

wenn T die Grundfläche, und Z den Inhalt eines von dem Kreisbogen Aak, oder von einem beliebigen Theile Aa desselben, beschriebenen runden Körpers bedeutet (§. 125. 9.)

2. Nun ist aber $T = \alpha \cdot \gamma \cdot \pi$ (§. 40. 6.) wenn das dortige $a = 2\alpha$; $c = 2\gamma$ gesetzt wird.

3. Und für jede Abscisse Ff $= x$ (§. 117. 9.)

$$Z = \pi x (b^2 + r^2 - \tfrac{1}{3} x^2 + b\surd(r^2 - x^2)) - \pi b r^2 \, \mathfrak{B}\sin \frac{x}{r}$$

 wofür

wofür wegen $y = -b + \sqrt{(r^2 - x^2)}$ (§. 117. 3.) auch

$$Z = \pi x (r^2 - \tfrac{1}{3}x^2 - by) - \pi b r^2 \mathfrak{B} \sin \frac{x}{r}$$

gesetzt werden kann.

4. Substituirt man also in (1) die gefundenen Werthe von T und Z, so erhält man für jede Abscisse x den körperlichen Raum

$$\mathfrak{Z} = \frac{\pi x \gamma}{\alpha}(r^2 - \tfrac{1}{3}x^2 - by) - \frac{\pi b r^2 \gamma}{\alpha} \mathfrak{B} \sin \frac{x}{r}$$

Also für den ganzen Körper AKD, für welchen $x = FK = h$, und $y = 0$ zu setzen ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{\pi\gamma}{\alpha}\left(h(r^2 - \tfrac{1}{3}h^2) - br^2 \mathfrak{B} \sin \frac{h}{r}\right).$$

5. Für die Oberfläche des Körpers AKD, würde eine sehr verwickelte Formel zum Vorschein kommen. Ich will aber annehmen, daß die Ellipse ACDE nicht viel von einem Kreise abweiche, in welchem Falle denn $\alpha - \gamma$ eine kleine Grösse bezeichnet, und das Verfahren (§. 129. 5. 6.) angewandt werden kann.

6. Zufolge dessen hat man also erstlich den Werth von $\frac{FM^2 \sin \varphi^2}{\alpha^2}$ oder von $\frac{((\alpha - t)p + u)^2}{\alpha^2(1 + p^2)}$ (§. 129. 4.) zu berechnen, um daraus die [illegible]n ψt (§. 129. 5.) abzuleiten.

7. Nun

7. Nun ist wegen der Gleichung der Ellipse, nemlich

$$u^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(2\alpha t - t^2) \text{ (§. 67. 1.)}$$

$$p = \frac{du}{dt} = \frac{\gamma(\alpha - t)}{\alpha\sqrt{(2\alpha t - t^2)}}$$

8. Dieß giebt nach gehöriger Rechnung

$u + (\alpha - t)p = \dfrac{\alpha\gamma}{\sqrt{(2\alpha t - t^2)}}$ wovon das Quadrat $= \dfrac{\alpha^2\gamma^2}{2\alpha t - t^2}$.

9. Ferner

$$\alpha^2(1 + p^2) = \frac{\alpha^2\gamma^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)(2\alpha t - t^2)}{2\alpha t - t^2}$$

10. Demnach

$$\frac{(u + (\alpha - t)p)^2}{\alpha^2(1 + p^2)} = \frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2\gamma^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)(2\alpha t - t^2)}$$

wofür $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2\gamma^2}(2\alpha t - t^2)}$, und weil $\alpha - \gamma$ sehr klein ist, ohne merklichen Irrthum gesetzt werden kann $1 - \dfrac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2\gamma^2}(2\alpha t - t^2)$

11.

wenn nemlich das Integral für $t = 0$ verschwinden soll, wie sich gehört, und eben so $\int dt\,.\,\psi t = \int dt\sqrt{(2\alpha t - t^2)} = \frac{1}{2}(t - \alpha)\sqrt{(2\alpha t - t^2)} + \frac{1}{2}\alpha^2\,\mathfrak{B}\sin\frac{\sqrt{(2\alpha t - t^2)}}{\alpha}$

18. Für einen Quadranten in dem elliptischen Umfang der Grundfläche setzt man in diese Integrale (17) $t = \alpha$, so wird das erste $= \mathfrak{B}\cos 0 = \frac{1}{2}\pi$, und das zweyte $= \frac{1}{2}\alpha^2\,\mathfrak{B}\sin 1 = \frac{1}{2}\alpha^2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\alpha^2\pi$. Also wird der elliptische Quadrant nach (16) $= \frac{1}{2}\gamma\pi - \frac{\gamma B}{2}\cdot\frac{1}{4}\alpha^2\pi$, folglich der ganze Umfang der Ellipse $= 2\gamma\pi - \frac{\gamma B}{2}\cdot\alpha^2\pi = 2\gamma\pi + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\gamma}\pi = \frac{3\gamma^2 + \alpha^2}{2\gamma}\pi$. Dieß ist demnach statt s in dem Ausdrucke für S (§. 129. 7.) zu substituiren, wenn S die ganze Oberfläche des Körpers seyn soll. Also erhält man in diesem Ausdrucke den ersten Theil $\frac{\mathfrak{T}}{\alpha}.s = \mathfrak{T}.\frac{3\gamma^2 + \alpha^2}{2\alpha\gamma}.\pi$

19. Endlich ist nun auch in dem zweyten Theile von S das Integral $\int \psi t\,.\,ds$ zu suchen. Nun hat man aber aus (16)

$$ds = \frac{dt}{\sqrt{\psi t}} - \frac{\gamma B}{2}\,dt\sqrt{\psi t}$$

also

also mit ψt multiplicirt

$$\int\psi t.\,ds = \gamma\int dt\sqrt{\psi t} - \frac{\gamma B}{2}\int dt.\,\psi t.\sqrt{\psi t}$$

und in dem Ausdrucke für S (§. 129. 7.)

$$\frac{B\mathfrak{X}}{2\alpha}\int\psi t.\,ds = \frac{B\mathfrak{X}}{2\alpha}\gamma\int dt\sqrt{\psi t} - \frac{\gamma\mathfrak{X}B^2}{4\alpha}\int dt.\,\psi t\sqrt{\psi t}$$

Weil nun in dem zweyten Gliede dieses Integrals der Coefficient B^2 vorkommt, so kann man wegen des geringen Werthes desselben das zweyte Glied weglassen, und beynahe setzen

$$\frac{B\mathfrak{X}}{2\alpha}\int\psi t.\,ds = \frac{B\mathfrak{X}}{2\alpha}\gamma\int dt\sqrt{\psi t}$$

Aber $\int dt\sqrt{\psi t} = \int dt\sqrt{(2\alpha t - t^2)}$; und da dieß Integral schon in (17) vorkam, so hat man den Werth desselben für einen Quadranten der Grundfläche $= \frac{1}{4}\alpha^2\pi$, folglich für die ganze Grundfläche $= \alpha^2\pi$. Also

$$\frac{B\mathfrak{X}}{2\alpha}\int\psi t.\,ds = \frac{B\mathfrak{X}\gamma}{2\alpha}\alpha^2\pi = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\gamma}\ldots$$

wenn man statt B seinen Werth (16) setzt.

Dieß giebt demnach für den ganzen Körper die krumme Oberfläche den Ausdruck

$$S = \mathfrak{X} \cdot \frac{3\gamma^2 + \alpha^2}{\sqrt{2\alpha\gamma}} \pi - \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\sqrt{2\alpha\gamma}} \mathfrak{X}' \cdot \pi$$

$$= \pi \frac{(3\gamma^2 + \alpha^2)\mathfrak{X} - (\alpha^2 - \gamma^2)\mathfrak{X}'}{\sqrt{2\alpha\gamma}}$$

wo denn statt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, die oben gefundenen Werthe (13. 15.) zu substituiren sind.

22. Man sieht hieraus, daß selbst für den Fall, wenn die Grundfläche nur wenig von einem Kreise abweicht, die Bestimmung der Oberfläche des Körpers schon beschwerlich fällt, und also um so mehr mit Schwierigkeiten verknüpft seyn würde, wenn die Grundfläche einem Kreise weniger nahe käme.

23. Ist die Grundfläche ein Kreis, also $\alpha = \gamma$ und zugleich $b = 0$, so verwandelt sich der bisherige Körper in eine Halbkugel, und es würde die Oberfläche derselben

$$\frac{\pi(3\alpha^2 + \alpha^2)}{2\alpha}\mathfrak{X} = 2\alpha\pi\mathfrak{X} = 2\pi r^2$$

weil in (13) zugleich $h = r$ seyn würde; die bekannte Formel für die Oberfläche einer Halbkugel, deren Halbmesser $= r$.

24. Da von Körpern, dergleichen wir in diesem und dem vorhergehenden Kapitel betrachtet haben, unterweilen Abschnitte zu berechnen vorkommen, so habe ich für dienlich erachtet, auch die folgende Aufgabe beyzufügen.

§. 121.

Aufgabe.

Ueber der Grundfläche AMND (Fig. 72.) befinde sich ein Körper AKD, dessen Schnitte, wie amnd, mit der Grundfläche parallel, sämmtlich einander ähnlich seyen, und FK sey die auf der Grundfläche senkrechte Axe, um welche sich die den Körper erzeugende krumme Linie Aak drehet, wie solches (§. 124.) umständlicher erläutert worden ist. Parallel mit der Axe FK, werde ein Schnitt MKN durch den Körper geführet, welcher die Grundfläche in MN, und den damit parallelen Schnitt amnd in mn schneide. Man verlangt den körperlichen Raum zwischen den beyden Segmenten NAM und nam.

Aufl. 1. Man nenne die Fläche des mit der Höhe Ff = x veränderlichen Schnittes nam = T, und gedenke sich nun in der Höhe x + dx einen zweyten Schnitt mit der Grundfläche parallel, so ist zwischen beyden einander unendlich nahen Schnitten, ein dünnes Scheibchen des körperlichen Raumes AMNamn enthalten, welches sich ohne Ende einem pris-

 mati-

matischen Scheibchen nähert, dessen Grundfläche = nam = T und Höhe = dx.

2. Nennt man also den körperlichen Raum zwischen NAM und nam = Z, so hat man

$dZ = Tdx$

und $Z = \int T dx$, wo das Integral so genommen werden muß, daß es für $x = 0$ verschwindet.

3. In dieser zu integrirenden Differentialformel wird nun T eine Function von x seyn. Denn wenn die Ebene der erzeugenden krummen Linie Aak, die beyden Parallelschnitte AMDN, amdn in AD und ad schneidet, so hat man vermöge der gegebenen krummen Linie AaK, die Gleichung zwischen Ef = x und fa = y, und aus der Gleichung der Grundfläche auch die Gleichung der der Grundfläche ähnlichen Schnittfläche amd, wenn man statt der beständigen Linien, welche in der Gleichung für die Grundfläche vorkommen, und welche α, β, γ u. s. w. heißen mögen, nur überall $\frac{y.\alpha}{EA}$, $\frac{y.\beta}{FA}$, $\frac{y.\gamma}{FA}$ u. s. w. und statt der Coordinaten AB = t und BM = u, die Coordinaten ab = τ und bm = υ setzt.

4. Aus der Gleichung zwischen υ und τ erhält man also erstlich den Flächenraum nam = T

$= T$, als eine Function von ab oder x; Setzt man nun in diese Function statt x den Werth $af - fb = y - f$, wo $f = FB = fb$ den Abstand der Schnittfläche NkM von der Axe FK bedeutet, so hat man T ausgedrückt durch y, und kann folglich T auch durch x ausdrücken, weil y durch x gegeben ist. Dieß giebt denn endlich durch die Integration den Werth von $Z = \int T\,dx$. Ein Beyspiel wird die Sache am besten erläutern.

Beyspiel.

5. Es sey die Grundfläche ein Kreis von dem Halbmesser $FA = \alpha$, und die krumme Linie AaK ein Kreisbogen von dem Halbmesser $CA = Ca = r$, so ist die Gleichung der Grundfläche zwischen $AB = t$ und $BM = u$

(1) $u^2 = 2\alpha t - t^2$

und wenn man $CF = b$ setzt, die Gleichung zwischen $Ff = x$ und $fa = y$

$$y = -b + \sqrt{(r^2 - x^2)} \quad (§. 130. 3.)$$

wie man auch leicht aus dem rechtwinklichten Dreyecke Cca findet, wenn man Cc parallel mit Ff ziehet.

6. Man setze nun in die Gleichung zwischen u und t die beständige Grösse $\alpha = \frac{y}{\alpha} . \alpha$ (3) $= y$, und statt der veränderlichen t, u; die

Coor=

...naaten t, v, so hat man für die Gleichung ... Schnittfläche amd

$$v^2 = 2y\,t - t^2$$

ebenfalls ein Kreis, nur daß der Halbmesser jezt $= y$ ist, und dieser so lange als eine unveränderliche Grösse betrachtet werden muß, als man t und u als veränderlich behandelt.

7. Nun erhält man erstlich nach der bekannten Formel für die Quadratur der krummen Linien, für die Fläche des Kreissegments nam oder 2. abm den Ausdruck

$$T = 2\int u\,dt = 2\int dt\sqrt{(2yt - t^2)}$$

d. h. durch Integration

$$= (t - y)\sqrt{(2yt - t^2)} + y^2 \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(2yt - t^2)}}{y}$$

Sezt man nun hierin $t = ab = y - f$ (4.) so hat man

$$T = -f\sqrt{(y^2 - f^2)} + y^2 \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(y^2 - f^2)}}{y}$$

$$= -f\sqrt{(y^2 - f^2)} + y^2 \mathfrak{B} \cos \frac{f}{y}$$

8. Also wenn man nunmehr statt y seinen Werth (5.) sezt, dZ oder

$$T\,dx = -f\,dx\sqrt{((-b + \sqrt{(r^2 - x^2)})^2 - f^2)}$$
$$+ dx(-b + \sqrt{(r^2 - x^2)})^2 \mathfrak{B} \cos \frac{f}{-b + \sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

ein

ein sehr verwickeltes Differential, dessen Integral zwar durch geschickte Substitutionen, wodurch das Differential eine einfachere Form erhält, ganz genau d. h. ohne eine unendliche Reihe dargestellt werden kann, aber für die Ausübung doch viel zu zusammengesetzt ausfällt, als daß sich davon ein nützlicher Gebrauch machen ließe. Ich halte es also für überflüssig, das Integral hieher zu setzen, und will nur den Fall betrachten, wenn der Bogen Aa keine beträchtlich große Krümmung hat, so daß man den Unterschied zwischen den Ordinaten FA, fa nur als sehr klein, in Vergleichung des Halbmessers CA betrachten darf, welcher Fall denn in der Folge bey dem Visiren von Fässern, welche nicht ganz voll sind, seine Anwendung finden wird.

9. Für y = FA = α, verwandelt sich also die Schnittfläche nam in NAM, welche ich mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen will. Also hat man erstlich

$$\mathfrak{T} = -\mathrm{f}\sqrt{(\alpha^2 - \mathrm{f}^2)} + \alpha^2\, \mathfrak{B}\cos\frac{\mathrm{f}}{\alpha}$$

10. Nun sey überhaupt y = α — z, wo also z eine kleine Grösse bedeutet (8), so hat man (5)

$$y = \alpha - z = -b + \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

Also $z = \alpha + b - \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Aber $\alpha + b = AC = r$. Demnach $z = r - \sqrt{}$

$\sqrt{(r^2 - x^2)}$ oder $(r-z)^2 = r^2 - x^2$; weil nun z klein gegen r seyn soll, so kann ohne erheblichen Fehler $(r-z)^2 = r^2 - 2rz$ gesetzt werden. Dieß giebt $z = \frac{x^2}{2r}$.

11. Wenn sich in (9) α in y oder $\alpha - z$ verwandelt, so verwandelt sich $\mathfrak{T}$ in T, und man hat, weil z klein ist, ohne erheblichen Fehler nach dem Taylorischen Lehrsatz *)

$$T = \mathfrak{T} - \frac{z\, d\mathfrak{T}}{d\alpha} + \frac{z^2}{1.2}\, \frac{dd\mathfrak{T}}{d\alpha^2}$$

wofür ich $T = \mathfrak{T} - Az + Bz^2$ setzen will, so daß $A = \frac{d\mathfrak{T}}{d\alpha}$; $B = \frac{dd\mathfrak{T}}{1.2.d\alpha^2}$, welche Werthe man denn leicht durch die Differenziation finden kann, wenn man in dem Ausdrucke für $\mathfrak{T}$ (9) α als eine veränderliche Grösse behandelt.

12. Dieß giebt demnach

$$dZ = Tdx = \mathfrak{T}dx - Azdx + Bz^2 dx$$

oder statt z seinen Werth (10) gesetzt

$$dZ = \mathfrak{T}dx - \frac{Ax^2 dx}{2r} + \frac{Bx^4}{4r^2} dx.$$

13. Demnach durch die Integration, wobey bloß x als variabel angesehen wird, den der Absciße x entsprechenden Raum

Z =

*) M. s. meine höhere Analysis. Erster Theil. §. 71. u. s. w.

$$Z = \mathfrak{T}x - \frac{A x^3}{6r} + \frac{B x^5}{20r^2}$$

wozu keine Constans zu addiren ist, weil für $x = 0$ auch $Z = 0$ werden muß.

14. Für $x = Ff = h$, wird der körperliche Raum zwischen NAM und nam, oder

$$Z = h\left(\mathfrak{T} - \frac{A h^2}{6r} + \frac{B h^4}{20 r^2}\right)$$

d. h. wegen $z = \frac{h^2}{2r}$ (10)

$$Z = h(\mathfrak{T} - \tfrac{1}{3} A z + \tfrac{1}{5} B z^2)$$

wo z jetzt den Unterschied der beyden Ordinaten FA und fa bedeutet.

15. Nun ist, wegen

$$T = \mathfrak{T} - Az + Bz^2 \ (11)$$

$Az = \mathfrak{T} - T + Bz^2$ also $\frac{1}{3} A . z = \frac{\mathfrak{T} - T}{3}$ $+ \frac{1}{3} Bz^2$.

16. Substituirt man diesen Werth in (14) so wird

$$Z = h(\tfrac{2}{3}\mathfrak{T} + \tfrac{1}{3} T - \tfrac{2}{15} Bz^2)$$

17. Wollte man nach dem Taylorischen Lehrsatz auch noch die auf $\frac{d\,d\,\mathfrak{T}}{d\,\alpha^2}$ folgenden Glieder

der mit in Rechnung bringen, so sieht man leicht, daß in dem Ausdrucke für Z auch z. E. höhere Potenzen als z^2 vorkommen würden. Wenn aber z klein, und 𝔛, T von beträchtlicher Grösse sind, so kann man sowohl das Glied $\frac{2}{15} Bz^2$ als auch alle, die noch darauf folgen würden, ohne merklichen Fehler weglassen, und schlechtweg

$$Z = h(\tfrac{2}{3}\mathfrak{X} + \tfrac{1}{3}T)$$

setzen, welches denn die von Lambert angegebene Regel, Fässer, welche nicht ganz voll sind, zu visiren, darbietet, und wovon wir weiter unten reden werden.

§. 132.

Anmerkung.

Da schon für den Fall, daß die krummen Linien AMDN, AaK Kreise waren, die Berechnung eines körperlichen Abschnittes wie NAMnam, auf eine weitläufige Differentialformel führte (§. 131, 8.), so läßt sich wohl einsehen, daß wenn AMDN, AaK andere krumme Linien, als Kreise, sind, die Berechnung eines Segments wie NAMnam oft noch mit mehr Schwürigkeiten verknüpft seyn würde, und daß sich überhaupt nur in wenig Fällen für Abschnitte von Körpern völlig genaue Formeln werden auffinden lassen, wenigstens Formeln, die für die Ausübung bequem genug wären.

worden. Wäre nun gar die Ebene des Schnittes NMk auch noch schief gegen die Grundfläche, so würde sich die Mühe der Rechnung noch mehr häufen.

Ich will also hier das Verfahren zeigen, einen Abschnitt wie NAMnam durch eine Näherung zu finden, welche für die Ausübung in den meisten Fällen vollkommen hinlänglich seyn wird.

§. 133.

Aufgabe.

Die Grundfläche NAM eines körperlichen Segments wie NAMnam (Fig. 72. und §. 131.) sey durch welche krumme Linie man will begränzt, und die zwischen NAM, nam enthaltene krumme Seitenfläche, wie man will, gestaltet, den körperlichen Raum NAMnam durch eine Näherung zu finden.

Aufl. 1. Man gedenke sich die Höhe Ff = h des Körpers NAMnam, in lauter gleich große Theile getheilt, und die Theile von der Grösse genommen, daß wenn man sich durch die Theilpunkte, parallel mit NAM, Schnitte durch den Körper, z. B. $\nu\alpha\mu$, $\nu'\alpha'\mu'$ u. s. w. gedenkt, man die Bogen wie Mμ, $\mu\mu'$, Aα, $\alpha\alpha'$ u. s. w. auf der krummen Seitenfläche, ohne

... in Rechnu... ... nehmen
Daß in dem ...
Potenzen ... Raum zwischen
über z... ...graden Parallel=
Grösse ... eine abgekürzte
... einem solchen
... erwähnt worden,
... die Schnitte

... Ordnung nach, die
... nächste Schnitt=
... $\nu'\alpha'\mu' = \mathfrak{T}''$
... $\mathfrak{T}'''$, $\mathfrak{T}^{IV}$; die
... wenn die Höhe
... werden.

... körperlichen
... zwischen den
... $\mathfrak{T} + \mathfrak{T}' +$
... Höhe h mit e

... $\mathfrak{T}$ unter=

... so setze

... die Differenz
... zwischen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}$
... $\mathfrak{T}(\mathfrak{T} - \triangle\mathfrak{T})$

... merklichen

Fehler

$\mathfrak{T}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}\right)$ oder $\mathfrak{T}-\frac{1}{2}\Delta\mathfrak{T}=$ $\frac{1}{2}(\mathfrak{T}-\mathfrak{T}')=\frac{1}{2}\mathfrak{T}+\frac{1}{2}\mathfrak{T}'$ gesetzt werden.

6. Dieß giebt demnach den Werth der abgekürzten Pyramide $=(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'+\frac{1}{2}\mathfrak{T}+\frac{1}{2}\mathfrak{T}')\frac{1}{3}e$ $=\frac{\mathfrak{T}+\mathfrak{T}'}{2}e$, also ohne merklichen Fehler dem Inhalte eines Prisma gleich, dessen Höhe $=e$ und die Grundfläche dem arithmetischen Mittel zwischen den beyden Flächen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ gleich seyn würde.

7. So ist nun auf dieselbe Weise das zweyte Stück zwischen den beyden Schnittflächen $\nu\alpha\mu$, $\nu'\alpha'\mu'$, $=\frac{\mathfrak{T}'+\mathfrak{T}''}{2}e$; das dritte $=\frac{\mathfrak{T}''+\mathfrak{T}'''}{2}e$ und das letzte oder nte $=$ $\frac{\mathfrak{T}^{N-1}+\mathfrak{T}^{N}}{2}e$. Folglich die Summe von allen, d.h. der ganze körperliche Raum zwischen der Grundfläche NAM $=\mathfrak{T}$ bis zur Schnittfläche nam $=\mathfrak{T}^{N}$, gleich dem Ausdrucke

$$Z=\left(\frac{\mathfrak{T}+\mathfrak{T}^{N}}{2}+\mathfrak{T}'+\mathfrak{T}''\ldots+\mathfrak{T}^{N-1}\right)e$$

 8. Man

8. Man sieht leicht, daß diese Formel auch gelten wird, wenn gleich die Ebene des Schnittes MKN nicht auf der Grundfläche NAM senkrecht steht, wenn nur h die senkrechte Höhe zwischen NAM und nam bezeichnet.

9. Um demnach den körperlichen Raum Z zu finden, muß man die Schnittflächen NAM, $\nu\alpha\mu$ u. s. w. welche um $\frac{h}{n}$ oder e von einander abstehen, zu berechnen wissen.

Weiß man, was NAM, $\nu\alpha\mu$ ꝛc. für krumme Linien sind, so kann man die Flächenräume NAM, $\nu\alpha\mu$ u. s. w. aus den Gleichungen für diese krumme Linien, nach den bereits bekannten Formeln berechnen. Sind aber diese Gleichungen nicht bekannt, so muß man in jedem Flächenraume NAM, $\nu\alpha\mu$ u. s. w. so viel Ordinaten und Abscissen messen, daß man diese Räume, so genau als erforderlich ist, daraus durch eine Näherung ableiten kann (§. 44).

Beyspiele.

10. Gesetzt NAM, $\nu\alpha\mu$, $\nu'\alpha'\mu'$ u. s. w., seyen parabolische Bögen, und A, α, α' u. s. w. die Scheitelpunkte dieser Parabeln. Die Axen derselben sollen längst AB, $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ u. s. w. fallen, und die Sehnen MN, $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ ꝛc. halbiren, die man denn leicht an dem vorgegebenen

denen Körper für die gleich großen Theile $B\beta$, $\beta\beta'$ ꝛc. wird messen können. Hat man nun auch die den Sehnen zugehörigen Abscissen AB, $\alpha\beta$, ꝛc. gemessen, so hat man der Ordnung nach die Flächenräume

$NAM = \mathfrak{T} = \frac{2}{3} AB \cdot MN$ (§. 39. 3.)
$\nu\alpha\mu = \mathfrak{T}' = \frac{2}{3} \alpha\beta \cdot \mu\nu$
$\nu'\alpha'\mu' = \mathfrak{T}'' = \frac{2}{3} \alpha'\beta' \cdot \mu'\nu'$
u. s. w.

welche man denn nur in dem Ausdrucke für Z (7) substituiren darf.

11. Sind NAM, $\nu\alpha\mu$ u. s. w. Abschnitte von Kreisen, so kann man jeden Abschnitt z. B. NAM aus seiner Sehne wie MN und dem Quersinus oder Pfeil AB entweder nach der oben angegebenen Formel (§. 31. VII.), oder durch Hülfe der Circulschnittafel (§. 31. IX.) berechnen, wo denn der dazu nöthige Halbmesser r oder AE aus der Gleichung $2r \cdot AB - AB^2 = BN^2$ vermittelst der Formel $r = \frac{AB^2 + BN^2}{2AB}$ berechnet werden kann.

Achtes Kapitel.

Berechnung des Inhalts und der Oberfläche der vorzüglichsten Arten von Gewölben.

§. 134.

1. Ich setze hier aus der Baukunst voraus, wie die verschiedenen Arten von Gewölben im Grundriß, Aufriß und Profil darzustellen sind, und verweise den, der darin noch nicht unterrichtet ist, auf Gillys Landbaukunst, C. B. Meerweins Beytrag zur richtigen Beurtheilung der Eigenschaften und der Wirkungen der Gewölbe ... nebst daraus abgeleiteter Anweisung alle Arten von Gewölben ... zu zeichnen und zu beurtheilen. Frankf. a. M. 1802 und andere Schriften.

2. Aus den Rissen eines vorgegebenen oder zu bauenden Gewölbes können alsdann nach dem verjüngten Maaßstabe leicht diejenigen Data abgenommen werden, welche zur Berechnung des Inhalts, der Oberfläche u. s. w. erforderlich sind, und wenn man die Rechnung

über

über ein Gewölbe führen will, welches schon gebauet ist, so wird es allemahl rathsam seyn, an demselben so viel Stücke zu messen, daß sich allenfalls ein Entwurf desselben auf dem Papiere nach einem verjüngten Maaßstabe verfertigen läßt, welcher denn oft durch eine leichte Construction gewisse Data zur Berechnung des Gewölbes darbietet, die man außerdem oft erst durch eine Rechnung selbst bestimmen müßte.

Inhalt und Oberfläche eines Gewölbes mit der gehörigen Genauigkeit berechnen zu können, ist bey der Taxation der Gewölbe in Absicht auf Arbeitslohn und Baumaterialien, eine unentbehrliche Aufgabe, daher ich mich bemühen werde, die Regeln für die vorzüglichsten Gewölbarten, aus den bisher beygebrachten Lehren möglichst kurz und deutlich zu entwickeln. Daß übrigens in der Ausübung die größte mathematische Genauigkeit nicht immer erforderlich ist, bedarf wohl kaum einer Erinnerung. Aber gar zu mangelhaft und unrichtig sind doch oft die Vorschriften, die man bey practischen Schriftstellern hin und wieder über diese Berechnungsweise vorfindet.

3. Man kann bey einem vorgegebenen Gewölbe zu einer gewissen Absicht entweder den vollen Inhalt des ganzen überwölbten Platzes d. h. die ganze innere Höh-

Achtes Kapitel.

Berechnung des Inhalts und …
der vorzüglichsten Arten …

§.

1. Ich setze hier … wie die verschieden… Grundriß, Auf… und verweise … terrichtet ist … C. B. M… tigen B… ten … wölb… ter… wo… th… d…

… ugn ein Halbkreis, … Ellipse, Parabel u. d. gl. … wenn die Gewölbe, oder einzelne … eiben, die mancherley Formen erhal- … eren Benennungen ich aus der Baukunst … nfalls als bekannt voraussetze.

6. Ist die äußere Fläche eines Gewölbes der innern nicht parallel, das Gewölbe also nicht durchaus von gleicher Dicke, so kann man sich, zur Erleichterung mancher Berechnungen, eine mittlere Gewölblinie gedenken, welche etwa der innern Gewölblinie ähnlich ist, und dann eine

Dicke nach der das Mauerwerk
...
... Kanten, oder Rippen
welches (w. z. B. das Kreuz-
...he) aus mehr einzeln Theilen
...nennt man diejenigen krum-
...n sich diese einzeln Theile
... und Sargen werden
...nnt, welche den Platz
...ölben soll.

...en Berechnungsart
... lassen, sind Ku-
...wölbe, Klo-
...gewölbe, wel-
...ung nach in folgenden
...werde.

§. 135.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Kugelgewölbes zu finden.

Aufl. 1. Ein solches Gewölbe stellt eine halbe Kugel vor. Die Grundfläche AB (Fig. 73.) der innern Höhlung oder Halbkugelfläche AFB des Gewölbes, ist also ein Kreis, und die innere Höhe FK des Gewölbes ist dem Halbmesser AK der Grundfläche d. h. der halben innern Weite des Gewölbes gleich.

 2. Ist

kung des Gewölbes verlangen, oder bloß den Inhalt des Gewölbes zwischen der innern und äußern Fläche desselben, d. h. den körperlichen Raum, welchen bloß die Dicke des Gewölbes fasset, das Mauerwerk oder den massiven Theil desselben; mit Beyseitesetzung der Wiederlagen, Pfeiler u. d. gl. deren Berechnung meist von keiner großen Schwierigkeit ist, und sich durch Pyramiden und Prismen bewerkstelligen läßt.

4. Die krumme Linie nach der die innere Fläche eines Gewölbes aufgeführt ist, nennt man die Gewölblinie, und nach derselben wird das Bogengestelle, die sogenannte Lehre oder das Lehrgerüste, verfertigt, über welchem sodann das Mauerwerk in der gehörigen Krümmung aufgeführt wird.

5. Diese Gewölblinie kann ein Halbkreis, ein Kreisbogen, eine Ellipse, Parabel u. d. gl. seyn, wodurch denn die Gewölbe, oder einzelne Theile derselben, die mancherley Formen erhalten, deren Benennungen ich aus der Baukunst ebenfalls als bekannt voraussetze.

6. Ist die äußere Fläche eines Gewölbes der innern nicht parallel, das Gewölbe also nicht durchaus von gleicher Dicke, so kann man sich, zur Erleichterung mancher Berechnungen, eine mittlere Gewölblinie gedenken, welche etwa der innern Gewölblinie ähnlich ist, und dann

eine

eine mittlere Dicke nach der das Mauerwerk aufgeführt wird.

7. **Grathe, Kanten, oder Rippen** eines Gewölbes, welches (w. z. B. das Kreuz- oder Klostergewölbe) aus mehr einzeln Theilen zusammengesetzt ist, nennt man diejenigen krummen Linien, in denen sich diese einzeln Theile selbst zusammenfügen, und **Sargen** werden diejenigen Mauern genannt, welche den Platz umfassen, den man überwölben soll.

8. Die Gewölbe auf deren Berechnungsart sich leicht alle andere bringen lassen, sind **Kugelgewölbe, Tonnengewölbe, Klostergewölbe** und **Kreuzgewölbe**, welche ich denn der Ordnung nach in folgenden §§en behandeln werde.

§. 135.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Kugelgewölbes zu finden.

Aufl. 1. Ein solches Gewölbe stellt eine halbe Kugel vor. Die Grundfläche AB (Fig. 73.) der innern Höhlung oder Halbkugelfläche AFB des Gewölbes, ist also ein Kreis, und die innere Höhe FK des Gewölbes ist dem Halbmesser AK der Grundfläche d. h. der halben innern Weite des Gewölbes gleich.

1. 2. Ist nun afb die äußere Halbkugelfläche des Gewölbes, und Ka ihr Halbmesser, mithin Aa die Dicke des Gewölbes, so hat man erstlich für die innere Höhlung des Gewölbes, d.h. für den körperlichen Raum zwischen der Kreisfläche AB und der halben Kugelfläche AFB die Formel $\frac{2}{3}\pi \cdot AK^3$ und dann

3. Für den körperlichen Raum zwischen der innern und äußern Kugelfläche AFB und afb oder für den massiven Theil des Gewölbes (§. 134. 3.) die Formel $2\pi \cdot KA \cdot Ka \cdot Aa$. d. h. die doppelte Ludolphische Zahl $\pi = 3,1415\ldots$ multiplicirt in die beyden Halbmesser KA, Ka, und in die Dicke Aa des Gewölbes, vorausgesetzt, daß diese Dicke klein und durchaus von gleicher Grösse bey dem Gewölbe ist.

4. Beweis. Man nenne den Halbmesser $AK = r$, die Dicke des Gewölbes $Aa = \Delta r$, so daß also Δr die Differenz zwischen dem innern und äußern Halbmesser bezeichne; so ist der körperliche Raum der halben Kugel $AFB = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$ nach (§. 115. 5.) also $\frac{2}{3}\pi \cdot AK^3$.

5. Dann der körperliche Raum der Halbkugel $afb = \frac{2}{3}\pi(r+\Delta r)^3 = \frac{2}{3}\pi(r^3 + 3r^2 \cdot \Delta r + 3r \cdot \Delta r^2 + \Delta r^3)$, wovon der körperliche Raum (4) abgezogen, für den körperlichen Raum zwischen den Halbkugelflächen AFB und

afb

als der Werth $2\pi r^2 . \Delta r + 2\pi r . \Delta r^2 = 2\pi r (r + \Delta r) \Delta r = 2 . \pi . AK . Ka . Aa$ kommt, wenn Δr^3 ohne merklichen Fehler weggelassen werden darf.

§. 136.

Zusatz.

Ist die Dicke des Gewölbes nicht durchaus von gleicher Grösse, wie denn die Gewölbe öfters oben bey F etwas schwächer als an der Grundfläche gemacht werden, so ist es für die Ausübung hinlänglich, statt Aa in der Vorschrift (3) die mittlere Gewölbdicke zu nehmen, wo denn Ka auch um diese mittlere Gewölbdicke grösser als KA genommen werden muß.

§. 137.

Anmerkung.

1. Man nennt die Kugelgewölbe auch sehr oft Helm- Kessel- oder Kuppelgewölbe (Dome. Voute en cul de four.) Es haben jedoch dergleichen Gewölbe nicht immer die halbe Weite zur Höhe, in welchem Falle denn AFB keine Kugelfläche, sondern eine elliptische Fläche ist, welche man sich als entstanden aus der Umdrehung eines elliptischen Quadranten AKF um die halbe kleine oder große Axe KF vorstellen muß. Ist dann KF die halbe kleine Axe, mithin KA die halbe große, so wird das Gewölbe ein gedrucktes (Voute surbaissée) hinge-

hingegen ein erhöhetes (gebürstetes) Gewölbe (Voute surhaussée) genannt, wenn KF die halbe große Axe, und folglich KA die halbe kleine Axe seyn würde.

2. Für ein solches gedrucktes oder auch erhöhetes Kesselgewölbe erhält man erstlich den körperlichen Inhalt der innern Höhlung AFB $= \frac{2}{3}\pi . KF . AK^2$ (aus §. 115. 6.) das dortige $c = 2 KF$ und $a = 2 KA$ gesetzt), und für den körperlichen Raum zwischen den Flächen AFB, afb oder den massiven Theil des Gewölbes den Ausdruck $\frac{2}{3}\pi Kf . Ka^2 - \frac{2}{3}\pi KF . AK^2$ d. h. $\frac{2}{3}\pi (Kf . Ka^2 - KF . KA^2)$ welcher Inhalt sich demnach aus den gemessenen Grössen Kf, Ka, KF, KA leicht berechnen läßt.

3. Im Falle das Gewölbe nicht sehr dick ist, und also KF, KA nicht viel von Kf, Ka unterschieden sind, kann man den Unterschied der körperlichen Räume AFb, afb d. h. den Raum zwischen den elliptischen Flächen AFB, afb auch als das Differenzial des körperlichen Raumes AFB betrachten. Man differenzüre also den Ausdruck $\frac{2}{3}\pi . KF . AK^2$, so daß man KF und AK als veränderliche Grössen behandelt, so erhält man $\frac{2}{3}\pi (AK^2 . dKF + 2 KF . AK . dAK)$. Setzt man nun statt dKF die obere Dicke Ff, und statt dAK die untere Dicke Aa des Gewölbes, so hat man für

für den körperlichen Raum zwischen der innern und äußern Fläche eines Kesselgewölbes den Ausdruck $\frac{2}{3}\pi$. AK (AK. Ff + 2 KF. Aa); welcher sich denn leicht aus den gemessenen oder bekannten Grössen AK, Aa; KF, Ff, berechnen läßt.

4. Für AK = KF d. h. wenn die innere Wölbung AFB sphärisch ist, wird der körperliche Raum zwischen AFB und afb = $\frac{2}{3}\pi . AK^2$ (Ff + 2 Aa), und folglich wenn die obere Dicke Ff = der unteren Aa ist, der körperliche Raum zwischen AFB und afb = $2\pi . AK^2 . Aa$ d. h. die halbe Kugelfläche oder die Fläche AFB = $2\pi . AK^2$ multiplicirt in die Dicke Aa des Gewölbes. Diese Regel findet man bey vielen practischen Schriftstellern.

5. Gewöhnlich ist aber die obere Dicke Ff kleiner als die untere Aa, so, daß wenn auch die innere Höhlung AFB sphärisch ist, die äußere Fläche afb derjenigen eines zusammengedrückten Sphäroids ähnlich ist, in welchem Falle denn der körperliche Raum zwischen AFB und afb durch die Formel $\frac{2}{3}\pi . AK^2$(Ff + 2 Aa) am besten berechnet wird, wenn gleich in der Ausübung die äußere Krümmung afb nicht vollkommen elliptisch seyn, und selbst einen andern Mittelpunkt als AFB haben sollte, so wie denn bekannt ist, daß man den Mittelpunkt

der

der äußern Gewölblinie a f b immer etwas unterhalb dem Mittelpunkte K der innern AFB annimmt, und die Ellipsen in der Ausübung aus Stücken von Kreisbogen zusammensetzt.

§. 138.

Aufgabe.

Die innere Höhlung und den massiven Theil eines Tonnengewölbes zu berechnen.

Aufl. 1. Ein Tonnengewölbe (auch Kufengewölbe) ist ein halber Cylinder (Fig. 74.) dessen parallele Grundflächen AFB, $\alpha\varphi\beta$, entweder Halbkreise, oder halbe Ellipsen sind, welche auf den parallelen Grundmauern oder Sargen $a\alpha$, $b\beta$ (§. 124. 7.) aufruhen, und zwischen sich das auf $a\alpha$, $b\beta$ sich stützende Gewölbe enthalten, dessen Länge $Kk = a\alpha = b\beta$ der Entfernung der Mittelpunkte der Gewölblinien AFB, $\alpha\beta\varphi$ gleich ist.

2. Ist KF oder die Höhe des Gewölbes, die halbe kleine Axe der elliptischen Gewölblinie AFB, so heißt das Tonnengewölbe ein gedrucktes. Ist aber KF die halbe große Axe, so wird das Gewölbe ein erhöhetes wie (§. 137. 1.) bey den Kesselgewölben, genannt.

3. Der hohle Theil des Gewölbes ist demnach der körperliche Raum zwischen dem über-

wölb-

wölbten Blocks a b ß und der der Gewölblinie AFB entsprechenden innern krummen Fläche des Gewölbes; und der massive Theil desselben der körperliche Raum zwischen der äußern und innern Gewölbfläche, deren letztere der äußern Gewölblinie afb entspricht.

4. Hieraus findet sich der Inhalt der innern Höhlung des Gewölbes = $\frac{1}{2}\pi$. KA. KF. Kk.

5. Und der massive Theil des Gewölbes zwischen den Gewölblinien AFB und afb = $\frac{1}{2}\pi$ (Ka. Kf — KA. KF) Kk, oder wenn die obere und untere Gewölbdicken Ff, Aa, nicht groß sind = $\frac{1}{2}\pi$ (KA. Ff + KF. Aa) Kk.

6. Beweis. Weil die innere Gewölbhöhlung einen Cylinder darstellt, dessen Grundfläche der elliptischen Fläche AFB und die Höhe der Länge Kk des Gewölbes gleich ist, so hat man für den körperlichen Raum der Höhlung, das Produkt aus der Grundfläche AFB in die Höhe oder Länge Kk. Aber nach (§. 40. 6.) ist (das dortige c = 2. KF und a = 2 KA gesetzt) die elliptische Fläche AFB = $\frac{1}{2}\pi$. KA. KF; demnach die innere Gewölbhöhlung = $\frac{1}{2}\pi$. KA. KF. Kk.

7. Der körperliche Raum zwischen der äußern Gewölbfläche und dem überwölbten

Viereck

Viereck aabβ ist auf eine ähnliche Weise = $\frac{1}{2}\pi$. Ka. Kf. Kk; wird hievon der körperliche Raum der innern Höhlung (6) abgezogen, so erhält man für den massiven Theil des Gewölbes den Ausdruck $\frac{1}{2}\pi$ (Ka. Kf — KA. KF) Kk.

8. Sind aber die Gewölbdicken Ff, Aa gering, so kann man den massiven Theil des Gewölbes auch als das Differenzial des hohlen Theiles (6) betrachten.

Man differenziire also diesen, so daß man KA, KF als die veränderlichen Grössen betrachtet, so erhält man den massiven Theil = $\frac{1}{2}\pi$(KA . dKF + KF . dKA) Kk. Setzt man also statt dKF, dKA die Werthe Ff, Aa so erhält man für den massiven Theil den (5) angegebenen Ausdruck.

§. 139.
Zusatz I.

Ist die Gewölblinie AFB ein Halbkreis, also KA = KF, so ist der hohle Theil des Gewölbes = $\frac{1}{2}\pi$. KA² Kk, und der massive = $\frac{1}{2}\pi$. KA (Ff + Aa) Kk. In diesem Ausdrucke ist π. KA . Kk die innere Cylinderfläche. Diese multiplicirt man also in $\frac{Ff + Aa}{2}$ d. h. in die mittlere Dicke

des

des Gewölbes, so hat man den massiven Theil desselben, und so findet man diese Vorschrift bey vielen practischen Schriftstellern. Uebrigens gelten bey den Tonnengewölben auch die Bemerkungen (§. 137. 5.) mit der gehörigen Abänderung.

§. 140.

Zusatz I.

1. Wenn die Gewölblinien AF, BF keine Quadranten, sondern bloß Kreisbogen sind, deren Sinus = KF (wie Fig. 75 abgebildet ist) so wird das Tonnengewölbe ein zugespitztes oder gothisches genannt, ein gedrücktes, oder erhöhetes, je nachdem die Höhe desselben KF kleiner oder grösser als die halbe Weite KA des Gewölbes ist. Die Mittelpunkte von FA, FB liegen in der Grundlinie AB z. B. bey M, N.

2. Ist KF > KA so führt das Gewölbe auch den Namen Eselsrücken (Dos d'âne), zu welchen auch diejenigen gehören, bey denen die Mittelpunkte der Kreisbögen AF, BF unterhalb der Grundlinie AB genommen worden sind, in welchem Falle die Gewölbhöhe KF aber freilich nicht mehr der Sinus jener Bögen ist.

3. Man wird auch für diese Art von Gewölben ohne großen Fehler den körperlichen Inhalt des massiven Theiles erhalten, wenn

man die dem Bogen AF entsprechende innere Gewölbfläche, in die mittlere Dicke des Gewölbes multiplicirt, und wegen BF = AF das Product duplirt.

4. Nun ist zwar die dem Bogen AF entsprechende innere Gewölbfläche = Kk. Bog AF, wenn wieder Kk die Länge des Gewölbes bedeutet. Die mittlere Dicke des Gewölbes = $\frac{Aa + Ff}{2}$, demnach der massive Theil des Gewölbes = 2 Kk. Bog AF. $\frac{Aa + Ff}{2}$ = Kk. (Aa + Ff). Bog AF.

5. Die Praktiker begnügen sich sehr oft, die Länge eines Bogens wie AF bloß nach dem verjüngten Maaßstabe, nach welchem das Gewölbe gezeichnet worden ist, vermittelst eines Zirkels zu finden, indem sie den Bogen in eine gewisse Anzahl kleiner Theile theilen, einen solchen Theil (oder vielmehr dessen Sehne) auf dem Maaßstabe messen, und ihn mit der Zahl der Theile multipliciren.

6. Aber genauer erhält man den Bogen durch Rechnung, indem man den ihm zugehörigen Winkel AMF am Mittelpunkte, aus der Höhe FK, und dem Halbmesser FM vermittelst der Formel sin FMA = $\frac{FK}{FM}$ sucht, und hierauf

diesen

diesen Winkel oder vielmehr dessen Bogen, in Decimaltheilen des Halbmessers ausgedrückt (§. 13. IV.), in die Grösse des Halbmessers FM selbst multiplicirt.

7. Kann man den Halbmesser FM aus der Zeichnung des Gewölbes unmittelbar haben, so bedarf es keiner weitern Rechnung. Sonst kann man ihn aber auch aus FK und AK vermittelst der Formel $FM = \frac{FK^2 + AK^2}{2AK}$ berechnen.

8. Liegt der Mittelpunkt des Bogens AF unterhalb der Grundlinie AB, so wird man nach einigen Nachdenken auch leicht finden, wie für diesen Fall die Rechnung zu führen seyn würde.

9. Um den hohlen Theil des Gewölbes zu erhalten, multiplicirt man die doppelte Fläche AKF in die Länge des Gewölbes, wo denn die Fläche AKF aus AK und KF entweder durch Hülfe der Circulschnittstafeln (§. 31. IX.) oder auch (§. 31. VII.) gefunden werden kann.

§. 141.

Zusatz III.

Die innere Gewölbfläche eines Tonnengewölbes zu finden, darf man nur

Nur die Länge des Gewölbebogens AFB (Fig. 74. 75.) in die Länge Kk des Gewölbes multipliciren.

Ist demnach AFB eine halbe Ellipse, so könnte man die Rectification derselben nach (§. 61. rc.) bewerkstelligen, wenn es nöthig wäre hier so genau zu rechnen. In den meisten Fällen begnügen sich aber die Praktiker mit einem Verfahren wie (§. 140. 5.). Sonst aber, wenn KF $= \gamma$ und AK $= \alpha$ nicht viel von einander unterschieden sind, kann die Länge der halben Ellipse AEB auch durch die Formel $\frac{3\gamma^2+\alpha^2}{4\gamma}\pi$ (§. 120. 18.) gefunden werden.

Für einen Halbkreis AFB wäre dann [illegible] und AFB [illegible] wie ohnehin bekannt ist.

Zusatz.

Man gedenke sich die beyden Oeffnungen des Tonnengewölbes, nemlich AFB, $\alpha\varphi\beta$ (Fig. 74.) mit einem halben Kugel- oder Kesselgewölbe (§. 137.) Halbkuppel oder auch Nischengewölbe (Demidome) geschlossen, so führt das Gewölbe den Nahmen eines Muldengewölbes. Hinter der Flä-

che

che $\alpha\varphi\beta$ ist in der Figur ein solches halbes Kugelgewölbe $\alpha n\varphi\beta$ abgebildet, dessen Höhe $k\varphi$ und Weite $\alpha\beta$ demnach der Höhe und Weite des Tonnengewölbes gleich seyn muß. Da nun bereits die Berechnungsart der Kugel= oder Kesselgewölbe gezeigt worden ist, so bedarf die Berechnung eines Muldengewölbes keiner weitern Erläuterung. Da nemlich die beyden Halbkugelgewölbe $\alpha n\varphi\beta$ und AFB, ein ganzes Kugelgewölbe ausmachen, so darf man zu dem Tonnengewölbe nur ein Kugel= oder Kesselgewölbe von gleicher Höhe und Weite (§. 137.) hinzusetzen, um den Inhalt des Muldengewölbes zu erhalten.

§. 143.

Zusatz V.

Ist das Tonnengewölbe mit geraden Mauern AFB, $\alpha\varphi\beta$ geschlossen, so bekömmt man den Inhalt dieser Mauern, wenn man die Flächen AFB, $\alpha\varphi\beta$ noch besonders in die Mauerdicke multiplicirt.

Ich werde aber künftig alles eben Mauerwerk bey den Gewölben bey Seite setzen, weil die Berechnung desselben keiner besondern Regeln bedarf, als derjenigen, welche bereits bey Betrachtung der Prismen und Pyramiden vorgekommen sind.

§. 144.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt der Höhlung eines Klostergewölbes zu berechnen.

Aufl. 1. Ein Klostergewölbe (Haubengewölbe, Kappengewölbe, Voûte en arc de Cloitre) ist ein Gewölbe mit auswärtsgehenden Grathen oder Kanten, und gehört zu den kuppelartigen Körpern, deren Berechnung schon im Allgemeinen (§§. 125. 126 ff.) gelehrt worden ist. Fig. 71 stellt ein solches vor, wenn die Grundfläche ACBDGE ein reguläres Polygon ist, wo denn die sich in einen Punkt K vereinigenden Grathe oder Kanten KA, KC, KB ꝛc. Kreisbogen, elliptische Bögen u. s. w. seyn können. Bey einem regulären Polygon sind dann die zwischen den Grathen enthaltenen einzelnen Seitenflächen AKC, CKB alle einander gleich und ähnlich, und die Spitze K liegt senkrecht über dem Mittelpunkt F der Grundfläche, so wie denn jede Kante KA oder KC in einer ebenen Fläche KFA oder KFC liegt, welche durch die Höhe des Gewölbes KF, und die von F nach A, C gezogenen Linien gedacht werden muß.

2. Ist die Grundfläche kein reguläres Polygon, so liegen doch die Kanten KA, KC, KB,

KB, rc. allemahl in Verticalebenen, welche man sich durch die Höhe KF, und die von F nach den Eckpunkten der Grundfläche gezogene gerade Linien gedenken muß.

3. Dadurch zerfällt also der ganze körperliche Raum des Gewölbes in lauter Stücke wie KFAC, KFCB u. s. w. deren Cubikinhalt einzeln oder auch gleich in Summa berechnet werden kann.

4. Will man nun einen solchen körperlichen Ausschnitt wie AKCF berechnen, so muß man wissen was die Kante AK oder KC für eine krumme Linie ist, oder auch, wenn man von F ein Perpendikel FM auf AC fällt und durch KF, FM, sich eine Ebene vorstellt, welche die krumme Seitenfläche AKC in der krummen Linie KmM schneidet, was KmM für eine krumme Linie ist.

5. Man berechnet alsdann den körperlichen Inhalt Z eines runden Körpers, welcher durch die Umdrehung einer von den krummen Linien KA oder KM oder KC um die Axe KF entstehen würde, dividirt diesen Inhalt mit der Grundfläche des runden Körpers d. h. mit einer Kreisfläche = F von dem Halbmesser AF oder FM oder FC, je nachdem Z den durch die krumme Linie AK oder KM oder KC entstandenen runden Körper bezeichnet, und multipli-

cirt den Quotienten $\frac{Z}{F}$ in die Fläche des Dreyecks AFC, so wird das Produkt den dem Dreyecke AFC entsprechenden körperlichen Ausschnitt KFAC des Klostergewölbes geben.

6. Verlangt man den körperlichen Raum des ganzen Klostergewölbes, so setzt man statt jenes Dreyecks nur die ganze Grundfläche ACBD... des Gewölbes, wobey denn Z den von einer jeden Grathe, oder auch Bogen wie KmM beschriebenen runden Körper bedeuten kann, wenn nur allemahl unter F die kreisförmige Grundfläche dieses runden Körpers verstanden wird.

Beweis. Weil die Klostergewölbe zu der Classe von Körpern (§. 124.) gehören, deren Schnitte, senkrecht auf die Höhe KF, alle einander ähnlich sind, so erhellet der Beweis dieser Vorschrift allgemein aus (§. 125.) und bedarf also keiner weitern Erläuterung.

§. 145.
Beyspiele.

I. Wenn die Grathe oder Kanten wie KA, KC u. s. w. elliptische oder auch Kreisquadranten sind.

1. In diesem Falle ist der runde Körper Z, welcher durch einen solchen Quadranten wie KA

KA beschrieben wird $= \frac{1}{12} \pi . 4 FA^2 . 2KF$ ((§. 115. 4.) das dortige $a = 2KF$ und $c = 2FA$ gesetzt) $= \frac{2}{3} \pi . FA^2 . FK$ und die von FA beschriebene Kreisfläche als Grundfläche von $Z = FA^2 . \pi$. Demnach $\frac{Z}{F} = \frac{2}{3} FK$.

Also multiplicire man die Grundfläche des Klostergewölbes nemlich das Polygon ACDBGE (Fig. 71) es mag regulär oder irregulär seyn, in $\frac{2}{3}$ der Höhe FK, so hat man den innern körperlichen Raum oder die Höhlung des Klostergewölbes.

2. Man sieht leicht, daß dieser Satz seine Richtigkeit hat, wenn unter allen den krummen Linien, wie KA, KM, KC, KB, KD ꝛc. (Fig. 71) auch nur eine ein elliptischer oder Kreisquadrant seyn würde, in welchem Falle denn Z allemahl den dadurch beschrieben werdenden runden Körper, und F seine Grundfläche bedeuten muß.

3. Ist die Grundfläche ein reguläres Polygon, dessen Centriwinkel AFC (Fig. 71) $= \alpha$, so ist dessen Quadratinhalt $= \frac{1}{2} n . FA^2 \sin \alpha$ (§. 126. 6.) wenn n die Anzahl der Seiten des Polygons ist, und folglich der körperliche innere Raum des regulären Klostergewölbes $= \frac{1}{2} n \sin \alpha . AF^2 . FK$, wo denn, wenn AK ein Kreisquadrant ist, auch zugleich $AF = FK$ wird.

 4. Wenn

4. Wenn man in dieser Formel statt FA das Perpendikel FM auf die Polygonseite gebrauchen will, so ist AF $= \frac{FM}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, welches denn, wenn man zugleich auch sin α durch 2 sin $\frac{1}{2}\alpha$ cos $\frac{1}{2}\alpha$ ausdrückt, für des Gewölbes Inhalt (3) auch die Formel

$$n.\tfrac{2}{3}\tan\tfrac{1}{2}\alpha.FM^2.FK$$

giebt, wo denn, wenn die krumme Linie MmK ein Kreisquadrant ist, auch zugleich FM = FK wird.

II. 1. Wenn die Grathe oder Kanten keine Quadranten von Ellipsen oder Kreisen sind, sondern bloß elliptische oder Kreisbögen, deren Sinus oder Höhe = FK ist.

2. Für diesen Fall sucht man den Werth von Z aus (§. 117). Da indessen in der Ausübung die Grathe oder Kanten gewöhnlich nur Kreisbogen seyn werden, so ist in diesem Falle der aus der Umdrehung eines solchen Bogens AK entstehende runde Körper Z =

$$\pi h(r^2 - \tfrac{1}{3}h^2) - \pi b r^2 \mathfrak{B}\sin\frac{h}{r}\ (\S.\ 117.\ 9.)$$

wo r den Halbmesser OA des Bogens AK, h die Höhe KF, und b = OA − AF = r − k den Abstand OF des Mittelpunktes O von F bezeichnen.

Ferner

Ferner die Grundfläche F dieses runden Körpers $= \pi . AF^2 = \pi . k^2$; demnach der Quotient

$$\frac{Z}{F} = \frac{h(r^2 - \frac{1}{3}h^2)}{k^2} - \frac{r^2(r-k)}{k^2} \mathfrak{B}.\sin\frac{h}{r}$$

welchen man demnach nur noch in die Grundfläche des Klostergewölbes multipliciren darf, um den innern Raum desselben zu erhalten. Man sieht aber leicht, daß diese Rechnung schon etwas beschwerlich wird, zumahl wenn man den Halbmesser r des Bogens AK auch erst aus seiner Sagitte AF $=$ k und Höhe KF $=$ h berechnen müßte (§. 117. 10.)

§. 146.

Zusatz I.

Ist die Grundfläche ein reguläres Polygon dessen Zahl der Seiten $=$ n und Centriwinkel $= \alpha$, so wird der körperliche Raum des Klostergewölbes $=$

$$\tfrac{1}{2}n\sin\alpha\left((r^2 - \tfrac{1}{3}h^2)h - r^2(r-k)\mathfrak{B}.\sin\frac{h}{r}\right)$$

Ein Klostergewölbe der Art, daß AK ein Kreisbogen und FK dessen Sinus ist, wird auch ein **Gothisches Klostergewölbe** genannt, dessen Inhalt also durch die angegebene Formel gefunden werden kann.

§. 147.

4. Wenn man in dieser ... das Perpendikel FM auf d... brauchen will, so ist AF ... nach der ... denn, wenn man ... nun zw... $2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$ ... KA n. f. ... des Inhalt (3) ... M, welch... $n . \frac{2}{3}$ ta... ...reicht. ... giebt, wo de... ...gen Sinus = FK, ein Kreis... ...e Kanten AK oder KC kein... wird. ..., sondern elliptische Bogen.

I... In diesem Falle wird man aber dennoch ... so wie in (§. 147.) verfahren, nur mit dem Unterschiede, daß man daselbst unter r den Halbmesser Mo des Kreisbogens MmK, und unter k das Perpendikel FM zu verstehen hat.

Ist nun das Polygon ACB... regulär, so wird die Fläche des Dreyecks $AFC = \frac{FM . AC}{2}$ $= \frac{k . 2k \tan g \frac{1}{2} \alpha}{2} = k^2 . \tan g \frac{1}{2} \alpha$. Mithin die Polygonfläche $= n k^2 . \tan g \frac{1}{2} \alpha$, und des Klostergewölbes Inhalt =

$$n \tan g \frac{1}{2} \alpha \left((r^2 - \frac{1}{3} h^2) h - r^2 (r - k) \mathfrak{B} \sin \frac{h}{r} \right)$$

§. 148.

§. 148.

Aufgabe.

den Theil eines Klo... zu berechnen.

... (Fig. 71) der äußere ... des Klostergewölbes, ... von FM, die untere ... Theil des Klostergewölbes.

2. Man nenne diese untere Dicke Ma ..., die obere Dicke bey K = ε, den innern Umfang ACBD .. der Grundfläche = P und den äußern Umfang αγβδ = p, so ist, im Fall das Klostergewölbe nach einem elliptischen ... KM gewölbt ist, und die Gewölbdicken, wie gewöhnlich der Fall ist, nicht groß sind, der massive Theil des Klostergewölbes = dem Ausdrucke $\frac{2}{3}\left(\frac{h(P+...)}{...}+H...\right)$ wenn M die Grundfläche ACBD ... bedeutet.

3. Beweis. Weil man den massiven Theil des Gewölbes als das Differential der innern Höhlung desselben betrachten kann, so ist derselbe = dem Differential von $\frac{2}{3}$ h . H (§. 145), also = $\frac{2}{3}$ (h d H + H d h).

Aber d H = der Fläche zwischen dem äußern und innern Umfang der Grundfläche = dem

mitt-

auch beynahe dadurch finden, daß man die innere Seitenfläche desselben in die mittlere Dicke des Gewölbes multiplicirt. Daher folgende Aufgabe nützlich seyn wird.

§. 151.
Aufgabe.

Es sey AKC (Fig. 71) eine von den Seitenflächen des regulären Klostergewölbes. Man soll den Quadratinhalt derselben finden.

Aufl. 1. Es sey KmM die krumme Linie nach der die Seitenfläche gewölbt ist, und S' die krumme Oberfläche eines runden Körpers, welcher durch die Umdrehung von KmM um die Axe KF entstehen würde. Ferner der Centriwinkel AKC $= \alpha$, so hat man wenn S die Seitenfläche AKC bedeutet

$$S = \frac{\tang \frac{1}{2}\alpha}{\pi} \cdot S'$$

2. Beweis. Ist aus (§. 128. 3.) klar, wenn man den dortigen Ausdruck für S, welcher sich auf die ganze krumme Seitenfläche über dem regulären Polygon ACBDGEA bezieht, nur mit n, oder mit der Zahl aller Seitenflächen wie AKC dividirt.

§. 152.

Beyspiel I.

1. Wenn KmM ein elliptischer Quadrant ist, dessen halbe große Axe = FK = h und halbe kleine = FM = k ist.

Für diesen Fall setze man in (§. 115. 10.) das dortige a = 2h; c = 2k und $e = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} = \frac{\sqrt{(h^2 - k^2)}}{h}$, so wird die krumme Oberfläche des durch KmM beschriebenen halben Ellipsoids d. h.

$$S' = \pi k \left(k + \frac{h^2}{\sqrt{(h^2 - k^2)}} \mathfrak{B}\sin \frac{\sqrt{(h^2 - k^2)}}{h} \right)$$

oder auch wenn der Bruch $\frac{h^2 - k^2}{h^2}$ den ich μ nennen will, klein ist, besser durch eine Reihe

$$S' = \pi k \left(k + h \left(1 + \frac{1}{2.3} \mu \ldots\right)\right)$$

wo denn das μ in dieser Formel das e^2 in (§. 115. 12.) also hier das $\frac{h^2 - k^2}{h^2}$ bedeutet.

2. Demnach eine Seitenfläche wie AKC bey einem regulären nach einem elliptischen Quadranten KmM geformten Klostergewölbe, oder

$\mathfrak{S} = k \tang \frac{1}{2}\alpha . (k + h (1 + \frac{1}{6}\mu + . .))$ (§. 151.)

3. Ist der Bruch μ sehr klein, also der elliptische Quadrant KmM nicht viel von einem Kreisquadranten unterschieden, so hat man beynahe

$$\mathfrak{S} = k \tang \tfrac{1}{2}\alpha . (k + h)$$

4. Und wenn $h = k$ also $\mu = 0$ ist, d. h. das Klostergewölbe nach einem Kreisquadranten KmM geformt ist, eine der Seitenflächen wie $AKC = 2k^2 . \tang \tfrac{1}{2}\alpha =$ der doppelten Fläche des Dreyecks = AFC (§. 147.)

5. Also würde die ganze krumme Seitenfläche eines regulären, nach einem Kreisquadranten KmM geformten Klostergewölbes, der doppelten Grundfläche ACBDGEA gleich seyn.

6. Wenn KmM ein elliptischer Quadrant wäre, dessen halbe kleine Axe $= KF = h$, und halbe große $= FM = k$ wäre, so wird man, auf eine ähnliche Art, jetzt $\frac{k^2 - h^2}{k^2} = \mu$ gesetzt, aus (§. 115. 19.) finden.

$$\mathfrak{S} = 2k^2 \tang \tfrac{1}{2}\alpha (1 - \tfrac{1}{3}\mu - \tfrac{1}{15}\mu^2 \ldots)$$

7. Da demnach der Bruch $\frac{h^2 - k^2}{h^2} = \mu$ in (2) oder $\frac{k^2 - h^2}{k^2} = \mu$ in (6), in jedem

Falle

Falle leicht berechnet ist, so sind die Formeln (2) und (6) noch immer einfach genug, die krummen Seitenflächen eines erhöht elliptischen (gebürsteten), oder gedruckten regulären Klostergewölbes, zu finden.

§. 153.

Beyspiel II.

Für ein gothisches Klostergewölbe ist KmM ein Kreisbogen, dessen Sinus die Höhe KF = h, und Quersinus die Linie FM = k ist.

Für diesen Fall wird (§. 117. 16.)

$$S' = 2\pi (r.h - b.s)$$

wenn $r = \frac{k^2 + h^2}{2k}$ den Halbmesser Mo des Bogens MmK, b = r — k = Fo den Abstand der Mittelpunkte F, o, der Grundfläche und des Bogens KmM, und s die Länge des Bogens MmK bezeichnen.

Demnach eine Seitenfläche wie AKC d. h.

$$S = 2 \tang \tfrac{1}{2} \alpha (r.h - b.s)$$

Für k = h also für einen Kreisquadranten MmK wird auch r = k und b = 0 demnach wie oben (§. 152. 4.) $AKC = 2k^2 . \tang \tfrac{1}{2}\alpha$.

 §. 154.

§. 154.

Zusatz.

1. Um demnach den massiven Theil eines regulären Klostergewölbes zu finden, so multiplicire man eine der gefundenen Seitenflächen AKC erstlich mit n oder der Anzahl aller, um die ganze krumme Seitenfläche des Gewölbes zu erhalten, und sodann diese in die mittlere Dicke $= \frac{e + \varepsilon}{2}$ des Gewölbes.

2. Z. B. bey einem nach einem Kreisquadranten KmM gebildeten Klostergewölbe würde der massive Theil zufolge dieser Vorschrift $= 2k^2 n \tang \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{e + \varepsilon}{2}$.

3. Aber nach der unstreitig richtigern Differenzialmethode (§. 149.) findet sich, daß dortige $h = k$ gesetzt, wie sich bey einem Kreisquadranten gebührt, der massive Theil $= 2k^2 n \tang \frac{1}{2}\alpha \frac{2e + \varepsilon}{3}$, welches diesen Theil etwas grösser, als die Vorschrift (2) geben würde. Der Unterschied würde $= 2k^2 n \tang \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{e - \varepsilon}{6}$, also nur in dem Falle $= 0$, wenn $e = \varepsilon$ d. h. das Gewölbe durchaus von gleicher Dicke seyn würde.

4. In

4. In diesem Falle würde demnach nach (x) $\frac{e+s}{2}$ bloß $= e$, und folglich die innere Seitenfläche eines Klostergewölbes bloß in die Dicke desselben zu multipliciren seyn, um den massiven Theil zu erhalten.

5. Giebt man aber nach der Vorschrift verschiedener Baumeister, unter andern Hrn. Meerweins (in oben §. 134. a. Schrift §. 4 u. ff.), der äußern Gewölbfläche eine Verstärkung, wodurch die untere Gewölbdicke größer als die obere ausfällt, so wird man entweder nach (§. 49.) oder nach der Vorschrift (x) rechnen müssen, und vielleicht am besten thun, zwischen beyden Resultaten ein arithmetisches Mittel zu nehmen.

§. 155.

Anmerkung.

I. Die bisherigen Vorschriften mögen hinreichend seyn, die gewöhnlichen bey Klostergewölben vorkommenden Fälle in der Kürze zu übersehen. Ich will also, was sonst in einzeln Fällen noch zu erörtern seyn mögte, um nicht zu weitläuftig zu seyn, dem eigenen Nachdenken eines jeden überlassen, und daher sogleich zu den Kreuzgewölben übergehen.

II. Um sich die Vorstellung von der Entstehungsart eines solchen Kreuzgewölbes, und

zugleich den Weg zu dessen Berechnungsart möglichst zu erleichtern, so gedenke man sich den bereits (§. 34. IV.) beschriebenen cylindrischen Raum zwischen den Ebenen AKk, AKH, HKkr und der krummen Seitenfläche AHr (Fig. 76. Nr. 1.) nur in einer andern Lage, nemlich wie (Fig. 77), so daß die durch den Bogen AH begränzte Ebene AKH eine verticale Lage, und folglich das Dreyeck AKk eine horizontale erhalte. Dann wird das Viereck HKkr gleichfalls vertical, und die krumme Fläche AHr eine Wölbung über dem horizontalen Dreyecke AKk darstellen, von der der Bogen AH die Gewölblinie, und die in der verticalen Ebene Akr befindliche krumme Linie Anr eine Grathe oder Kante seyn wird.

III. Neben diesem bey K rechtwinklichtem Dreyecke AKk (Fig. 77). gedenke man sich in der horizontalen Ebene ein zweytes kKB, so daß KB = KA, kB = kA, und über diesem Dreyeck eine ähnliche Wölbung wie über dem erstern, die nur hier in der Zeichnung nicht dargestellt werden kann. Dann ferner solche gleich hohe Wölbungen, über den bey K' rechtwinklichten Dreyecken kK'A, kK'Q u. s. w. wie die krummen Flächen ARr, ORr u. s. w. ausweisen, so werden je zwey an einander gränzende Wölbungen wie AHr, ARr eine gemeinschaftliche Grathe oder Kante Anr haben, und zwischen sich eine in das Gewölbe

hinein=

hineingehende Vertiefung bilden, wie hier durch die Schattirung ausgedrückt ist, dergestalt, daß wenn man sich im Innern des überwölbten Platzes befindet, alle in τ sich durchschneidende Grathen, welche denn gewöhnlich in B, A, O u. s. w. auf Pfeilern ruhen, ein Kreuz oder einen Stern, von so viel Strahlen gleichsam bilden werden, als Grathe oder Kanten sich in τ vereinigen.

IV. Besteht die ganze überwölbte Grundfläche nur aus 4. solchen Dreyecken wie BkA, AkO, OkL, LkB, so vereinigen sich bloß 4 Grathe oder Kanten in τ, und dann führt das Gewölbe im engern Sinne den Nahmen eines Kreuzgewölbes (Voute d'Arrête) z. B. wenn die Grundfläche BAOL ein Quadrat oder Parallelogramm wäre. Ist aber die Grundfläche ein reguläres Polygon und BkA, AkO u. s. w. die einzeln Dreyecke am Mittelpunkte desselben, so wird das solchergestalt überwölbte Vieleck ein vieleckigtes Kreuzgewölbe, dergleichen (Fig. 78) eines auf einem regulären Sechseck abgebildet ist, genannt, welches denn auf so viel Pfeilern, als Grathe vorhanden sind, ruhen wird.

V. Sind die Gewölbbogen AHB, ARO, OUL, LWB etc. Halbkreise, so wird das Gewölbe vollcirculförmig (en plein cintre) genannt.

zugleich den Weg zu dessen B
möglichst zu erleichtern, so geden
bereits (§. 34. IV.) beschrieb
Raum zwischen den Ebe
HKk*r* und der krumm
(Fig. 76. Nr. 1.) nur in ei
wie (Fig. 77), so da
AH begränzte Ebene
und folglich das
tale erhalte. D
gleichfalls verti … ult des
eine Wölbung … inem jeden
AKk darstel … AkK. (§. 155.)
Gewölbkant
Ak*r* besin … en.
über Kr

II. Auflösung.

Drer … rster Fall, wenn der Gewölber … gen AhH (Fig. 77.) ein elliptischer oder auch Kreisquadrant ist.

Man multiplicire die Fläche des elliptischen oder auch Kreisquadranten AKH in Kk, und ziehe davon ab das Produkt aus der Fläche des Dreyecks AKk in $\frac{1}{3}$ der Höhe KH, so hat man den körperlichen Raum des Kreuzgewölbes über dem Dreyeck AKk.

2. Beweis. Man gedenke sich den körperlichen Raum des Kreuzgewölbes über dem Dreyeck AKk, wieder in der Lage wie im vorherge-

… und in Fig. 76. Nr. 1, woselbst … daß K, C zusammenfallen, also … Mittelpunkt der Grundfläche … Raum ein Stück eines Cy- … fläche eine Ellipse oder …

… 76. Nr. 1.) sey eine … parallel, welche … in $\sigma\tau$ = QH, … messer AB auf der … gehende Ebene in LM' …

… ist nun erstlich der körperliche Raum … den gleichen und ähnlichen Quadranten … AKH, Lkτ = der Grundfläche AKH multiplicirt in die Höhe Kk.

5. Davon ziehe man nun ab, den huf- förmigen Abschnitt zwischen dem Dreyeck ALk, und den beyden Ebenen Lkτ, Akτ, oder auch den hufförmigen Abschnitt zwischen den Ebenen MkM' = ALk; σkM' = Lkτ und σkM = Akτ, so hat man

6. den körperlichen Raum des Cylinders zwischen dem Dreyecke AKk und den Ebenen Akτ, KkHτ, und AKH.

7. Aber der Inhalt des hufförmigen Abschnittes σkM'M ist, weil σkM' = QKB = AKH elliptische Quadranten sind, nach (§. 47. 4.)

Man sieht aber leicht, daß AHB ꝛc. auch halbe Ellipsen seyn können, und je nachdem HK > oder < KA ist, das Gewölbe elliptisch erhöht (gebürstet) oder gedruckt seyn wird.

Ist AH ein Kreisbogen, dessen Sinus KH, so ist die Wölbung AH ꝛ gothisch.

§. 156.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt des Kreuzgewölbes über einem jeden Dreyeck wie AkK, AkK' (§. 155.) u.s.w. zu berechnen.

Auflösung.

1. Erster Fall, wenn der Gewölbebogen AhH (Fig. 77.) ein elliptischer oder auch Kreisquadrant ist.

Man multiplicire die Fläche des elliptischen oder auch Kreisquadranten AKH in Kk, und ziehe davon ab das Produkt aus der Fläche des Dreyecks AKk in ⅓ der Höhe KH, so hat man den körperlichen Raum des Kreuzgewölbes über dem Dreyeck AKk.

2. Beweis. Man gedenke sich den körperlichen Raum des Kreuzgewölbes über dem Dreyeck AKk, wieder in der Lage wie im vorherge-

hergehenden §, und in Fig. 76. Nr. 1, woselbst ich jetzt annehme, daß K, C zusammenfallen, also QH durch den Mittelpunkt der Grundfläche gehe, so ist dieser Raum ein Stück eines Cylinders, dessen Grundfläche eine Ellipse oder Kreis ist.

3. Durch den Punkt τ (Fig. 76. Nr. 1.) sey eine Ebene $L\tau M'\sigma$ der Grundfläche parallel, welche die schiefe Schnittfläche $A\tau M\sigma$ in $\sigma\tau = QH$, und die über dem Durchmesser AB auf der Grundfläche senkrecht stehende Ebene in $LM' = AB$ durchschneide.

4. Hier ist nun erstlich der körperliche Raum zwischen den gleichen und ähnlichen Quadranten AKH, $Lk\tau$ = der Grundfläche AKH multiplicirt in die Höhe Kk.

5. Davon ziehe man nun ab, den hufförmigen Abschnitt zwischen dem Dreyeck ALk, und den beyden Ebenen $Lk\tau$, $Ak\tau$, oder auch den hufförmigen Abschnitt zwischen den Ebenen $MkM' = ALk$; $\sigma kM' = Lk\tau$ und $\sigma kM = Ak\tau$, so hat man

6. den körperlichen Raum des Cylinders zwischen dem Dreyecke AKk und den Ebenen $Ak\tau$, $KkH\tau$, und AKH.

7. Aber der Inhalt des hufförmigen Abschnittes $\sigma kM'M$ ist, weil $\sigma kM' = QKB = AKH$ elliptische Quadranten sind, nach (§. 47. 4.)

$= \frac{1}{3}\sigma\tau . \triangle MkM'$, weil das dortige A hier den Triangel MkM' und a hier die Axe $\sigma\tau = QH$ der Ellipse bezeichnet (1).

8. Demnach wird wegen $\sigma\tau = QH = 2KH$, und $\triangle MkM' = \triangle AKk$ (1), dieser hufförmige Abschnitt (7) oder auch der $A\tau kL$ (5) $= \frac{1}{3} . 2KH . \triangle AKk$.

9. Also der körperliche Raum (6) d. h. in (Fig. 77.) der körperliche Raum des Kreuzgewölbes über dem Dreyeck AKk (2) $= AKH . Kk - \triangle AKk . \frac{2}{3} KH$ (4. 8).

10. **Zweyter Fall, wenn das Kreuzgewölbe gothisch, also der Gewölbebogen AhH ein Kreisbogen ist, dessen Sinus die Höhe $KH = k\tau$ und Mittelpunkt in C ist.**

Man multiplicire die Fläche des Kreissegments AKH in den Halbmesser AC des Bogens AH, ziehe davon ab $\frac{1}{3}$ des Würfels der Höhe KH, und multiplicire den Rest in die Tangente des Winkels kAK, oder in die Cotangente des Winkels AkK d. h. in den Quotienten $\frac{Kk}{AK}$.

11. **Beweis.** Nach (§. 34. IV. 4.) ist für diesen Fall, des Cylinderstücks $AKH\tau kA$ (Fig. 76. Nr. 1.) d. h. in (Fig. 77) des mit eben den Buchstaben bezeichneten Gewölbestücks Inhalt =

$= \text{tang}\,\eta\,((\tfrac{1}{2}r^2\,\text{Bog}\,\sin\tfrac{k}{r} - \tfrac{1}{2}gk)\,r - \tfrac{1}{3}k^3)$
wenn KH $=$ k; KC $=$ g; AC $=$ r und der Winkel kAK $= \eta$ ist.

Nun ist aber $\frac{r^2}{2}$ B sin $\frac{k}{r}$ — $\frac{1}{2}$ g k = der Fläche des Ausschnitts ACH — der Fläche des Dreyecks KCH = der Fläche des Segments AKH. Hieraus ergiebt sich also ohne weitere Erläuterung der Beweis der Vorschrift (10).

§. 157.

Zusatz I.

Verlangt man den innern Raum des Kreuzgewölbes über dem Dreyeck AkB = 2. AkK (Fig. 77.) so würde man die im vorigen §. (9. 10) gefundenen Ausdrücke nur dupliren d. h. in (9) statt der Fläche des Quadranten AKH nur die Fläche des Halbkreises oder der halben Ellipse AHB, und statt des Dreyecks AKk nur das Dreyeck AkB setzen dürfen, wo denn im Falle AHB eine halbe Ellipse ist, AHB $= \frac{1}{2}\pi$. AK. KH ist aus (§. 40. 6.)

§. 158.

Zusatz II.

Ist (Fig. 77) die Grundfläche BAOL rc. eines Kreuzgewölbes aus lauter gleich großen Dreyecken wie AkB = AkO = OkL rc. zusammengesetzt, also

also das Kreuzgewölbe regulär, so darf man den Inhalt eines solchen Stücks wie AkBHr, nur mit der Zahl n aller Seiten des Polygons BAOL ꝛc. multipliciren, um des ganzen Gewölbes innern Raum zu erhalten.

§. 159.

Anmerkung.

Aus diesen allgemeinen Vorschriften lassen sich leicht besondere herleiten. Z. B. wenn die Grundfläche BAOL ein Quadrat und BHA, ARO ꝛc. Halbkreise wären; so hätte man eine Fläche wie $AHB = \frac{1}{2}\pi . KH^2$, und in diesem Falle wegen $AK = KH = Kk$, $\triangle AkB = AK^2$, mithin das Gewölbestück über dem $\triangle AkB = \frac{1}{2}\pi . KH^2 . Kk - AK^2 \frac{2}{3} KH$ d. h. weil $AK = KH = Kk$, das Gewölbestück $= \frac{1}{2}\pi . AK^3 - \frac{2}{3} AK^3 = (\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}) . AK^3$, welches viermal genommen des ganzen Gewölbes Inhalt $= (2\pi - \frac{8}{3}) . AK^3 = 3{,}6164 . AK^3$ geben würde.

Andere besondere Fälle überlasse ich dem eigenen Nachdenken der Leser.

§. 160.

Aufgabe.

Die krumme Oberfläche AHk eines Kreuzgewölbestücks wie (§. 156.) zu finden.

Auf-

Auflösung.

Erster Fall. 1. Wenn der Gewölbebogen AH ein elliptischer Quadrant, und die halbe große Axe = KH, die halbe kleine = AK ist.

2. Man berechne die Länge des elliptischen Bogens AH = s aus AK und KH, oder suche die Länge desselben, so gut sich thun läßt, durch unmittelbare Messung.

3. Hierauf suche man einen Bogen = φ, dessen Cosinus = $\frac{AK}{KH}$, und drücke diesen Bogen in Decimaltheilen des Halbmessers aus (§. 31. IV.), so ist der Flächenraum

$$AH\tau = Kk . s - \tfrac{1}{2} Kk \left(AK + \frac{\varphi}{\sin\varphi} . KH\right)$$

Zweyter Fall. 4. Wenn der Gewölbebogen AH ein elliptischer Quadrant ist, dessen halbe kleine Axe jetzt = KH und die halbe große = AK ist.

5. Man suche eine Zahl m = $\frac{AK}{KH}$ und aus dieser eine andere n = $\sqrt{(m^2 - 1)}$, suche hierauf aus den Tafeln der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen den log (m + n), so ist der Flächenraum

$$AH\tau = Kk.s - \tfrac{1}{2}Kk(AK + \frac{\log(m+n)}{n} . KH)$$

Dritter Fall. 5. Wenn der Gewölbebogen AH gothisch, und also ein Kreisbogen ist, dessen Sinus $= KH$, und Halbmesser $= AC$.

6. Man berechne die Länge des Bogens AH aus seinem Sinus KH und Halbmesser AC, so ist die krumme Fläche

$$AH\tau = (\text{Bog}\, AH - KH) . AC \cot AkK$$

wo denn der Winkel AkK aus $\tan AkK = \frac{AK}{Kk}$ gefunden werden kann.

Beweis.

7. **Für den Fall I.** Wenn man sich das erwähnte Gewölbestück AKHτkA wieder als das mit eben den Buchstaben bezeichnete Cylinderstück (Fig. 76. Nr. I.) gedenkt, so ist die krumme Fläche AHτ = der cylindrischen Fläche AHτL weniger der Fläche des halbhufförmigen Abschnitts ALτ d. h. den elliptischen Quadranten AH $= s$ gesetzt, die Fläche

$$AH\tau = H\tau . s - AL\tau = Kk . s - AL\tau.$$

8. Aber der halbhufförmige Abschnitt ALτ hat zu seiner Grundfläche den elliptischen Quadranten Lkτ = AKH = BKQ. Ist demnach

KH = QK die halbe große Axe, und AK die halbe kleine, so setze man in die Formel (§. 71. 10.) das dortige $a = QH = 2 . KH$, und $c = AB = 2 . AK$, so wie den Neigungswinkel kAK oder $LkA = \eta$, so wird wegen $\tan g \eta = \frac{Kk}{AK}$ die dem elliptischen Quadranten $L\tau$ oder BQ entsprechende krumme Fläche $AL\tau =$

$$\tfrac{1}{2}Kk\left(AK + \frac{KH^2}{\sqrt{(KH^2 - AK^2)}} \mathfrak{B}\sin \frac{\sqrt{(KH^2 - AK^2)}}{KH}\right).$$

9. Nun setze man

$$\frac{\sqrt{(KH^2 - AK^2)}}{KH} = \sin \varphi$$

so ist $\frac{AK}{KH} = \cos \varphi$; und $\varphi = \mathfrak{B}\cos \frac{AK}{KH} =$

$\mathfrak{B}\sin \frac{\sqrt{(KH^2 - AK^2)}}{KH}$. Ferner

$$\frac{KH^2}{\sqrt{(KH^2 - AK^2)}} = \frac{KH}{\sin \varphi}.$$

10. Substituirt man nun diese Werthe in den Ausdruck für die krumme Fläche $AL\tau$ (8) und darauf den für $AL\tau$ erhaltenen Werth in (7), so ergiebt sich die Formel (3).

11. Für den Fall II. Ist QH die kleine Axe und AB die große, und nach (§. 71. 3.) (das dortige $c = QH = 2 KH$ und $a = AB =$

$= 2 . AK$ gesetzt) die krumme Fläche über dem Quadranten $L\tau$ oder BQ d. h. $AL\tau =$

$$\frac{1}{2}Kk\left(AK + \frac{KH^2}{\sqrt{(AK^2 - KH^2)}} \times \log\left(\frac{\sqrt{(AK^2 - KH^2)}}{KH} + \frac{AK}{KH}\right)\right).$$

12. Man setze nun $\frac{AK}{kH} = m$ so wird

$$\frac{\sqrt{(AK^2 - KH^2)}}{KH} = \sqrt{(m^2 - 1)} = n,$$ und

nach gehöriger Substitution die krumme Fläche

$$AL\tau = \frac{1}{2}Kk\left(AK + \frac{KH . \log(m+n)}{n}\right)$$

Mithin die Fläche $AH\tau$ (7) wie es die Vorschrift (4) angiebt.

13. Für den Fall III. ist der Beweis leicht aus (§. 71. 19.) abzuleiten.

§. 161.
Zusatz I.

Ist der Bogen AH ein Kreisquadrant, so wird in (3) $AK = KH$ und $s = \frac{1}{2}\pi . AK$; da nun zugleich für diesen Fall $\varphi = 0 = \sin\varphi$, und $\frac{\varphi}{\sin\varphi} = 1$ wird, so hat man aus (3) die Fläche

$AH\tau = Kk(\frac{1}{2}\pi - 1) KH = 0,5707 .. Kk . KH.$

Eben

Eben dieser Ausdruck läßt sich auch aus (§. 160. 6.) herleiten, wenn man setzt, daß C in K fällt und folglich AK = KH = AC ist.

§. 162.

Zusatz II.

So wie nach den gegebenen Vorschriften die krumme Oberfläche AHτ, welche gleichsam den Triangel AKk in der Grundfläche überwölbt, gefunden worden ist, so können auf eine ähnliche Art die den Dreyecken AkK′, K′kO′ u. s. w. zugehörige Gewölbeflächen AtR, RτO u. s. w. berechnet werden, und wenn diese Dreyecke alle einander gleich und ähnlich sind, also die Grundfläche BAOL rc. ein reguläres Polygon ist, so braucht man nur eine Fläche wie AHτAH, so oft zu nehmen, als so viel Seiten AB das Polygon hat, so erhält man die ganze Oberfläche des Kreuzgewölbes.

§. 163.

Aufgabe.

Den massiven Theil eines Kreuzgewölbes zu finden.

Aufl. 1. Wenn Fig. 77. AH ein elliptischer oder auch Kreisquadrant ist, und dasselbe auch von dem innern Gewölbebögen 𝔄𝔋 der Fall ist, so ziehe man durch 𝔄 in dem Dreyecke AKk die Linie 𝔄𝔨 parallel mit Ak, dann

8. Der Werth von F′ wird nach einer der für F (6) angegebenen ähnlichen Formel gefunden, nemlich

$$F' = \alpha\varkappa\eta \,.\, k\varkappa - \triangle\, \alpha\varkappa k \,.\, \tfrac{2}{3}\varkappa\eta.$$

Aber die Fläche des Quadranten $\alpha\varkappa\eta$ = der Fläche des Quadranten $\mathfrak{A}K\mathfrak{H}$; ferner $k\varkappa = Kk - K\varkappa = Kk - \mathfrak{A}\alpha$ und $\varkappa\eta = K\mathfrak{H}$; $\triangle \alpha\varkappa k = \triangle \mathfrak{A}K\mathfrak{k}$ (wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{k}$ parallel mit Ak) demnach auch

$$F' = \mathfrak{A}K\mathfrak{H} \,.\, (Kk - \mathfrak{A}\alpha) - \triangle \mathfrak{A}K\mathfrak{k} \,.\, \tfrac{2}{3}K\mathfrak{H}.$$

9. Ferner die Cylinderscheibe

$$F'' (7) = \mathfrak{A}K\mathfrak{H} \,.\, \mathfrak{A}\alpha$$

10. Demnach der körperliche Inhalt (7) $= F' + F'' = \mathfrak{A}K\mathfrak{H} \,.\, Kk - \triangle \mathfrak{A}K\mathfrak{k} \,.\, \tfrac{2}{3}K\mathfrak{H}$.

11. Und folglich das massive Gewölbestück (5) $= F - (F' + F'')$ = dem Ausdrucke wie er in (1) angegeben ist, wenn man sich nunmehr zugleich das Gewölbestück (Fig. 76. Nr. 2.) wieder in der wahren Lage (Fig. 77.) gedenkt.

Auf eine ähnliche Weise rechnet man in (Fig. 77.) für jedes andere Gewölbestück wie $AR\tau$, $OR\tau$ u. s. w. und findet auf diese Weise den massiven Theil des ganzen Gewölbes.

12. Ist die Grundfläche des Gewölbes eine reguläre Figur, so sind alle Stücke wie $AH\tau$, $AR\tau$ ꝛc. einander gleich, daher denn ein solches

Stück

Stück wie (11) nur so viele Mahle genommen werden darf, als es an dem ganzen Gewölbe vorkömmt, z. B. 8mahl, wenn die Grundfläche AOLB ein Quadrat wäre.

13. Besondere Formeln für

Einzelne Fälle

wird man aus dem allgemeinen Ausdrucke (12) leicht ableiten können. Z. B. wenn die Grundfläche AOLB ein Quadrat, und die Gewölbehöhen AH, 𝔄𝔋 Kreisquadranten von den Halbmessern KH = KA = r und K𝔄 = K𝔋 = ρ wären. Dann hätte man

$AKH = \frac{1}{4} r^2 \pi$; $\triangle AKk = \frac{1}{2} r^2$;
$𝔄K𝔋 = \frac{1}{4} \rho^2 \pi$; $\triangle 𝔄K\mathfrak{k} = \frac{1}{2} \rho^2$,

wegen Kk = r und K𝔨 = ρ.

Diese Werthe in (12) substituirt geben für das massive Stück AH den Werth $\frac{1}{4}\pi(r^2 - \rho^2)r - \frac{1}{3}(r^3 - \rho^3)$.

14. Setzt man $r = \rho + e$, so daß e die Dicke des Gewölbes bezeichnet, so ist $\rho = r - e$ und folglich der massive Theil

$$AH = (\tfrac{1}{2}\pi - 1)r^2 e + (1 - \tfrac{1}{4}\pi) r e^2 - \tfrac{1}{3} e^3$$
$$= 0{,}5707 \ldots r^2 e + 0{,}2146 \ldots r e^2 - \tfrac{1}{3} e^3$$

15. Um des ganzen Gewölbes massiven Inhalt zu finden, würde man den Ausdruck (13) oder (14) nur noch mit 8 multipliciren (12).

16. Wären AH, 𝔄ℌ elliptische Quadranten, und die Grundfläche ABOL ein Quadrat, so sey $KH = b$; $K\mathfrak{H} = \beta$; $KA = a$; $K\mathfrak{A} = \alpha$. Dann hat man den elliptischen

Quadranten $AKH = \frac{1}{4}\pi . ab$

$\mathfrak{A}K\mathfrak{H} = \frac{1}{4}\pi . \alpha\beta$

Das Dreyeck $AKk = \frac{1}{2}a^2$; $\Delta\mathfrak{A}Kk = \frac{1}{2}\alpha^2$

und folglich den massiven Theil

$$AH\tau = \frac{1}{4}\pi a(ab - \alpha\beta) - \frac{1}{3}(a^2b - \alpha^2\beta),$$

woraus sich denn wie in (15) des ganzen Gewölbes massiver Theil ergiebt.

17. Wenn das Kreuzgewölbe gothisch ist §. 156. 10. so könnte man eben so wie in (5) den massiven Theil des Gewölbestücks $AH\tau$ mit Zuziehung der Formeln (§. 156. 10. ff.) finden. Da aber die Rechnung leicht ist, so will ich, um nicht weitläuftig zu seyn, bloß die Formel für den massiven Theil $AH\tau$ hersetzen, und die Deduction dieser Formel aus den angegebenen Gründen einem jedem selbst überlassen. Es sey der Halbmesser CA des äußern Bogens $AH = r$, der Halbmesser des innern $\mathfrak{A}\mathfrak{H} = \rho$, die untere Dicke $\mathfrak{A}A$ des Gewölbes $= e$, so findet sich der massive Theil $AH\tau =$

$$\left(\left(AKH . r - \mathfrak{A}K\mathfrak{H}(\rho + e)\right) - \frac{1}{3}(KH^3 - K\mathfrak{H}^3)\right)\frac{Kk}{KA}$$

Bey

Bey der Entwickelung dieser Formel ist zugleich noch die Bemerkung benützt worden, daß in (Fig. 76. Nr. 2.) die Höhe $\mathfrak{A}a$ des Cylinderstücks F'' (9) welches auch bey diesem Falle in Betrachtung kömmt $= \frac{A\mathfrak{A} \cdot Kk}{KA}$ ist, wegen der Aehnlichkeit der beyden Dreyecke $A\mathfrak{A}a$, AKk.

18. Sind beyde Bögen AH, $\mathfrak{A}\mathfrak{H}$, aus einerley Mittelpunkte C beschrieben worden, und folglich das Gewölbe überall von gleicher Dicke $= e$, so ist in (17) überdem $p + e = r$; und für diesen Fall der massive Theil $AHr =$

$$\left((AKH - \mathfrak{A}K\mathfrak{H})r + \tfrac{1}{3}(KH^3 - K\mathfrak{H}^3)\right)\frac{Kk}{KA}$$

Die Flächen der Kreissegmente AKH, $\mathfrak{A}K\mathfrak{H}$, können denn in diesen Formeln auf die bekannte Art berechnet werden, wenn für diese Bögen die Sinusse und Quersinusse, z. B. KH, AK für den Bogen AH, gemessen worden sind.

19. Wenn ein Gewölbe nicht beträchtlich dick ist, so kann man ohne großen Fehler den massiven Theil auch dadurch finden, daß man die Gewölbefläche in die Dicke des Gewölbes oder in die mittlere Dicke, wenn es unten dicker als oben seyn sollte, multiplicirt, wo

 denn

denn die Gewölbeflächen aus (§. 160 ꝛc.) genommen werden können.

Z. B. für das Gewölbestück (13) war der massive Theil $AHa = 0{,}5707\, r^2 e + 0{,}2146\, re^2 - \frac{1}{3} e^3$.

Die Oberfläche desselben fand sich in (§. 161) $= 0{,}5707 \cdot r^2$, wegen $Kk = KH = KA = r$ (13) welche in die Dicke e des Gewölbstücks multiplicirt, den Werth $0{,}5707\, r^2 e$ giebt. Dieser ist von dem wahren Werthe des Gewölbestücks (4) nur um $0{,}2146 \cdot re^2 - \frac{1}{3} e^3$ unterschieden, welcher Unterschied desto weniger beträgt, je kleiner die Gewölbedicke e ist.

Die bisher gegebenen Vorschriften durch Zahlenbeyspiele zu erläutern, würde eine unnütze Verschwendung des Raumes seyn, da ich voraussetze, daß ein jeder, welchem Gewölbe zu berechnen vorkommen, nach einer deutlich aus einander gesetzten Formel muß rechnen können.

§. 164.

Anmerkung.

So finde ich es denn unnöthig, auch für die Berechnung anderer Gewölbe noch besondere Regeln beyzufügen. Wie nun aber nach diesen Vorschriften die Gewölbe gründlich und sicher in Absicht auf die dazu erforderlichen

Bau-

Baumaterialien, Arbeitslohn u. s. w. zu taxiren sind, gehört nicht hieher, und muß solches noch mit Zuziehung anderer Umstände beurtheilt werden, worüber man in Meerweins u. a. Schriften das Weitere nachsehen kann. Immer wird aber dabey eine richtige Berechnungsweise des geometrischen Inhalts der Gewölbe zur Grundlage dienen, daher ich mich bemüht habe, solche bey einigen der vorzüglichsten und bekanntesten Gewölbearten mit demjenigen Detail zu entwickeln, daß Baumeister sehr leicht nach einigem Nachdenken auch für andere Fälle die Auflösung finden werden.

So giebt es denn auch Gewölbe, welche **beschnittene Gewölbe** genannt werden, weil ein Theil ihrer Dicke, durch Eingreifen in ein anderes Gemäuer, von ihnen gleichsam abgeschnitten wird, welcher Theil denn besonders berechnet, und bey der Taxation in Erwägung gezogen werden muß, wie wenn z. B. (Fig. 79) bey einem Tonnengewölbe, der Theil abc, oder edf, in eine neben dem Gewölbe herlaufende Mauer abmn, degh eingriffe, und man nur den massiven Theil bcfd verlangte. In diesem Falle würde man denn begreiflich nur von dem ganz massiven Theile des Gewölbes zwey Prismata abziehen dürfen, welche die Abschnitte abc, edf zu ihren Grundflächen, und die Länge des Tonnengewölbes zu ihrer

 Höhe

Höhe haben würden, und so in andern Fällen. Aus dem Profile des Gewölbes wird man denn leicht Mittel finden, die Flächenräume abc, edf, mit der Genauigkeit zu berechnen, als bey solchen Dingen hinlänglich ist.

Von Gewölben welche sich in eine Ründung herumziehen, findet man (§. 120. II. Beysp. 7.) einige Fälle, woraus man leicht weiter, etwa nur für einen Theil eines solchen Gewölbes, die Vorschriften ableiten kann.

Neuntes Kapitel.

Von der Berechnung der Fässer.

§. 165.

1. Die meisten Fässer gehören zur Classe der runden Körper, und lassen sich folglich nach den Vorschriften des sechsten Kapitels berechnen, wenn man die krumme Linie weis, durch deren Umdrehung man sich die innere bauchichte Höhlung des Fasses als entstanden gedenken kann. Man nennt diese krumme Linie die Faßlinie, und die gerade Linie, um welche man sich dieselbe als drehend gedenkt, die Axe des Fasses, welche denn durch die Mittelpunkte der kreisförmigen Boden des Fasses gehen wird. Jeder Schnitt durch die Axe des Fasses, wird dann die innere Fläche des Fasses in jener krummen Linie schneiden, welche der innern Bauchung des Fasses zur Grundlage diente, und nach welcher krummen Linie dann die sogenannten Dauben des Fasses oder die Bretter, (Tafeln, Taufeln) welche durch hölzerne oder metallene Reife zusammengehalten, den ganzen Körper des Fasses zwischen den Böden desselben bilden, nach gewissen Regeln gekrümmt werden müssen.

2. Frey-

... sind die Fässer nicht immer so ... daß sie innen eine stetige und ... Rundung darstellten, weil die ... bald etwas dicker bald etwas dünner ... nicht durchaus immer von gleicher ...nung ausfallen, und daher an der innern ...che bald hie bald dort mit ihrer Dicke ... hervorstehen, und eine unregelmäßige ... der Continuität mehr oder weniger abweichende innere Fläche bilden.

3. Aber man setzt diese und mehr andere in der Ausübung unvermeidliche Abweichungen von einer regelmäßigen innern Bildung des Fasses beyseite, und nimmt an, daß die innere Fläche vollkommen diejenige Rundung haben würde, die ihr als einer geometrischen ununterbrochenen, durch die Umdrehung einer angenommenen Faßlinie um ihre Axe entstandenen Fläche, entsprechen müßte, und sucht nun die Regeln zu bestimmen, nach dieser oder jener Voraussetzung in Absicht auf die Faßlinie oder Krümmung der Dauben, den Inhalt des Fasses mit möglichster Genauigkeit zu erhalten, und auch dabey die Vorschriften möglichst einfach für die Ausübung einzurichten, weil diejenigen, welche sich mit dem so genannten Visiren der Fässer abgeben, oft weder Kenntniß genug haben, nach etwas zusammengesetzten Formeln zu rechnen, noch auch würklich

lich darnach rechnen können, wenn das Geschäft des Bistrcts sehr dringend ist.

4. Aber freylich wird dieß Geschäft oft Leuten aufgetragen, welche gar zu wenig mathematische Kenntnisse haben, um dasselbe mit Einsicht und Genauigkeit ausüben zu können; und man hat ihnen daher oft Vorschriften zur leichtern Ausübung dieses Geschäftes gegeben, welche nicht immer der besten Theorie entsprechen. Aber wenn sie auch nur diese mit Genauigkeit auszuüben wüßten, und nicht aus Nachlässigkeit und Unwissenheit weit größere Fehler begiengen, als diejenigen sind, welche auch bey der schlechtesten Theorie, wenn sie nur richtig ausgeübt würde, kaum statt finden können. So hat man dieß Geschäfte zu einem Handwerke herabgewürdigt, welches doch im Handel und Wandel so wichtig ist, und bey dessen unrichtiger Verwaltung ein jeder leiden muß, der nicht bloß Wassertrinker ist, und seinen Wein mit starkem Licente bezahlen muß. Ich dächte man könnte von Leuten, die mit mathematischen Ausübungen Geld erwerben wollen, immer fordern, daß sie ihren Kopf zu etwas Theorie anstrengten. Warum soll der Mathematiker Arbeit und Nachdenken anwenden, dem so genannten Praktiker Vorschriften zu geben, die dieser nun ohne Arbeit und Nachdenken brauchen mag? Nicht einmahl Dank wird mit

dieser

dieser Gutherzigkeit erworben. Denn eben weil sich die Mathematiker häufig so herabgelassen haben, wird vergessen, daß Mathematik, oft tiefe, zur Erfindung und bequemen Einkleidung dieser Regeln nöthig war, und nun hält jeder vom Cameralisten bis zum Weinvisirer herunter, Mathematik für unnütze Grillenfängerey. (Kästner, über die Ausmessung bauchichter Körper, nebst Anwendung auf die Visirkunst im Leipz. Magaz. für reine und angewandte Mathematik. I. St. 1787.

5. Ich werde mich nun bemühen, die Vorschriften zur Berechnung der Fässer so einfach als möglich darzustellen, aber vorher einiges die Construction der Fässer selbst betreffendes, vorausschicken.

Einige die Construction der Fässer betreffende Sätze und Erklärungen.

§. 166.

I. Es sey (Fig. 80, Tab. VII.) PALNBS der Durchschnitt eines Fasses mit einer durch die Axe GQ desselben hindurchgeführten Ebene, so sind die krummen Linien PAL, SBN die Krümmungen der Dauben (§. 165. 1.); LN, PS die Durchmesser der Böden; AB die größte Weite des Fasses, oder wenn A das Spundloch ist, die Spundtiefe.

II.

II. Die über den Faßboden noch hinausgehenden Enden der Dauben, wie Ll, Nn, werden Köpfe oder Frösche genannt, und ln die Weite des Fasses an den Köpfen. Selten beträgt die Höhe Ll eines solchen Kopfes $\frac{1}{16}$ der ganzen Daubenlänge.

III. Bey großen Fässern sind die Böden LN, PS gewöhnlich etwas gesenkt, d. h. sie bilden nach dem innern Raum des Fasses eine flache cylindrische Höhlung oder Wölbung, wodurch die Dauben in einer bessern Spannung erhalten werden, und das Faß überhaupt eine grössere Festigkeit erhält. Dadurch fallen nun nicht alle Dauben genau von gleicher Länge aus (wenn nemlich, wie gewöhnlich, die Köpfe der Dauben von gleicher Höhe bleiben sollen) sondern zwey Dauben werden die kürzesten, und zwey die längsten, und die übrigen fallen zwischen diese. Man setzt die Böden so ein, daß die so genannten Lager- und Spunddauben die kürzesten, und die Seitendauben, welche von jenen um $\frac{1}{4}$ des Umfangs des Fasses abstehen, die längsten werden. Die Senkung oder Vertiefung der Böden läßt man einem Krümmungshalbmesser von 30 bis 50 Fuß entsprechen.

IV. Unter der Spitzung eines Fasses verstehen die Böttcher oder Faßbinder (Küfer) den Unterschied zwischen der Bauchweite oder Spundtiefe

tiefe AB des Fasses, und seiner Weite ln oder $\lambda\nu$ über den Köpfen.

V. Diesen Unterschied lassen die Böttcher der Regel nach allemahl einem aliquoten Theile der Daubenlänge $\lambda A l$ gleich seyn, und zwar der kürzesten Daubenlänge, wenn nicht alle Dauben von gleicher Grösse sind. (III.)

VI. Man nenne diese Daubenlänge $= L$, und einen aliquoten Theil z. B. den mten Theil derselben $= \frac{L}{m} = z$, so wird z auch ein Faßstich genannt. Demnach die Spitzung des Fasses $= z$.

VII. Das Verhältniß der Daubenlänge L zu der Weite $ln = l$ über den Köpfen, nennt man das Fundamentalverhältniß des Fasses. Ist demnach $L : l = \mu : 1$; so hat man

$$L = \mu . l \text{ d. h. } m . z = \mu . l \text{ (VI.)}$$

Mithin die Weite über den Köpfen oder $l = \frac{m}{\mu} z = \frac{m}{\mu}$ Stiche, und die Bauchweite AB welche l' genannt werde $= l + z = \left(\frac{m}{\mu} + 1\right) z$ $= \frac{m+\mu}{\mu} z$ d. h. $l' = \frac{m+\mu}{\mu}$ Stichen.

VIII.

VIII. Aus der gegebenen Spitzung des Fasses = z, und den Zahlen m, μ ergiebt sich also die

Daubenlänge L = m . z (VI.)

Bauchweite $L' = \frac{m + \mu}{\mu} z$ (VII.)

Kopfweite $l = \frac{m}{\mu} z$

Wie viel Stiche auf die Bauchweite kommen d. h. die Zahl $\frac{m + \mu}{\mu} = n$ nennt man auch die Stichzahl des Fasses.

IX. Aus der gegebenen Stichzahl n des Fasses, und dem Fundamentalverhältniß $\mu : 1$ findet man $m = (n - 1) \mu$ d. h. was für ein aliquoter Theil der Daube zu einem Stiche genommen werden muß.

Z. B. für $\mu : 1 = 3 : 2$ d. h. für $\mu = \frac{3}{2}$ und $n = 7$ wird $m = \frac{6 . 3}{2} = 9$. Also der Faßstich $= \frac{1}{9}$ der Daubenlänge (VI.).

X. Um einem Fasse die gehörige Spitzung zu verschaffen, müssen die einzelnen Dauben gleichfalls ihre Spitzung erhalten d. h. wenn (Fig. 81. Tab. VII.) eine Daube, ehe sie gekrümmt worden ist, darstellt, so muß ihre größte Breite CD in

XVI. Die Gleichung

$$\frac{\pi . z}{q} = \mathfrak{z} \text{ (XII. XIII. XV.)}$$

zeigt das Verhalten zwischen dem Faßstiche z, und dem Modelstiche $\mathfrak{z}$, und weil $\mathfrak{z} = \frac{1}{n}$ CD, so zeigt die Gleichung

$$\frac{\pi . z}{q} = \frac{1}{n} \text{CD}$$

das Verhalten zwischen dem Faßstiche z und der größeren Daubenbreite CD, durch welche Gleichungen denn eine Grösse aus der andern gefunden werden kann, so wie denn für die übrigen Faßdimensionen auch noch die obigen Gleichungen (VIII.) beygefügt werden können.

XVII. Ist die Spitzung eines Fasses oder der Faßstich grösser als $\frac{1}{6}$ der Daubenlänge L, also z $> \frac{1}{6}$. mz mithin m < 6, so muß der Faßbinder beym Aufsetzen des Fasses, d. h. wenn alle Dauben sich bis zum Berühren ihrer Kanten gehörig krümmen, und den ganzen Faßkörper bilden sollen, Reif an Reif an einander treiben. Da hiedurch alles in eine zu starke Spannung kömmt, und das Faß leicht dem Springen ausgesetzt ist, wenn die Reife nicht recht dauerhaft sind, so nimmt man allemahl m wenigstens = 6. Dieß giebt denn bey einem gegebenen Fundamentalverhältniß eines Fasses

$= \mu : 1$, für die Stichzahl desselben wenigstens $n = \frac{6+\mu}{\mu}$. Also den Modelstich $z = \frac{1}{n}$ CD höchstens $= \frac{\mu}{6+\mu}$. CD, so wie den Faßstich z höchstens $= \frac{\mu}{6+\mu}$ der Bauchweite.

XVIII. Was die Kanten ECH, FDG einer noch geraden Daube, für eine Gestalt haben müssen, daß wenn nachher die Dauben gekrümmt, und das Faß aufgesetzt wird, alle Dauben sich gehörig zu einem runden Fasse zusammenfügen, darüber ließen sich theoretische Untersuchungen anstellen, die aber hier für meinen Zweck zu weitläuftig sind, und worüber man verschiedenes bey Hrn. Prof. Späth in dessen practischer Abhandl. von runden, ovalen, eyförmigen ꝛc. Fässern. Nürnberg 1794. §. 3. ꝛc. nachsehen kann.

Ich bemerke hier nur, daß die krummen Linien ECH, FDG, nach der diese Kanten gebildet seyn müssen, doch wohl selten ganz genau nach der Theorie genommen werden, daß aber die Böttcher gewöhnlich die Dauben bey M, N, dem so genannten Halse derselben, auf der Fügebank etwas hohl stoßen, und zu diesem Zweck die Fügebank selbst, wie Hr. Prof. Späth anführt, darnach eingerichtet ist. Dieß läßt

denn vermuthen, daß diese Krümmungen EMCMH sich etwa einer Conchoide nähern mögten. In vielen Fällen mögen sie aber auch wohl nicht sehr von einem Kreisbogen abweichen.

XIX. So mögte es denn im allgemeinen auch etwas schwer halten, genau die Krümmung zu bestimmen, welche die Dauben selbst nach ihrer Länge annehmen, wenn sie bis zum Berühren ihrer Kanten zusammengetrieben werden, also die eigentliche Figur des bereits verfertigten Fasses d. h. in dem oben angeführten Profil Fig. 80. die krummen Linien PAL, SBN anzugeben. Die Erfahrung hat gelehrt, daß wenn man sie circulär oder conchoidisch annimmt, der Inhalt des nach dieser Voraussetzung berechneten Fasses von dem wahren Inhalte am wenigsten abweicht.

§. 267.

Aufgabe.

Unter der Voraussetzung, daß die Krümmung PAL eines Fasses circulär ist, den körperlichen Inhalt desselben zu finden.

Aufl. Es sey also (Fig. 80. Tab. VII.) der Halbmesser CA des Kreisbogens PAL = r die halbe Spundtiefe des Fasses d. h. AK = b,

der

[illegible] ich Halbmesser LG des Bodens, wenn ich jetzt nicht gesenkt (§. 116. III.), sondern ebenda annehme = a. Die halbe Länge QG des Fasses oder GK = k, so ist, wenn man LM mit GK parallel zieht, auch LM = k und AM = b — a, welchen Unterschied ich mit c bezeichnen will. Endlich sey der Inhalt des Fasses von dem Boden LN bis an die Spundtiefe AB = Z.

2. So hat man nach (§. 117. 6.)

$$Z = \pi k \left((r-b)^2 + r^2 - \tfrac{1}{3}k^2 - (r-b)\sqrt{(r^2-k^2)} \right) - \pi (r-b)\, r^2 \cdot \mathfrak{B} \sin \frac{k}{r}$$

Weil nemlich in (§. 117. I. 9.)

das dortige	x	b oder CK	$ALHB = Z$
hier	k	$r - b$	$ALNB = Z$

3. Um die (2) gefundene Formel für den halben Inhalt des Fasses, falls man mit dieser rechnen wollte, für die Ausübung noch etwas bequemer einzurichten, kann man in dieselbe statt der Wurzelgrösse $\sqrt{(r^2 - k^2)} = \sqrt{(CL^2 - ML^2)} = CM$, den Werth $AC - AM = r - c$ (1) setzen; auch ist $(r-b)^2 + r^2 = 2r(r-b) + b^2$. Dieß giebt denn nach gehöriger Rechnung $Z = \pi k \left(b^2 - \tfrac{1}{3}k^2 + (r-b)(r+c)\right) - \pi (r-b)\, r^2 \cdot \mathfrak{B} \sin \frac{k}{r}$ welche Formel noch immer sogar weitläuftig nicht ist, den Inhalt des halben Fasses zu be-

rechnet; den Werth von r würde man hiebey aus den Abmessungen des Fasses selbst durch folgenden Ausdruck

$$r = \frac{k^2 + c^2}{2c}$$

finden.

4. Da indessen die Fässer meistens so beschaffen sind, daß die Bögen PAL keine sehr starke Krümmung haben, also AM = c immer in Vergleichung des Halbmessers CA = r sehr klein ist, so kann man sich folgender Näherungsmethode bedienen, den Inhalt des Fasses für die Ausübung hinlänglich genau zu finden.

5. Man setze in den Ausdruck (2) statt $(r-b)^2 + r^2$ den Ausdruck $2r(r-b) + b^2$, und statt $\sqrt{(r^2 - k^2)}$ den Ausdruck

$r\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{r^2}\right)}$, so wird auch

$$Z = (2r(r-b) + b^2)\pi k - \tfrac{1}{3}\pi k^3$$
$$-\pi(r-b)r\left(k\sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{r^2}\right)} + r\,\mathfrak{B}\sin\frac{k}{r}\right)$$

6. Verwandelt man nun die Wurzelgrösse und den Bogen, dessen Sinus $\frac{k}{r}$ ist in Reihen, so erhält man

$k\sqrt{}$

$$k\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{r^2}\right)} = k - \frac{k^3}{2r^2} - \frac{1}{8}\frac{k^5}{r^4} - \frac{1}{16}\frac{k^7}{r^6}\ldots$$

$$r\,\mathfrak{B}\sin\frac{k}{r} = k + \frac{1}{6}\frac{k^3}{r^2} + \frac{3}{40}\frac{k^5}{r^4} + \frac{5}{112}\frac{k^7}{r^6}$$

7. Mithin wenn man diese Reihen zusammen addirt und in (5) substituirt

$$Z = k\pi.\left\{\begin{array}{l} b^2 + \frac{1}{3}bk.\frac{k}{r} + \frac{1}{24}k^2.\frac{k^2}{r^2} \\ + \frac{1}{30}bk.\frac{k^3}{r^3} + \frac{1}{56}k^2.\frac{k^4}{r^4} + \frac{1}{56}bk.\frac{k^5}{r^5} \end{array}\right\}$$

8. Nun ist (3)

$\frac{k}{r} = \frac{2kc}{k^2+c^2} = \frac{\frac{2c}{k}}{1+\frac{c^2}{k^2}}$ d. h. wenn man den Bruch dessen Zähler 1 ist, in eine Reihe $= 1 - \frac{c^2}{k^2} + \frac{c^4}{k^4} - \frac{c^6}{k^6}\ldots$ verwandelt

$$\frac{k}{r} = \frac{2c}{k}\left(1 - \frac{c^2}{k^2} + \frac{c^4}{k^4}\ldots\right) = \frac{2c}{k} - \frac{2c^3}{k^3} + \frac{2c^5}{k^5}$$

Also

$$\frac{k^2}{r^2} = \frac{4c^2}{k^2} - \frac{8c^4}{k^4} + \frac{12c^6}{k^6}\ldots$$

$$\frac{k^3}{r^3} = \frac{8c^3}{k^3} - \frac{24c^5}{k^5}\ldots$$

$\frac{b^4}{?} = \frac{16c^4}{k^4} + \frac{64c^6}{k^6}$ ...

$\frac{b^6}{?} = \frac{32c^6}{k^6}$ ...

wenn man nemlich weil c immer klein gegen k ist, die Glieder weglässt, worin höhere Potenzen von c als die sechste, vorkommen.

9. Setzt man nun diese Werthe in den Ausdruck (?) für T, so findet sich nach einer leichten Rechnung

$$T = \left(b^2 - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{5}c^2 + \tfrac{4}{15}\frac{bc^3}{k^2} - \tfrac{4}{35}\frac{c^4}{k^2} \ldots \tfrac{?}{105}\frac{bc^5}{k^4} \right) \cdot \delta$$

Die drey letzten Glieder dieses Ausdrucks können wir immer ohne merklichen Fehler weggelassen, weil c fast immer kleiner als b ist.

Man setze z. B. $c = \frac{1}{4}b$, so wird $b^2 - \frac{2}{3}bc + \frac{1}{5}c^2 = \frac{203}{240}b^2$ und schon das 4te Glied $+\frac{4}{15}\frac{bc^3}{k^2}$ ... $= \frac{1}{240}b^2 \cdot \frac{b^2}{k^2}$ = einem solchen Theile von der Summe der drey ersten, als der Bruch $\frac{1}{203}\frac{b^2}{k^2}$ angiebt.

Da

Da nun auch, wenn selbst b = k wäre, welches doch nie der Fall ist, das 4te Glied der obigen Reihe nur $\frac{1}{203}$ von der Summe der drey erstern ist, so fehlt man beym Visiren eines Fasses auf 200 Maaß kaum um eines, wenn man schlechtweg es bey den drey erstern Gliedern des obigen Ausdrucks bewenden läßt, und bloß

$$Z = k\pi\left(b^2 - \frac{2}{3}bc + \frac{1}{5}c^2\right)$$

setzt.

11. Dieß ist denn diejenige Formel, welche Lambert (Beyträge zur Mathematik III. Theil. 2. Abh. §. [illegible]) für den Inhalt eines nach einem Kreisbogen gekrümmten Fasses, als eine sehr bequeme und brauchbare Näherung zuerst angegeben hat, wenn k jetzt die ganze Länge des Fasses bedeutet. Die Formel welche er im ersten Theil der Beyträge 2te Abh. §. 17. angegeben hatte, war fehlerhaft, wie ich solches noch ehe Lamberts 3ter Theil der Beyträge zur Mathematik herausgekommen war, dem seel. Hofr. Kästner schon angezeigt hatte. (M. s. Leipz. Magaz. für reine und angewandte Math. 1. St. 1787. S. 4.)

§. 168.

Aufgabe.

Unter der Voraussetzung, daß die Krümmung PAL eines Fasses con-

conchoidisch ist, den körperlichen Raum desselben zu finden.

Aufl. 1. Man setze in §. 121.

das dortige x hier = k

a hier = b

b hier = f

y hier = a

so ist nach der Gleichung der Conchoide (§. 121. 1.)

$$k = \frac{(f+a)\sqrt{(b^2-a^2)}}{a}$$

und der körperliche Inhalt des halben Fasses ABLN oder

$$Z = \pi b^2 f \mathfrak{B} \cos\frac{a}{b} + \frac{(2b^2+a^2)\sqrt{(b^2-a^2)}}{3}.\pi$$

(§. 121. 4.)

2. Oder auch

$$Z = \pi b^2 f \mathfrak{B} \cos\frac{a}{b} + \tfrac{1}{3}\pi\frac{(2b^2+a^2)ka}{f+a}$$

3. Diese Formeln sind schon bequem genug, nach ihnen ein vorgegebenes Faß berechnen zu können. Da aber gewöhnlich b und a nicht viel von einander unterschieden sind, so läßt sich für den Inhalt des Fasses wie im vorhergehenden § eine Näherungsformel am kürzesten auf folgende Art finden.

4. Ich

4. Ich will wieder $b - a = c$ setzen, so ist, wenn man $\mathfrak{B} \cos \frac{a}{b} = \varphi$ setzt

$\frac{a}{b}$ oder $\frac{b-c}{b}$ d. h. $1 - \frac{c}{b} = \cos \varphi$; mithin

$1 - \cos \varphi$ oder $2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2 = \frac{c}{b}$: demnach

$\sin \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{c}{2b}}$ und $\frac{1}{2} \varphi = \mathfrak{B} \sin \sqrt{\frac{c}{2b}}$.

5. Also auch Bog $\cos \frac{a}{b}$ oder

$\varphi = 2 \mathfrak{B} \sin \sqrt{\frac{c}{2b}}$.

6. Ich will $\sqrt{\frac{c}{2b}} = e$ setzen, so hat man

$c = 2be^2$ und Bog $\cos \frac{a}{b} = 2 \mathfrak{B} \sin e$, wo $\mathfrak{B} \sin e$ hier einen Bogen bedeutet, dessen Sinus $= e$ ist.

7. Aus (1) wird

$$f = \frac{ak}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} + a$$

8. Aber $\sqrt{(b^2 - a^2)} = \sqrt{(b^2 - (b-c)^2)}$ $= \sqrt{(2bc - c^2)}$ d. h. wenn man statt c setzt $2be^2$

$$\sqrt{(b^2 - a^2)} = 2be \sqrt{(1 - e^2)}$$

und

und folglich wegen $a = b - c = b - 2be^2 = b(1 - 2e^2)$ der Werth von

$$f = \frac{k(1 - 2e^2)}{2e}(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} - b(1 - 2e^2)$$

9. Ferner in (1)

$$\frac{(2b^2 + a^2)\sqrt{(b^2 - a^2)}}{3} = \left(1 - \frac{4e^2}{3} + \frac{4e^4}{3}\right) 2b^3 e\sqrt{(1 - e^2)}$$

10. Substituirt man nun die (6. 8. 9.) gefundenen Ausdrücke in den Werth von Z (1), so erhält man

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{b^2 (1 - 2e^2)(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{B}\sin e}{e} \\ + \dfrac{2b^3}{k} e\sqrt{(1 - e^2)}\left(1 - \dfrac{4e^2}{3} + \dfrac{4e^4}{3}\right) \\ - \dfrac{2b^3}{k}(1 - 2e^2)\,\mathfrak{B}\sin e \end{array} \right\} . k\pi$$

11. Nun ist, weil e klein ist, beynahe

$\mathfrak{B}\sin e = e + \frac{1}{6}e^3 + \frac{3}{40}e^5 + \frac{5}{112}e^7 \ldots$

$(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \ldots$

$\sqrt{(1 - e^2)} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \ldots$

(Kästners Anal. des Unendl. §§. 281. 50.)

12. Wenn man nun diese Werthe substituirt, so ergiebt sich nach gehöriger Rechnung, die jeder leicht selbst bewerkstelligen kann

$$Z = k\pi \left(b^2\left(1 - \frac{4}{3}e^2 - \frac{4}{5}e^4 - \frac{64}{105}e^6\right)\right) + k\pi\left(\frac{b^3}{k}\,\frac{64}{15}\,e^5 - \frac{b^3}{k}\,\frac{32}{35}\,e^7\right)$$

Wenn man nemlich in der Rechnung alle höheren Potenzen von e, als die in diesem Ausdruck vorkommenden, wegläßt.

13. Stellt man nun den Werth von e^2 wieder her, indem man dafür $\frac{c}{2b}$ setzt, so ergiebt sich

$$Z = k\pi\left(b^2 - \frac{2}{3}bc - \frac{1}{5}c^2 - \frac{8}{105}\frac{c^3}{b}\right) + k\pi\left(\frac{16}{15}\frac{bc^2}{k}\sqrt{\frac{c}{2b}} - \frac{4}{35}\frac{c^3}{k}\sqrt{\frac{c}{2b}}\right)$$

14. Weil nun nicht leicht $c > \frac{1}{4}b$, oder auch $> \frac{1}{4}k$ seyn wird, so kann man in diesem Ausdrucke auch noch füglich die beyden letzten Glieder zur rechten Hand weglassen, weil dadurch auf 800 bis 1000 Maaßeinheiten kaum um eine gefehlt wird, und daher schlechtweg setzen

$$Z = k\pi\left(b^2 - \frac{2}{3}bc - \frac{1}{5}c^2 + \frac{16}{15}\frac{bc^2}{k}\sqrt{\frac{c}{2b}}\right)$$

wo

wo denn, wenn man auch hier das letzte Glied noch weglassen, und bloß

$$Z = k\pi(b^2 + \tfrac{2}{3}bc - \tfrac{1}{3}c^2) \quad \ldots \quad 1$$

setzen wollte, auch nur ohngefähr auf 35 bis 40 Maaßeinheiten um eine würde gefehlet werden.

§. 169.

Anmerkung.

1. Mehrere Schriftsteller, welche Formeln für ein conchoidisches Faß entwickelt haben, z. B. Oberreit (Leipz. Magazin für reine und angewandte Math. I. St. 1787). Martin Müller (Versuch den Inhalt der Fässer durch Anwendung der Muschellinie zu finden. Gröningen 1780) haben sich eben nicht der bequemsten Methode dabey bedient, und daher wegen der eingeschlichenen Rechnungsfehler durchgängig unrichtige Näherungsformeln angegeben. So findet z. B. Oberreit den Werth von Z in meinen Zeichen $= \pi k\,(b^2 - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{255}c^2)$ (a. a. O. S. 92) ein anderes mahl statt des Bruchs $\tfrac{1}{255}$ den Bruch $\tfrac{1}{15}$ (a. a. O. S. 44) und beydes ist zuverläßig falsch. Auch ist seine Methode gar nicht dazu geeignet, ihm bequem nachzuweisen, wo der Rechnungsfehler sich eingeschlichen hat. Daß meine Formel so weit ich sie (§. 168. 13.) angegeben habe vollkommen

Formeln richtig ist, dafür stehe ich. Will man sie nur so weit nehmen, als sie bis auf die ersten drey Glieder in (14) angegeben ist, so erhellet, daß sie mit der für eine kreisförmige Krümmung des Fasses (§. 167. 9.) einerley Form hat, nur mit dem Unterschiede, daß das dritte Glied in (§. 167. 9.) positiv, hier in (§. 168. 14.) aber negativ ist, überhaupt aber beyde Formeln nicht viel von einander abweichen, wie sich denn auch leicht voraussehen ließ.

2. So wird man denn überhaupt finden, daß auch für andere Krümmungen des Fasses keine sehr unterschiedene Formeln zum Vorschein kommen.

Ist z. B. die Krümmung parabolisch, so findet sich

$$Z = \pi k \left(b^2 - \tfrac{2}{3} bc + \tfrac{1}{5} c^2\right)$$

wie bey der kreisförmigen Krümmung.

Für eine elliptische Krümmung

$$Z = \pi k \left(b^2 - \tfrac{2}{3} bc + \tfrac{1}{3} c^2\right).$$

3. Wenn man das Faß, oder vielmehr dessen Hälfte, als einen abgekürzten Kegel betrachtet, wird

$$Z = \pi k \left(b^2 - cb + \tfrac{1}{3} c^2\right)$$

Und wenn man es als einen Cylinder betrachtet, der dem arithmetischen Mit-

tel zwischen zwey andern Cylindern, die die Spundtiefe und die Bodenweite zu ihren Durchmessern haben würden, gleich wäre, so erhält man

$$Z = \pi k (b^2 - bc + \tfrac{1}{2} c^2)$$

Lambert in dessen Beyträgen zur Mathematik III. Th. S. 34.

4. Andere Formeln, nach diesen oder jenen Voraussetzungen, findet man in Hrn. Prof. Späths oben (§. 166. XVIII.) angeführter Schrift §. 12. IX. ꝛc.

Man kann aber diese Formeln füglich entbehren, und es bloß bey derjenigen, welche eine circuläre Krümmung des Fasses voraussetzt, bewenden lassen, man müßte denn aus der Ansicht des Fasses, oder einer sonstigen Untersuchung desselben, besondere Gründe haben, lieber den Ausdruck für ein conchoidisches Faß zu wählen, welches denn der Fall seyn würde, wenn man gar zu deutlich sähe, daß das Faß, nach seinen Köpfen zu, merklich flächer würde, oder gar einwärts gekrümmt zu werden anfienge, wie ich solches bey mehreren zumahl großen Fässern bemerkt zu haben, mich erinnere.

5. Am meisten weichen wohl die Vorschriften (3) von der Wahrheit ab. Die zweyte der daselbst angegebenen, ist bey den Visirern am meisten im Gebrauche, und entspricht dem

wahren

wahren Inhalte eines Fasses noch etwas genauer als die erste.

Nimmt man die Krümmung eines Fasses so gering an, daß z. B. c nur $= \frac{1}{8}$ b wäre, so wird, bey einer kreisförmigen Krümmung, die doch der Wahrheit sehr nahe kömmt,

$$Z = \pi k . \frac{358}{384} b^2$$

Hingegen nach der zweyten Vorschrift in (3)

$$Z = \pi k . \frac{339}{384} b^2$$

Der Unterschied von beyden Werthen ist $= \pi k \frac{19}{384} b^2$ welches von dem ersten Werthe, nach einer runden Zahl, ohngefähr den 20ten Theil beträgt. Man fehlt also auf 20 Maaßeinheiten ohngefähr um eine, wenn man statt der richtigern Formel, welche eine circuläre Krümmung des Fasses zum voraus setzt, sich der gemeinen Regel der Visirer bedient. Der Fehler würde aber begreiflich weit erheblicher seyn, wenn $c > \frac{1}{8} b$, also das Faß mehr Krümmung hätte, als in dem angegebenen Beyspiele.

6. Will man indessen einen Fehler dieser Art beyseite setzen, weil vielleicht wegen (§. 165. 2.) und wegen der Schwürigkeit, die Grössen k, b, c mit gehöriger Genauigkeit zu messen, leicht noch grössere Fehler in der Ausübung statt finden können, so mag man wenigstens bey nicht sehr gekrümmten Fässern immer die gemeine Regel (5) beybehalten.

§. 170.
Zusatz I.

Man setze in die Formel (§. 167. 16.) welche ich künftig bey der Berechnung der Fässer, als eine der Wahrheit sehr nahe kommende, zum Grunde legen werde, b — a statt c, so verwandelt sie sich in

$$Z = \frac{8b^2 + 4ab + 3a^2}{15} . \pi k$$

wo, wenn Z den Inhalt des ganzen Fasses bedeuten soll, statt k nur die ganze Länge des Fasses gesetzt werden muß, vorausgesetzt, daß beyde Böden des Fasses genau einander gleich sind, welches in der Ausübung gewöhnlich angenommen wird.

§. 171.
Zusatz II.

Statt des Ausdrucks im vorhergehenden § kann auch folgender gesetzt werden

$$Z = \left(6b^2 + a^2 + 8\left(\frac{b+a}{2}\right)^2\right) \frac{1}{15} \pi k$$

Setzt man nun $b^2 k\pi$ (d. h. den körperlichen Inhalt eines Cylinders, welcher zu seinem Durchmesser die Spundtiefe des Fasses, also zu seinem Halbmesser die halbe Spundtiefe = b und zu seiner Länge oder Höhe die Länge des

Fasses

Fasses = k haben würde) = F. Dann ferner $a^2 k\pi$ (d.h. einen Cylinder, welcher zu seinem Durchmesser die Bodenweite, also zu seinem Halbmesser die halbe Bodenweite = a und gleichfalls die Länge = k haben würde) = F'.

Endlich $\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 k\pi$ (d. h. einen Cylinder welcher zu seiner Weite das arithmetische Mittel zwischen der Spundtiefe und Bodenweite und die Länge k haben würde) = F'', so wird der ganze Inhalt des Fasses oder

$$Z = \frac{6F + F' + 8F''}{15}.$$

Dieß ist die Formel, wie sie mir zum Visiren der Fässer, vermittelst der sogenannten Visirstäbe, am bequemsten zu seyn scheint, von welchem Verfahren ich hernach noch besonders reden werde. Zur würklichen Berechnung eines Fasses nach geometrischer Methode, würde aber bloß die Formel

$$Z = k\pi(b^2 - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{5}c^2)$$

worin c = b — a ist, ohne weitere Veränderung anzuwenden seyn, und wer noch genauer rechnen will, bediene sich der Formel (§. 167. 9.) oder auch (§. 168. 13.). Ich überlasse es einem Jeden, sich selbst ein Zahlenbeyspiel zu geben, womit ich hier keinen Raum verderben will.

§. 172.

Zusatz III.

1. Da man unter den Grössen k, b, a (§. 167. 1.) diejenigen verstehen muß, welche der innern Höhlung des Fasses entsprechen, so mögte es in der Ausübung nicht immer ganz leicht seyn, sie so genau zu messen, daß man bey der Berechnung des Fasses, auf $\frac{1}{100}$ oder $\frac{1}{200}$ des ganzen Inhaltes desselben, sicher seyn mögte.

2. Ist das Spundloch offen, so wird es wohl keine besondere Mühe kosten, durch Hülfe eines lothrecht in das Faß hineingehaltenen Stabes, die Spundtiefe oder innere Bauchweite $= 2b$ zu messen, indem man an dem Stabe leicht die Stelle wird bezeichnen können, wo die untere Gränze des Spundlochs hintrifft. Oder man bemerke, wo die obere Gränze hintrifft, und ziehe davon die Dicke der Spunddaube, die man leicht wird messen können, ab.

3. Sonst könnte man auch wohl den äußern Umfang der Bauchweite eines Fasses, durch Umschlagung einer Schnur oder eines Riemens messen, und nun aus diesem Umfang, den äußern Bauchdurchmesser berechnen, wovon man demnach nur die doppelte Dicke der Spunddaube, oder noch besser die Summe der Dicken der Spund- und Lagerdaube abziehen dürfte,

um

um den innern Bauchdurchmesser $=2b$ zu erhalten. Dieß Verfahren mögte aber den gemeinen Visirern wohl schon zu weitläuftig seyn.

4. Auf eine ähnliche Weise wie in (3) könnte man auch die Bodenweite finden, wenn nicht in der Gegend wo die Böden eingesetzt sind, sich gewöhnlich Reife befänden. Einen Maaßstab kann man auch nicht bequem an die Böden anlegen, weil die Köpfe der Dauben unter einem spitzigen Winkel über den Böden hervorstehen. Ich denke jedoch nicht, daß es jemanden viel Mühe machen wird, auf irgend eine andere Art die Bodenweite $=2a$ zu messen.

Sonst könnte man sich auch eines Instrumentes etwa wie (Fig. 83.) zum Abfassen der Bodenweite bedienen. cb ist ein prismatischer Stab, welcher bey b in eine scharfe Kante zuläuft, LR eine längst cb verschiebbare Hülse, durch welche der Stab geht, und N eine Schraube, die Hülse an dem Stabe zu befestigen; aß ein schief an die Hülse befestigtes Stäbchen, dessen scharf zulaufende Kante β, sich an den einen Endpunkt des Bodendurchmessers durch Verschiebung der Hülse bringen läßt, indem das Ende b des prismatischen Stabes cb an den andern Endpunkt des Bodendurchmessers gebracht wird. Dieß Werkzeug ist in der Encyclopaedie methodique, welche 1785 zu Paris herausgekommen ist, unter dem Artikel

Jaugeage in dem Tom. II. Mathematiques, angegeben. (Man s. auch Eytelwein in der unten §. 175. angeführten Schrift.)

5. Ebendaselbst auch eine Vorrichtung, die Länge des Fasses, oder die Entfernung der Böden, zu messen. CD ein Maaßstab (Fig. 82) an seinem Ende mit einem rechtwinklichten Ansatz CEP versehen. F der Anfangspunkt des Maaßstabes, und CF = EP. GHLV ein rechtwinklichter längst CD verschiebbarer Theil, und GH = LV.

Es ist also klar, daß wenn V, P bis an des Fasses Böden geschoben worden sind, und CD die Spunddaube berührt, die Weite FG auf dem Maaßstabe, der Entfernung der äußern Fläche der Böden gleich seyn wird. Davon ziehe man ab die doppelte Dicke eines Bodens, die denn freylich bloß geschätzt, oder muthmaaßlich angenommen werden kann, so hat man k oder die innere Länge des Fasses. In gedachter Encyclopädie wird die Bodendicke der Dicke der Dauben gleich gesetzt, welches denn gewöhnlich auch so ziemlich nahe zutreffen wird.

6. Sollten beyde Böden nicht genau circulär, und auch nicht genau von gleicher Grösse seyn, so kann man leicht verschiedene Durchmesser derselben abfassen, und für jeden Boden einen mittlern Durchmesser berechnen, woraus sich

sich denn weiter wieder ein mittlerer Durchmesser finden läßt; den man alsdann für den gemeinschaftlichen oder corrigirten Durchmesser beyder Böden ohne großen Fehler annehmen kann, vorausgesetzt, daß das Faß nicht absichtlich oval gebaut ist.

7. Bey gesenkten Böden (§. 166. III.) kann man die Tiefe der Senkung leicht durch Anlegung eines geraden Stäbchens an den Bodendurchmesser, so genau finden, als es die Umstände erlauben.

§. 173.
Aufgabe.

Den Inhalt eines Fasses nach Landesüblichen Maaß-Einheiten z.B. Kannen, Quartieren, Maaßen u.d.gl. zu bestimmen.

Auflösung I.

1. Man berechne den Inhalt vermittelst der Formel

$$Z = k\pi(b^2 - \frac{2}{3}bc + \frac{1}{5}c^2)$$

oder einer jeden andern, vermittelst deren man dem wahren Inhalte des Fasses am nächsten zu kommen glaubt, z.B. in Cubikzollen, indem man die Grössen b, k und c = b − a durch Längenzolle ausgedrückt hat, und dividire in

 die

die gefundene Zahl herein, mit der Zahl von Cubikzollen $= z$, welche auf die Landesübliche Maaß-Einheit gehen, so hat man zum Quotienten die Zahl $= n$ dieser Einheiten, welche in das Faß gehen würden.

2. Nimmt man z aus der II. Tafel (§. 14.) wo z in Pariser Cubikzollen angegeben ist, so muß man auch Z in solchen Cubikzollen berechnen, also die Grössen b, k, a nach Pariser Maaß angeben.

3. Ist die Maaß-Einheit cylindrisch, wie gewöhnlich, und ihre Höhe $= \varkappa$, halbe Weite $= \beta$, so hat man $z = \pi \varkappa \beta^2$; also

$$n = \frac{Z}{z} = \frac{k(b^2 + \frac{2}{3}bc + \frac{1}{5}c^2)}{\varkappa \beta^2}$$

Hier hebt sich also bey der Division $\frac{Z}{z}$, die Ludolphische Zahl π auf, wodurch also n etwas kürzer gefunden wird. Aber dieser Vortheil in der Rechnung findet nur statt, wenn von der Maaß-Einheit die Höhe und Weite selbst bekannt sind. Bey dem bloßen Gebrauch der Tafel (§. 14.) muß der Werth von Z vollständig in Pariser Cubikzollen berechnet werden.

Auflösung II.

4. Will man die Zahl n vermittelst der Visirstäbe finden, deren verschiedene Einrichtung

richtung bereits im vorhergehenden umständlich erörtert worden ist, und sich dazu z. B. des Visirstabes (§. 18. 13.) bedienen, welcher nach der Landesüblichen Maaß-Einheit (§. 14.) mit möglichster Genauigkeit verzeichnet sey, so messe man erstlich die nach (§. 172.) abgefaßte und mit Zuziehung der Bodendicke des Fasses gehörig bestimmte Länge k des Fasses auf der Höhenscale des Visirstabes (§. 18. 14.). Sie fasse auf demselben M Theile.

5. Ferner messe man auf der Tiefenscale des Visirstabes, von dem Anfangspunkt dieser Scale angerechnet, die innere Spundtiefe des Fasses, dann die mittlere Bodenweite (§. 172. 6.) und eine Weite, welche der absoluten Grösse nach, dem arithmetischen Mittel zwischen der Spundtiefe und Bodenweite gleich seyn würde.

6. Ich will setzen die Spundtiefe oder Bauchweite reiche auf der Tiefenscale bis zum Nten Tiefpunkt, die Bodenweite bis zum N'ten, und das Mittel zwischen der Bauch- und Bodenweite d. h. eine Linie welche der halben Summe von diesen beyden Weiten gleich seyn würde, bis zum N''ten Tiefpunkt, so ist des Fasses Inhalt in Maaß-Einheiten, oder

$$Z = \frac{M(6N + N' + 8N'')}{15}$$

wo

wo denn auch anstatt mit 15 zu dividiren erst mit 5, und dann mit 3 dividirt werden kann.

7. Der Beweis dieses Ausdrucks gründet sich auf (§. 171. und §. 18.) weil
F(§. 171.) = M.N; F′ = M.N′; F″ = M.N″.
(§. 18. 14.)

8. Exempel. Vermittelst eines nach dem Göttingischen Quartiergefäße (§. 13. 6.) nach (§. 18. 3, bis 22.) selbst construirten Visirstabes, fand ich, bey einem Fasse dessen Dauben nicht merklich von einem Kreisbogen abwichen

M = 9,6
N = 58,8
N′ = 45,0
N″ = 51,6

Dieß giebt

6 N = 352,8
N′ = 45,0
8 N″ = 412,8

Summe = 810,6
mult. mit M = 9,6

48636
72954

7781,76

divid. mit 5) 1556,35
divid. mit 3) 518,78 = dem Inhalte des Fasses in Quartieren, also beynahe 519 Quartiere

Die

Die unmittelbare Messung durch Einfüllen mit Wasser, wozu ein Gefäß gebraucht wurde, in welches 36 Quartiere giengen, gab den Inhalt nur um 4 Quartiere geringer, welches bey dem Gebrauche des Visirstabes eine größere Genauigkeit ist, als ich würklich erwartet hatte. Ein zweyter Versuch würde vielleicht nicht so genau zugetroffen seyn. Denn ich glaube, daß man bey dem Gebrauche eines Visirstabes viel Aufmerksamkeit nöthig hat, nicht um den 80ten bis 90ten Theil des ganzen zu fehlen.

9. Nach der gemeinen Regel der Visirer (§. 169. 5.) würde $Z = \frac{F + F'}{2} = \frac{M(N + N')}{2}$

Also in dem Beyspiele $= 9{,}6 \left(\frac{58{,}8 + 45}{2}\right)$

$= 9{,}6 \cdot 51{,}9 = 498{,}2$ mithin ohngefähr 498 Quartiere, welches 21 Quartiere weniger, als nach der richtigern Regel (7) beträgt, und auf 25 Quartiere ohngefähr eines ausmacht.

Man wird also die gewöhnliche Regel nur in dem Falle anwenden können, wenn man entweder einen solchen Fehler nicht achtet, oder nur Fässer von einer geringern Krümmung, als das angegebene, zu visiren hat.

10. Die Figur des Fasses war so beschaffen, daß wenn ich die Daubenlänge zwischen beyden Böden (also ohne die Köpfe, zu rechnen) in

10 gleiche Theile oder Stiche theilte, die Spundtiefe 8 solchen Theile, und die Bodenweite ohngefähr 7 dergleichen enthielt, welche Angaben ich nur hersetze, um darnach ohngefähr die Spitzung des Fasses (§. 166. IV.) zu beurtheilen, welches mir ganz gut nach den Regeln gebaut zu seyn schien.

11. Da der Inhalt des Fasses auf die drey Cylinder F, F', F'' (§. 171.) gebracht worden ist, so können solche auch vermittelst anderer Visirstäbe (§. 18. 26. 28. 38.) bestimmt werden. Da aber hievon im vorhergehenden schon umständlich gehandelt worden ist, so ist es unnöthig, darüber noch mehrere Erläuterungen beyzufügen.

12. Das Faß (8) hatte ebene Böden. Da aber unterweilen auch Fässer mit gesenkten Böden (§. 166. III.) vorkommen, so muß man von dem körperlichen Inhalte eines solchen Fasses, noch den körperlichen Raum der Senkung auf beyden Böden abziehen.

Fässer mit gesenkten Böden.

§. 174.

1. Es sey demnach LWNM (Fig. 84) ein gesenkter Boden, wie er sich mit seiner Wölbung einem Auge darstellen würde, welches ihn von dem innern Raume des Fasses aus, mithin

von

von der converen Seite betrachtete. LN sey die Höhe des Bodens, MW seine Breite, und MHW ein Schnitt senkrecht auf LN, so ist die krumme Linie MHW der Wölbungsbogen, welcher die Axe GHQ des Fasses in H durchschneiden wird, und GH die Tiefe der Wölbung oder Senkung für den Mittelpunkt H des Bodens, auch WG = GM, und HG auf MW senkrecht.

2. Wenn die zwischen MLWN enthaltene krumme Fläche des Bodens, bloß nach der Breite und nicht zugleich nach der Höhe gewölbt ist, wie denn solches Hr. Prof. Späth behauptet, und auch mir immer so vorgekommen ist, so muß man sich die durch MLWN begränzte krumme Fläche des Bodens als ein Stück einer Cylinderfläche gedenken, auf der sich ohngefähr wie auf einer kreisrunden oder elliptischen Scheibe, die man etwas gekrümmt hätte, der Höhe nach, lauter gerade Linien LN, ln rc. ziehen lassen, wo denn z. B. hg parallel mit HG die Senkung des Bodens für den Punkt h ausdrücken wird. Lambert (Beyträge zur Math. III. Theil 2te Abh. §. 12.) nimmt zwar auch eine Wölbung des Bodens nach der Höhe an, so daß auch LN, ln krumme Linien werden, aber nach den Regeln der Faßbinder ist solches in der Ausübung nicht gewöhnlich.

3. Uebri-

3. Uebrigens sind L, N die Punkte, durch welche die Spund- und Lagerdaube gehen, indem die durch M und W gehenden Dauben, die **Seitendauben** genannt werden; jene sind die **kürzesten**, und diese die **längsten** des Fasses.

4. Nun gedenke man sich die krumme Fläche des Fasses noch über die Köpfe der Dauben hinaus erweitert, und solche mit einer ebenen Fläche durchschnitten, welche durch MW auf der Axe GQ des Fasses senkrecht stehe, so würde dieser Schnitt auf des Fasses Oberfläche eine krumme Linie MRWS bilden, welche ein Kreis oder eine Ellipse seyn wird, je nachdem das Faß rund oder elliptisch gebaut ist. Da in der Folge auch die elliptischen oder ovalen Fässer vorkommen, so will ich sogleich MRWS für eine Ellipse annehmen, und nun den körperlichen Raum berechnen, welcher zwischen einem gewölbten Boden MLWN und einem ebenen wie MRWS enthalten seyn würde, welchen Inhalt, doppelt genommen, man denn allemahl von einem Fasse, welches sich bis zu ebenen Böden wie MRWS erstrecken würde, noch abziehen muß, wenn man den Raum des Fasses zwischen den gesenkten Böden wie MLWN erhalten will.

5. Den Krümmungsbogen MHW nehme ich für einen Kreisbogen an, und setze für einen

beliebigen Punkt wie h, die Coordinaten Gg $= u$; $gh = z$.

6. Durch g ziehe man in der Ebene WRM, gr parallel mit hl, so ist lr ein ein Stück einer durch l gehenden Daube, also auf gr senkrecht, und wie man leicht sieht, ghlr ein rechtwinklichtes Parallelogramm, dessen Ebene auf der des Schnitts WRM senkrecht steht.

7. Man nenne die Ordinate gr für den Punkt r des elliptischen Bogens Rr $= y$; so ist der Flächenraum $hglr = z . y$, und das Element des körperlichen Raumes zwischen LRHG und lrhg, oder

$$dZ' = z . y . du$$

8. Wenn man nun $WG = \frac{1}{2} MW = a$; $GR = \frac{1}{2} RS = \alpha$; und die größte Senkung des Bodens in der Mitte d. h. $GH = f$ nennt, so hat man für den Kreisbogen WhH, in welchem ht mit WG parallel gezogen werde, und dessen Mittelpunkt bey K, in der Verlängerung von HG liege, zufolge der Proportion

$$Ht : th = th : 2HK - Ht$$

d. h. $f - z : u = u : 2r - (f - z)$

nachstehende Gleichung $u^2 = 2r(f-z) - (f-z)^2$, den Halbmesser $HK = r$ genannt.

9. Statt dieser Gleichung läßt sich immer ohne merklichen Fehler bloß

$$u^2 = 2r(f - z)$$

 setzen,

setzen, weil $f - z$ in Vergleichung mit r immer äusserst klein ist (§. 166. III.)

10. Für $u = GW = a$ wird $z = 0$, demnach

$$a^2 = 2rf,$$

und $r = \frac{a^2}{2f}$; demnach (9)

$$u^2 = \frac{a^2}{f}(f - z)$$

und $z = f . \frac{a^2 - u^2}{a^2}$

11. Ferner ist nach der Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{a^2} u^2$$

also $y = \frac{\alpha}{a} \sqrt{(a^2 - u^2)}$

12. Mithin (7)

$$dZ' = \frac{\alpha . f}{a^3} (a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du$$

wovon das Integral (J. §. XXV.) für $u = 0$ verschwindet, und für $u = a$, den Werth $\frac{\alpha f}{a^3} . \frac{3}{16} a^4 . \pi$ $= \frac{3}{16} \alpha f a \pi$ erhält, welche Formel demnach den körperlichen Raum von HGLR bis W, d. h.

den

den vierten Theil von dem körperlichen Raume der Senkung des ganzen Bodens MLWN ausdrückt.

13. Also hat man für den ganzen Boden, den Senkungsraum $= \frac{3}{4} f . \alpha a \pi$ d. h. $\frac{3}{4}$ der Senkungstiefe GH multiplicirt in die elliptische Fläche MRWS, oder bey einem runden Fasse für welches $\alpha = a$ also $\alpha a \pi = a^2 . \pi =$ der Kreisfläche MRWS, ist, der Senkungsraum des Bodens = dieser Kreisfläche multiplicirt in $\frac{3}{4}$ der Senkungstiefe GH.

14. Sind demnach beyde Böden des Fasses gesenkt, das Faß rund, und sowohl diese Böden als auch ihre Senkungen einander gleich, so berechne man ein Faß dessen Länge gleich seyn würde dem Abstande der beyden Böden + der doppelten Senkungstiefe f, und die Bodenweite = der Sehne MH des Senkungsbogens. Von diesem Inhalte ziehe man allemahl ab das doppelte Produkt aus der Bodenfläche in $\frac{3}{4}$ der Senkungstiefe, so hat man des Fasses Inhalt von einem gesenkten Boden zum andern.

15. Misset man die Bodenweite MH auf dem Visirstabe, und zwar auf der Tiefenscale desselben, die Senkungstiefe auf der Höhensale, so darf man nur das Produkt aus den beyden Zahlen, welche man nach dieser Missung er-

 halten

halten hat, schlechtweg in das doppelte von ½ d. h. in $\frac{3}{2}$ multipliciren, um die Anzahl Landesüblicher Maaß-Einheiten zu erhalten, welche wegen der Senkung beyder Böden, von dem nach (§. 173. a.) zu bestimmenden Inhalte des Fasses abzuziehen sind.

16. Exempel. Gesetzt die Länge des Fasses mit Inbegriff der Bodensenkungen gebe auf der Höhenscale die Zahl $M = 9{,}6$, die bloße Senkung des Bodens die Zahl $m = 0{,}25$; die Bauchweite auf der Tiefenscale die Zahl $N = 58{,}8$; die Sehne des Senkungsbogens als Bodenweite die Zahl $N' = 45$, und eine Linie welche der halben Summe der Bauch- und Bodenweite gleich seyn würde, die Zahl $N'' = 51{,}6$.

So hat man nach (§. 173. 8.) erstlich des Fasses Inhalt ohne Bodensenkung = 519 Quartieren. Hievon ziehe man ab (15) $N'.m.\frac{3}{2} = 45 \cdot 0{,}25 \cdot \frac{3}{2} = 16{,}9$ also beynahe 17 Quartiere, so ist der Inhalt des Fasses mit gesenkten Böden = 502 Quartieren.

§. 175.

Anmerkung.

1. Das Bisherige mag hinreichen den Inhalt runder Fässer so genau zu bestimmen, als man es in der Ausübung verlangen kann. Sonst

Sonst lassen sich, wenn man Kleinigkeiten bey Seite setzen will, auch wohl noch andere Vorschriften zur Visirung der Fässer auffinden.

Wenn man z. B. auf die ursprüngliche Formel

$$Z = k\pi\,(b^2 - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{5}c^2)\ (\S.\ 167.\ 10.)$$

zurückgeht, so kann man statt deren auch ohne grossen Fehler setzen

$$Z = k\pi\,(b^2 - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{9}c^2) = k\pi\,(b - \tfrac{1}{3}c)^2$$

weil sie von jener nur um $\frac{4}{45}c^2$ unterschieden ist, und dieser Unterschied in den wenigsten Fällen $\frac{1}{150}$ des Ganzen ausmachen wird.

Setzt man nun b — a statt c, so wird

$$b - \tfrac{1}{3}c = \frac{2b + a}{3}.$$

Es ist also das Faß

$$Z = k\pi\left(\frac{2b + a}{3}\right)^2$$

ohne merklichen Fehler einem Cylinder gleich, dessen Halbmesser $= \frac{2b + a}{3}$, oder Durchmesser $= \frac{2 \cdot 2b + 2a}{3}$ ist, d. h. einem Cylinder gleich, dessen Durchmesser $\frac{1}{3}$ von der Summe der Bodenweite = 2 a und der doppelten Spundtiefe = 2 b beträgt.

2. Man duplire also die Spundtiefe, addire die Bodenweite hinzu, und nehme davon den 3ten Theil. Die erhaltene Länge messe man auf der Tiefenscale des Visirstabes, so wie die Länge k des Fasses auf der Höhenscale, und multiplicire die erhaltenen beyden Zahlen in einander selbst, so hat man gleichfalls den Inhalt des Fasses. Es versteht sich, daß man unter der Spundtiefe und Bodenweite die nach (§. 172. 6.) zu bestimmenden corrigirten Grössen verstehen muß.

3. Andere Vorschriften zur Visirung der Fässer kann man außer den in gegenwärtigen Kapitel und oben (§. 18.) bereits angeführten Schriften, noch in folgenden nachsehen. Die in diesem Kapitel vorkommenden Vorschriften mögten aber wohl für die Ausübung die brauchbarsten seyn, zu denen ich auch noch diejenige rechnen darf, welche Herr Prof. Büsse in der hier mit angeführten kleinen Schrift vorgetragen hat.

[illegible] Stereometria doliorum. 1715.

M. Christ. Martini Pithometriae s. doliorum mensurae theoria nova, Algebrae ope eruta. [illegible] 1723 zu Wittenberg herausgekommene Disputationen.

[illegible] erfundene leichte und richtige Ausmessung der Fässer, welche nach der Länge liegen und nicht voll sind. Wismar 1747.

Fag-

Baggvis, Plantins und Märelius hieher gehörige Abhandlungen in den Abh. der Schwed. Akad. der Wissenschaften 1743. 1774. 1776.

Camus Instrument propre à jauger les tonneaux. Mem. de l'Acad. de Paris 1741.

Anweisung den Inhalt cylindrischer und cubischer Gefäße auch nicht voller Fässer zu berechnen 1774.

Herr Geh. Hofrath und Prof. Langsdorf in den Bemerkungen der Churpfälz. physisch-ökonomischen Gesellschaft 1777.

F. G. Busse von den nöthigen Kenntnissen zur Körpermessung nebst Visirkunst. Leipzig 1790.

Abhandlung über das Visiren der Fässer, mit Bezug auf den in Berlin eingeführten Visirstab, vom Hrn. Geh. Oberbaurath Eitelwein in der Samml. der deutschen Abhandlungen, welche in der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin vorgelesen worden, in dem J. 1803. Berlin 1806. Beschäftigt sich hauptsächlich mit der Anwendung des Diagonalstabes zum Visiren der Fässer.

§. 176.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Fasses zu finden, dessen Schnitte senkrecht auf die Axe, keine Kreise, sondern Ellipsen sind, d. h. den Inhalt eines so genannten ovalen Fasses zu finden.

Aufl. 1. Bey solchen Fässern sind erstlich jene Schnitte alle einander ähnlich, die kleinen

Unregelmäßigkeiten bey Seite gesetzt, die überhaupt bey einem jeden Fasse unvermeidlich sind. Zweytens gehen die Spund- und Lagerdaube allemahl durch die Endpunkte der großen Axen jener elliptischen Schnitte. Also wird die Spundtiefe die größere Weite des Fasses in seiner Mitte, die größere Bauchweite, und eine Linie durch die Mitte des Fasses, senkrecht auf die Ebene, durch welche die Spund- und Lagerdaube gehen, die kleinere Weite des Fasses in seiner Mitte, die kleinere Bauchweite, ausdrücken. Eben so verhält es sich nun auch mit den Böden des Fasses, bey denen die grössere Weite, durch die Spund-, und Lagerdaube, und die kleinere, durch die Seitendauben, gehet.

2. Um nun den körperlichen Inhalt eines solchen ovalen Fasses zu finden, so berechne man aus der Länge des Fasses, aus der Spundtiefe und der grösseren Bodenweite, den Inhalt eines runden Fasses, dem diese gegebenen Dinge entsprechen würden, und verfahre wenn man den Visirstab anwenden will, völlig wie im vorhergehenden bey den runden Fässern gelehrt worden ist (§. 173. 6.).

3. Dann schliesse man, wie die grössere Bodenweite zur kleinern, so der gefundene Inhalt des erwähnten runden Fasses zur vierten Zahl, so wird diese den Inhalt des ovalen

Fasses

Fasses geben. Die beyden Weiten des Bodens werden bey dieser Proportion nicht auf der Tiefenscale des Visirstabes, sondern absolut auf der Höhenscale gemessen.

Hat das Faß gesenkte Böden, so wird man nach (§. 174. 13.) leicht berechnen können, wie viel deswegen noch von dem gefundenen Inhalt des Fasses abzuziehen seyn wird, womit ich weiter keinen Raum verderben will.

4. Beweis. Da ein solches Faß zu der Classe von Körpern gehört, welche im VIIten Kapitel betrachtet worden sind, so läßt sich der Beweis leicht aus (§. 125. 9.) ableiten, wenn man das dortige Z (in Fig. 70 der körperliche Raum zwischen den Ebenen AEDC, aedc) den halben elliptischen Faßkörper bedeuten läßt, so daß AEDC den Schnitt durch den Spund des Fasses, aedc einen von den elliptischen Böden, und Ff die halbe Länge oder Axe des Fasses vorstellet.

5. Dann würde das dortige Z das (2) erwähnte runde Faß, T die elliptische Fläche ACDE und $a^2\pi$ eine von dem Halbmesser AF (der halben Spundtiefe des Fasses) beschriebene Kreisfläche bedeuten.

6. Nennt man nun die große Axe AD der Ellipse ACDE (also die Spundtiefe des Fasses) = A, und die kleine Axe derselben (die kleinere

Bauchweite des Fasses) = B, so hat man $T = \frac{1}{4} A . B . \pi$ (§. 40. 6) und folglich

$$З = \frac{T}{\frac{1}{4} A^2 . \pi} . Z = \frac{B}{A} . Z$$

wenn statt T der gefundene Werth gesetzt wird.

7. Demnach

$$A : B = Z : З$$

Es verhält sich aber A : B auch wie die größere Bodenweite zur kleinern. Daher die Proportion (3), wenn man unter Z, З, zugleich die ganzen Faßkörper, welche sich, wie die halben verhalten, verstehet.

§. 177.
Zusatz.

Die von mir angegebene sehr leichte Vorschrift zur Visirung ovaler Fässer ist allgemein, welche Krümmung auch die Spund- oder Lagerdauben haben mögen, wie aus (§. 125. 9.) sich leicht von selbst ergiebt. Nur versteht sich, daß man alsdann unter Z auch allemahl das runde Faß verstehen muß, dem eine solche Krümmung der Dauben entsprechen würde, und es also auch nach der Formel, die einer solchen Krümmung (z. B. einer circulären oder conchoidischen ꝛc.) entspricht, berechnen muß.

§. 178.

Aufgabe.

Wein in Fässern, welche nicht ganz voll sind, zu berechnen, oder auch zu visiren.

Aufl. 1. Es sey (Fig. 82.) $mn\mu\nu$ die horizontale Oberfläche des Weines in dem Fasse, von dessen Axe ich annehme, daß sie gleichfalls horizontal liege, und also mit $mn\mu\nu$ parallel sey. Man soll den körperlichen Raum der bis $mn\mu\nu$ gehenden Flüssigkeit finden.

2. Diese Ebene $mn\mu\nu$ schneide die beyden Faßboden in den Linien mn, $\mu\nu$; so sind die Kreisabschnitte man, $\mu\alpha\nu$ die Flächen, in denen die Faßböden von dem Weine benetzt werden, und $ba = \beta\alpha$ die Höhen dieser Abschnitte, oder die Tiefe des Weins an den Böden.

3. Eben so sey MN der Durchschnitt der Ebene $mn\mu\nu$ mit einem Faßschnitte, den man sich durch den Spund S, senkrecht auf des Fasses Axe gedenkt, so ist die Höhe BA, des Abschnitts MAN, die Tiefe des Weines unter dem Spund.

4. Man messe die Spundtiefe SA = b, die Bodenweite $ba = a$, und die Weintiefe $BA = g$, unter dem Spund, welche man leicht dadurch finden kann, daß man einen Stab, lothrecht zum Spunde hinabläßt, und nach dem

$=83,33$

$=88,09$

…33 Theile dergl. SA, 100 enthält,

…8,09 . . . . sa . . . .

…u gehört in obiger Tafel zur Zahl … Columne A die Zahl 8873, und zur … die Zahl 8967 deren Differenz von …u $= 94$ ist. Man schliesse demnach … $= 94 : z$, so ist $z = 31$; demnach …ur Zahl 83,33 in der Columne A gehö… Zahl $8873 + 31 = 8904$ in der Co… B, und eben so zur Zahl $y = 88,09$ in … olumne A, durch einen ähnlichen Propor…ltheil die Zahl $9320 + 7 = 9327$ in der …umne B.

10. Demnach hat man für die beyden …eisabschnitte NAM $= \mathfrak{T}$ und nam $=$ T … Zehntausendtheilchen der zugehörigen Kreis…gen SNAM, snam die Werthe

$\mathfrak{T} = 0,8904 . SNAM$
$T = 0,9327 . snam$

11. Also $2\mathfrak{T} = 1,7808 . SNAM$, und der Inhalt des Weines in dem Fasse $= \frac{1}{3}$ k … 1,7808 . SNAM $+ 0,9327$. snam), welchen

man

man nun leicht in Cubikzollen finden kann, wenn man k = dem obigen Werthe in Zollen, und die Kreisflächen SNAM, snam, aus ihren Durchmessern (8) in Quadratzollen berechnet, und in den gefundenen Ausdruck substituirt.

12. **Will man diesen Inhalt vermittelst des Visirstabes sogleich in Landesüblichen Maaßeinheiten finden**, so überlege man, daß k . SNAM; und k . snam zwey Cylinder bedeuten, deren Höhe = k und Grundflächen die Kreise SNAM und snam sind.

13. Man visire also diese beyden Cylinder, indem man die Spundtiefe SA als Durchmesser des Kreises SNAM, und eben so die Bodenweite sa als Durchmesser des Kreises snam auf der Tiefenscale, die Wein- oder Faßlänge k hingegen auf der Höhenscale misset. Gesetzt man fände für die beyden Durchmesser die Zahlen N, N' und für die Faßlänge k die Zahl M, so wird in Landesüblichen Maaßeinheiten

$$k . SNAM = M . N$$

$$k . snam = M . N'$$

Demnach der Inhalt des Weines in dem Fasse $= \frac{1}{3} M (1,7808 . N + 0,9327 . N')$, wenn nemlich die beyden Segmente NAM, nam gegen die zugehörigen Kreisflächen SNAM, snam

man in dem Verhältnisse der (18) angege-
benen Linien sagen.

12. Ich will diese vermittelst einiger Ta-
feln in einem Felde leicht zu berechnenden Zah-
len [illegible] n, n' nennen, so ist die allge-
meine Visirformel für Fässer, welche man
ganz voll sind, folgende

$$Z = \frac{1}{3} M (2n . N + n' . N'),$$

wenn Z den Inhalt der Flüssigkeit das an ihre
[illegible] Oberfläche bezeichnet.

13. Um also Z zu finden, multiplicirt man
die doppelte Zahl n, welche man aus der Tafel
für den Werth x (8) der durch Hunderttheil-
chen des Durchmessers SA ausgedrückten Wein-
höhe bA erhält, in die Zahl N, welche man
für den Durchmesser SA auf der Tiefenscale
erhält. Hierzu addirt man das Produkt der
für die Weinhöhe ba, und den Durchmesser sa
auf eine ähnliche Art erhaltenen Zahlen n', N',
und multiplicirt die Summe in den dritten
Theil der auf der Tiefenscale gemessenen Wein-
länge bB, für welche man die Zahl M erhal-
ten hat.

14. Um die Zahlen x, y (8) aus denen
man vermittelst der Tafel die Werthe von n,
und N findet, zu erhalten, kömmt es bloß auf
das Verhältniß der Linien AB, ab, zu ihren
Durchmessern AS, as an, wozu begreiflich ein
jeder

der Maaßstab gebraucht werden kann. Es wäre also in (8) nicht gerade nöthig gewesen, die gedachten Linien durch Zolle auszudrücken. Man hätte sie auch sogleich vermittelst der Höhenscale des Visirstabes messen können. Aber, um die Zahlen N, N' zu erhalten, müssen SA, und sa auf der Tiefenscale gemessen werden.

17. Weil bey einem elliptischen Fasse, in welchem SA, sa die großen Axen der elliptischen Schnitte SMAN, sman bedeuten (§. 176. 1.) die Abschnitte wie NAM, nam, in dem Verhältnisse der kleinen Axe zur großen kleinen als die Kreisabschnitte T, T sind, so erhält man den Inhalt der Flüssigkeit bis an ihre Oberfläche mnμν in einem elliptischen Fasse, wenn man aus den Weintiefen BA, ba und den Durchmessern SA, sa, den Werth von 3 (14) sucht, als wenn er zu einem runden Fasse gehörte, und dann den gefundenen Inhalt 3 in einen Bruch multiplicirt, dessen Zähler die kleine Axe einer Ellipse wie amsn, und der Nenner die große Axe seyn würde, beyde nach der Höhenscale gemessen.

18. Wäre so wenig Wein in dem Fasse, daß er nur bis an aα reichte, so würde man in obigen Ausdruck nur n' = 0 setzen müssen, weil die Weintiefe ba an dem Boden = 0 wird, sobald der Wein nur bis an a reicht. Dieß giebt denn in diesem Falle schlechtweg

an ... die Köpfe l, und λ
be ... gegebenen Inhalt bekommen
...

1. Man nenne den gegebenen Inhalt ... die Spundtiefe oder AK = b, die ... ln über den Köpfen d. h. lg = β. ... Länge qg des Fasses = k, und den ... b — β = γ, so hat man nach der ... Formel, wenn man sich ln, λν, als ... des Fasses vorstellet, und die Krümmung der Dauben als circulär betrachtet, wo ... nicht viel abweicht, den Inhalt

$$Z' = k . \pi . (b^2 - \frac{2}{3} b\gamma + \frac{1}{5}\gamma^2)$$

2. Man nenne nun die Grösse eines Faßstiches (§. 166. VI.) = z, die Anzahl der Stiche welche auf die Bauchweite AB = l' = 2b kommen sollen = n, so muß nach den Regeln der Böttcher die Kopfweite ln = l = 2β = (n — 1) z (§. 166. VII. VIII.) seyn.

3. Demnach $\gamma = b - \beta = \frac{l' - l}{2} = \frac{1}{2} z$.

4. Und folglich wegen $b = \frac{1}{2} n z$

$$Z' = k\pi . z^2 (\frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{6} n + \frac{1}{20})$$

in welchem Ausdruck ich die Grösse $\frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{6} n + \frac{1}{20} = \delta$ mithin $Z' = k . \pi . \delta . z^2$ setzen will.

5. Die

Die Daubenlänge A L = L fasse m Stiche, so ist L = m z.

6. Der Bogen Al oder die halbe Daubenlänge $\frac{1}{2}$L ist = r. Bog. sin $\frac{\frac{1}{2}f}{r}$, weil $\frac{\frac{1}{2}f}{r}$ $= \frac{Kg}{r} = \frac{lm}{r}$ (Fig. 80), für den Sinustotus = 1, den Sinus des dem Bogen Al zugehörigen Winkels ausdrückt, wenn dieser Bogen den Halbmesser r hat, und lm mit Kg parallel gezogen ist.

Aber es ist ohne merklichen Fehler

$r = \frac{\frac{1}{4}f^2}{2x}$ (§. 167. 3.) $= \frac{\frac{1}{4}f^2}{z}$ (3)

weil x gegen f immer sehr klein ist, demnach

$\frac{1}{2}L = \frac{\frac{1}{4}f^2}{z}$. Bog sin $\frac{2z}{f}$

Aber ohne merklichen Fehler B sin $\frac{2z}{f} = \frac{2z}{f}$ $+ \frac{1}{6}\,\frac{8z^3}{f^3}$. Folglich

oder L = m.z (5) = $f + \frac{2}{3}\,\frac{z^2}{f}$

Herauszieben nachsieht, wie hoch ihn der Wein benetzt hat.

5. Zieht man nun αT mit der Faßlänge bβ parallel, so hat man A T = ½ (b — a); und B T = g — ½ (b — a) = der Weintiefe b a an den Boden.

6. Aus den gefundenen Höhen B A, und b a, und den Durchmessern B A, b a, berechne man die Kreissegmente N A M = T und n a m = T, so hat man für den körperlichen Raum zwischen beyden Segmenten N A M, n a m, nach (§. 131. 17.) wo man sich nur in der dortigen Figur 72, F f horizontal gedenken muß, den Ausdruck

$$Z = h\left(\tfrac{2}{3}\mathfrak{T} + \tfrac{1}{3}T\right) = \tfrac{1}{3}h\,(2\mathfrak{T} + T)$$

wenn h die halbe Länge B b, des Fasses bedeutet. Also wenn k die ganze Länge des Fasses bezeichnet, der Raum zwischen den beyden Kreissegmenten $\nu\alpha\mu$, n a m, d. h. der Raum den die Flüssigkeit in dem Fasse unter ihrer horizontalen Oberfläche μM m n N ν einnimmt = ⅓ k (2$\mathfrak{T}$ + T), also dem dritten Theil eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche = 2$\mathfrak{T}$ + T, und die Höhe = k seyn würde.

7. Vorschriften zur Berechnung von Kreissegmenten wie $\mathfrak{T}$, T, sind nun zwar schon (§. 131. VII.) umständlich erläutert worden. Da aber bey dem Visiren der Fässer die größte

Ge-

Genauigkeit nicht erforderlich ist, so kann man sich der Segmententafel am Ende dieses Buches mit Zuziehung von Proportionaltheilen, die man vorkommenden Falles leicht berechnen wird, dazu bedienen (§.31). In der Columne A findet man für jedes Segment wie NAM oder nam, die Höhe BA oder ba angegeben, in Theilen, deren jeder Durchmesser wie SA oder sa allemahl 100 enthält, und in der Columne B den Inhalt des Segments, in Zehntausendtheilen der ganzen Kreisfläche zu dem es gehört. Die Columne C enthält die Differenzen der in der Columne B vorkommenden Zahlen, zum Behuf der Proportionaltheile.

8. Ein Beyspiel mag diese Tafel erläutern. Gesetzt man habe bey einem Fasse gefunden

AS = b = 48 Zoll; as = a = 42 Zoll, die Weintiefe βA = g = 40 Zoll; die Faßlänge βb = k = 60 Zoll.

Weil man sich nun in der angeführten Tafel jeden Durchmesser wie AS, as, allemahl in 100 Theile eingetheilt vorstellen muß, und die Weintiefen BA = 40 und ba = g — ⅓ (b — a) = 37 in solchen Theilen ausgedrückt werden müssen, so schließe man

48 : 40 = 100 : x

42 : 37 = 100 : y

so

so wird $x = \frac{4000}{48} = 83{,}33$

$y = \frac{3700}{42} = 88{,}09$

d. h.

BA enthält 38,33 Theile dergl. SA 100 enthält, und
ba = = 88,09 = = = sa = = =

9. Nun gehört in obiger Tafel zur Zahl 83 in der Columne A die Zahl 8873, und zur Zahl 84 die Zahl 8967 deren Differenz von der erstern = 94 ist. Man schliesse demnach $1 : 0{,}33 = 94 : z$, so ist $z = 31$; demnach würde zur Zahl 83,33 in der Columne A gehören die Zahl $8873 + 31 = 8904$ in der Columne B, und eben so zur Zahl $y = 88{,}09$ in der Columne A, durch einen ähnlichen Proportionaltheil die Zahl $9320 + 7 = 9327$ in der Columne B.

10. Demnach hat man für die beyden Kreisabschnitte NAM = $\mathfrak{T}$ und nam = T in Zehntausendtheilchen der zugehörigen Kreisflächen SNAM, snam die Werthe

$\mathfrak{T} = 0{,}8904 . \text{SNAM}$

$T = 0{,}9327 . \text{snam}$

11. Also $2\mathfrak{T} = 1{,}7808 . \text{SNAM}$, und der Inhalt des Weines in dem Fasse $= \frac{1}{3}$ k $(1{,}7808 . \text{SNAM} + 0{,}9327 . \text{snam})$, welchen

man

man nun leicht in Cubikzollen finden kann, wenn man k = dem obigen Werthe in Zollen, und die Kreisflächen SNAM, snam, aus ihren Durchmessern (8) in Quadratzollen berechnet, und in den gefundenen Ausdruck substituirt.

12. **Will man diesen Inhalt vermittelst des Visirstabes sogleich in Landesüblichen Maaßeinheiten finden,** so überlege man, daß k . SNAM; und k . snam zwey Cylinder bedeuten, deren Höhe = k und Grundflächen die Kreise SNAM und snam sind.

13. Man visire also diese beyden Cylinder, indem man die Spundtiefe SA als Durchmesser des Kreises SNAM, und eben so die Bodenweite sa als Durchmesser des Kreises snam auf der Tiefenscale, die Wein- oder Faßlänge k hingegen auf der Höhenscale misset. Gesetzt man fände für die beyden Durchmesser die Zahlen N, N' und für die Faßlänge k die Zahl M, so wird in Landesüblichen Maaßeinheiten

$$k . SNAM = M . N$$

$$k . snam = M . N'$$

Demnach der Inhalt des Weines in dem Fasse $= \frac{1}{3} M (1,7808 . N + 0,9327 . N')$, wenn nemlich die beyden Segmente NAM, nam gegen die zugehörigen Kreisflächen SNAM, snam

[illegible]

[illegible]

Maaßstab gebraucht werden kann. Es
ilso in (8) nicht gerade nöthig gewesen,
achten Linien durch Zolle auszudrücken.
hätte sie auch sogleich vermittelst der Hö-
le des Visirstabes messen können. Aber,
e Zahlen N, N' zu erhalten, müssen SA,
a auf der Tiefenscale gemessen werden.

7. Weil bey einem elliptischen Fasse, in
em SA, sa die großen Axen der elliptischen
itte SMAN, sman bedeuten (§. 176. 1.)
bschnitte wie NAM, nam in dem Ver-
isse der kleinen Axe zur großen kleinen als
Kreisabschnitte T, T sind, so erhält man
Inhalt der Flüssigkeit bis an ihre Ober-
e mnμ in einem elliptischen Fasse,
n man aus den Weintiefen BA, ba und
Durchmessern SA, sa, den Werth von 3 (14)
t, als wenn er zu einem runden Fasse ge-
rte, und dann den gefundenen Inhalt 3 in
en Bruch multiplicirt, dessen Zähler die
eine Axe einer Ellipse wie amsn, und der
enner die große Axe seyn würde, beyde nach
r Höhenscale gemessen.

18. Wäre so wenig Wein in dem Fasse,
aß er nur bis an aα reichte, so würde man
n obigen Ausdruck nur n' = o setzen müssen,
weil die Weintiefe ba an dem Boden = o
wird, sobald der Wein nur bis an a reicht.
Dieß giebt denn in diesem Falle schlechtweg

für den Inhalt des Faßsegments αAa die Formel.

$$Z = \frac{2}{3} n . M . N$$

19. Gienge hingegen die Weinfläche sσ bis an den obern Rand der Böden, so wird die Weintiefe an den Böden = dem Durchmesser sa derselben, und für diesen Fall n = 1. Mithin das Faßsegment σαAas alsdann die Formel

$$Z = \frac{1}{3} M (2nN + N')$$

20. Gienge die Weinfläche gar nur bis an ki, so muß man in der Formel (18) statt der ganzen Faßlänge aα = M, nur die Weinlänge ki setzen, die man denn ohngefähr, so genau hier erforderlich ist, dadurch finden kann, daß man an der Lagerdaube αAa, ein paar Punkte k, i, sucht, welche über einer durch A gezogenen Horizontallinie um kg = ih = der Weintiefe tA erhoben sind, und dann den Abstand hg auf der Höhenscale misset; oder noch besser, man gedenke sich die Horizontallinie CD durch den Spund, und suche ein paar Punkte κ, η, so daß κv = ηq = der Weintiefe tA seyn würde, dann ist auch qv = ik = hg.

21. Gienge endlich der Wein bis an ηκ noch über die Böden herauf, so messe man die Weinleere oder ihre Tiefe Sτ, und verfahre damit wie mit einer eben so großen

Weintiefe tA in (80) um das leere Faßsegment tSx ≡ iAk zu finden, dessen Inhalt man denn nur von dem visirten Inhalte des ganzen Fasses abziehen darf.

§. 179.

Dieß sind die Vorschriften für das Visiren solcher Fässer die nicht ganz voll sind. Für die gewöhnlichen Visirer sind sie freylich noch immer schwer genug, allein es läßt sich nun einmahl nichts daran abkürzen, wenn man dabey mit einiger Genauigkeit verfahren will, oder man müßte denn das Faß auf einen seiner Böden stellen, und es in dieser Lage visiren, wobey denn die Weinfläche, wenn sie sich über die Bauchweite hinaus erstreckt, als den einen Faßboden betrachten, und die beyden Theile des Fasses, von dem Boden bis zum Bauche und von dem Bauche bis zur Weinfläche besonders visiren müßte, wobey denn jeder Theil für sich wie ein halbes Faß zu berechnen seyn würde. Die weitere Ausführung hievon will ich der eigenen Betrachtung eines jeden überlassen und zum Schlusse dieses Kapitels nur noch folgende Aufgabe beyfügen.

§. 180.

Aufgabe.

Die Abmessungen eines Fasses (Fig. 80) zu bestimmen, wenn das-

selbe

selbe, bis an die Köpfe l, und λ einen gegebenen Inhalt bekommen soll.

Aufl. 1. Man nenne den gegebenen Inhalt $=Z'$, die halbe Spundtiefe oder $AK = b$, die halbe Weite ln über den Köpfen d. h. $lg = \beta$. Die ganze Länge qg des Fasses $= k$, und den Unterschied $b - \beta = \gamma$, so hat man nach der bekannten Formel, wenn man sich ln, $\lambda\nu$, als Böden des Fasses vorstellet, und die Krümmung der Dauben als circulär betrachtet, wovon sie nicht viel abweicht, den Inhalt

$$Z' = k . \pi . (b^2 - \tfrac{2}{3} b\gamma + \tfrac{1}{5}\gamma^2)$$

2. Man nenne nun die Grösse eines Faßstiches (§. 166. VI.) $= z$, die Anzahl der Stiche welche auf die Bauchweite $AB = l' = 2b$ kommen sollen $= n$, so muß nach den Regeln der Böttcher die Kopfweite $ln = l = 2\beta = (n - 1) z$ (§. 166. VII. VIII.) seyn.

3. Demnach $\gamma = b - \beta = \frac{l' - l}{2} = \frac{1}{2} z$.

4. Und folglich wegen $b = \frac{1}{2} n z$

$$Z' = k \pi . z^2 (\tfrac{1}{4} n^2 - \tfrac{1}{6} n + \tfrac{1}{20})$$

in welchem Ausdruck ich die Grösse $\frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{6} n + \frac{1}{20} = \delta$ mithin $Z' = k . \pi . \delta . z^2$ setzen will.

5. Die

Die Daubenlänge AL = L, fasse m Stiche, so ist L = mz.

6. Der Bogen Al oder die halbe Daubenlänge $\frac{1}{2}$L ist = r. Bog. sin $\frac{\frac{1}{2}l}{r}$, weil $\frac{\frac{1}{2}l}{r}$ $= \frac{Kg}{r} = \frac{lm}{r}$ (Fig. 80), für den Sinustotus = 1, den Sinus des dem Bogen Al zugehörigen Winkels ausdrückt, wenn dieser Bogen den Halbmesser r hat, und lm mit Kg parallel gezogen ist.

Aber es ist ohne merklichen Fehler

$r = \frac{\frac{1}{4}l^2}{2\nu}$ (§. 167. 3.) $= \frac{\frac{1}{4}l^2}{z}$ (3)

weil ν gegen l immer sehr klein ist, demnach

$\frac{1}{2}L = \frac{\frac{1}{4}l^2}{z}$: Bog sin $\frac{2z}{l}$.

Aber ohne merklichen Fehler B sin $\frac{2z}{l} = \frac{2z}{l}$ $+ \frac{1}{6}\frac{8z^3}{l^3}$. Folglich

oder L = m.z (5) = $l + \frac{2}{3}\frac{z^2}{l}$

 7.

7. Hieraus ergiebt sich die quadratische Gleichung

$$\mathfrak{k}^2 - mz.\mathfrak{k} = -\frac{2}{3}z^2$$

woraus man erhält

$$\mathfrak{k} = (\tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{2}{3})})z$$

in welchem Ausdrucke ich die in z multiplicirte Grösse $\frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - \frac{2}{3})} = \vartheta$, und also

$$\mathfrak{k} = \vartheta . z$$

setzen will.

8. Hieraus ergiebt sich nach (4) die Gleichung

$$Z' = \vartheta . \delta . \pi . z^3$$

Mithin für die Grösse eines Faßstiches der Werth

$$z = \sqrt[3]{\frac{Z'}{\vartheta . \delta . \pi}} \quad (6)$$

So groß muß also ein solcher Stich genommen werden, wenn das Faß den gegebenen Inhalt Z' bekommen, die Bauchweite = n Stichen, und die Daubenlänge = m Stichen, mithin das Fundamentalverhältniß des Fasses = $\mu : 1 = \frac{\frac{1}{2}m}{n-1} : 1$ (§. 166. VIII. IX.) werden soll.

9. Soll das Faß aus q Dauben zusammengefügt werden, so erhält man für die Breite der Dauben in ihrer Mitte den Werth $\frac{n.\pi.}{q}z$ (§. 166. XVI.)

10. Also sind nunmehr alle Dimensionen des Fasses nemlich die Grösse des Stichs z, die Daubenlänge $L = m \cdot z$, die Bauchweite $l' = n \cdot z$, die Weite über den Köpfen $l = (n - 1) z$, das Fundamentalverhältniß $\mu : 1 = \frac{m}{n-1} : 1$, die Daubenbreite in der Mitte $= \frac{n \cdot \pi}{q} z$, und der Modelstich $\zeta = \frac{\pi \cdot z}{q}$ (§. 166. XVI.) u. s. w. bestimmt.

11. Ist die Stichzahl n und das Fundamentalverhältniß $\mu : 1$ gegeben, so hat man daraus $m = (n - 1) \mu$.

12 Exempel. Gesetzt es solle ein Faß bis an die Köpfe l, Z 520 Quartiere Göttinger Maaß (§. 13. x.) enthalten. Die Stichzahl des Fasses soll $n = 8$ und das Fundamentalverhältniß $10 : 7$ also $\mu = \frac{10}{7}$ seyn, so wird erstlich $m = 10$, und hieraus nach einer leichten Rechnung $\mathfrak{A} = 14,71$; $\mathfrak{B} = 9,93$ (47).

Um nun die Grösse eines Stichs für dieses Faß z. B. in Pariser Zollen zu finden, drücke man die 520 Quartiere in Pariser Cubikzollen aus, so hat man $Z' = 520 \cdot 50,592$ (§. 13. x.).

Also für den Stich (8)

$$z = \sqrt[3]{\frac{520 \cdot 50,592}{14,71 \cdot 9,93 \cdot \pi}}$$

 welches

welches man leicht durch Logarithmen berechnet.

Man wird finden $z = 3,856$ Zoll. Dieß giebt denn

die Daubenlänge (10) $L = 38,56$ Zoll:
Bauchweite $l' = 30,848$
Kopfweite $l = 26,992$
Faßlänge $\lambda = 38,29$

Sollen nun 18 Dauben zu dem Fasse genommen werden, so ist $q = 18$, und die Breite der Dauben in der Mitte $= \frac{nz\pi}{q} = \frac{\pi l'}{q} = \frac{30,848}{18} \cdot \pi = 5,38$ Zoll.

13. Hätte man keine Dauben von dieser Breite, so dürfte man nur $q = 48$ nehmen.

14. Für einen Modelstich würde man erhalten $\frac{mz}{q} = 0,67$ Zoll, auch $= \frac{m}{n}$ der Daubenbreite in der Mitte, mithin die Breite der Dauben an den Köpfen $= 5,38 - 0,67 = 4,71$ Zoll.

15. So sind demnach alle die Abmessungen bestimmt, nach denen der Küfer das Faß aufzusetzen hat, wenn es bis zu den Köpfen l, λ, den gegebenen Inhalt bekommen soll. Es versteht sich, daß die gefundenen Grössen sich alle auf die innere Fläche des Fasses beziehen müssen.

16. Werden nun bey L und P die Böden eingesetzt, so wird der wahre Inhalt des Fasses bis an die Böden LN, PS kleiner seyn als der Inhalt bis an die Köpfe l, λ, n, ν, um so viel Raum als die beyden Böden einnehmen, und sich Wasser auf die beyden Böden bis an die Köpfe des Fasses würde ziehen lassen, welches denn der Küfer leicht durch ohngefähre Schätzung, und durch einen Versuch wird bestimmen können.

17. Will man aber gleich bey der Verfertigung des Fasses darauf antragen, daß das Faß zwischen seinen Böden einen gegebenen Inhalt = Z bekomme, so muß der Küfer nach den Handwerksregeln festsetzen, um wie viel er die Köpfe des Fasses über die [illegible] Fläche der Böden hervorstehen lassen will. Da dieß nur immer einen geringen Theil der ganzen Daubenlänge beträgt, so will ich diesen Theil $= lL = \frac{mz}{[illegible]}$ nennen.

Dann kann man ohne merklichen Fehler den Raum zwischen der einen Fläche des Bodens z. B. LN, und der Fläche über den Köpfen ln einem Cylinder gleich setzen, dessen Grundfläche ein Kreis von dem Durchmesser LN = $(n - r) z$ und die Höhe $= \frac{mz}{[illegible]}$ ist, d. h.

man kann jenen Raum $= \frac{1}{4}(n-1)^2 z^2 . \pi . \frac{mz}{e}$ $= \frac{1}{4}\frac{m(n-1)^2}{e} z^3 \pi$ setzen.

18. Dieß giebt denn (17)

$$Z' = Z'' + \frac{1}{2}\frac{m(n-1)^2}{e} z^3$$

wegen der beyden Böden; demnach (8)

$$9\delta\pi z^3 = Z'' + \frac{1}{2}\frac{m(n-1)^2}{e} z^3 . \pi$$

und folglich setzt für die Grösse eines Stichs

$$z = \sqrt[3]{\frac{Z''}{\left(9\delta - \frac{1}{2}\frac{m(n-1)^2}{e}\right)\pi}}$$

Begreiflich dienen diese Rechnungen nur dazu, ein Faß zu erhalten, welches nicht viel von einem gegebenen Inhalte abweicht. Denn wegen der Ursachen (§. 165. 2.) läßt sich nie eine vollkommene Genauigkeit erreichen. Auch kann das Faß, wenn man ihm auch die gefundenen Abmessungen giebt, doch immer so beschaffen seyn, daß die Dauben etwas von der circulären Krümmung, die bey den bisherigen Rechnungen angenommen ward, abweicht. Ich mögte es aber wegen der innern Unregelmässigkeiten eines Fasses nie wagen, eine gewisse Krümmung der Dauben, aus diesen oder jenen Abmessungen für sicherer als die bloße

Vor=

Voraussetzung einer circulären Krümmung zu halten. Man kann indessen viel hieher gehöriges in Hrn. Prof. Spaths oben (§. 166. XVIII.) angeführter Schrift; so wie auch in dessen Visirkunst oder die einfachste und sicherste Art runde, ovale und Eyfässer, so wie eckigte Fässer aller Gattung zu visiren, für Visirer und Umgelderer. Nürnberg 181[illegible] noch weiter nachlesen. Ich glaube, daß das bisherige das Vorzüglichste erläutern wird, was in Rücksicht auf die Visirkunst brauchbar seyn mögte.

Zehn=

Zehntes Kapitel.

Einige andere Anwendungen von den Lehren des sechsten Kapitels, auf Gegenstände der Baukunst, Kriegsbaukunst u. s. w.

Stäbe an Säulenordnungen, Hohlkehlen u. d. gl. zu berechnen.

§. 181.

1. Stäbe nennt man solche Glieder an einer Säule, oder überhaupt einem runden Körper, welche sich in einem Profile durch die Axe des Körpers, auswärts nach einem Kreisbogen gekrümt darstellen, z. B. AL, LF (Fig. 86. 90.), Hohlkehlen hingegen, welche sich nach einem Kreisbogen einwärts gekrümt darstellen z. B. FI (Fig. 88. 90).

2. Man gedenke sich in Fig. 66. KM als Axe einer Säule, und zwischen den Perpendikeln GL, KA einen mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreisbogen AL oder FI, so wird, wenn sich die ganze Figur KGLA um KM drehet, der Kreisbogen AL einen runden Körper zwischen zwey Parallelkreisen von den Halbmessern KA und GL, beschreiben, und eben so

der

den Kreisbogen [illegible] einen [illegible] elliptischen [illegible] von den Halbmessern KF, GL. Jener würde einen Stab, dieser eine Hohlkehle geben.

Körperlicher Inhalt eines Stabes.

§. 182.

1. Man lasse in §. 178. 5. und in Fig. 64. oder auch Fig. 66. CA = CE oder a = c = 2r = dem Durchmesser des mit CA = r beschriebenen Kreisbogens AL seyn. Ferner KC = b; KG = x; KA = k = b + r, so erhält man für den körperlichen Inhalt des von dem Kreisbogen AL beschriebenen runden Körpers oder Stabes den Ausdruck

$$Z = \pi x (b^2 + r^2 - \tfrac{1}{3} x^2 + b \sqrt{(r^2 - x^2)})$$
$$+ \pi b r^2 \, \mathfrak{B} \sin \frac{x}{r}$$

wie man leicht findet, wenn man in die Formel für Z (§. 118. 3.) a = c = 2r setzet.

Viertelstab.

2. Bey dem Viertelstabe (Fig. 86.) ist die so genannte Ausladung AQ zur Höhe QL oder KG = 2 : 3. Ich will dieß Verhältniß überhaupt = m : n setzen.

3. Aus diesem Verhältniß und der Höhe KG = x bestimmt sich der Halbmesser AC = r

des

7. Wäre bey einem Stabe das Verhältniß $AQ : QL = 1 : 1$; also $AQ = QL$, so hat man wegen $m = 1$; $n = 1$:

$$r = k$$

$$\sqrt{(r^2 - x^2)} = 0;\ b = k - x$$

$$\sin \tfrac{x}{2} = \sin r = 90^\circ = \tfrac{1}{2}\pi = \frac{3{,}1415}{2} = 1{,}5707$$

welches denn

$$Z = \pi x (k^2 - 0{,}429\,k x + 0{,}096\,x^2)$$

giebt.

Ganzer Stab (Pfuhl).

8. Bey diesem ist (Fig. 87.) LAL ein Halbkreis also AL Quadranten; mithin $AQ : QL$ wie (6) $= 1 : 1$. Ist demnach $AK = k$; $KG = \tfrac{1}{2} GG = x$, so ist der von jedem Quadranten wie AL beschriebene körperliche Raum $= \pi x (k^2 - 0{,}429\,k x + 0{,}096\,x^2)$, welches demnach verdoppelt für den ganzen vom Halbkreis LAL beschriebenen Stab den Ausdruck

$$Z = 2\pi x (k^2 - 0{,}429\,k x + 0{,}096\,x^2)$$

giebt, in welchem $x = GK$ die halbe Höhe des Stabes bedeutet.

Würde aber x die ganze Höhe GG des Stabes bezeichnen, so würde man

$$Z = \pi x (k^2 - 0{,}214\,k x + 0{,}024\,x^2)$$

erhalten.

Körperlicher Inhalt einer Hohlkehle.

9. Wenn in (Fig. 66.) für den Bogen Fl, welcher die Hohlkehle beschreibt (2), die Abscisse KG = x und die Ordinate Gl = y genannt wird, so ist die Gleichung zwischen x und y dieselbe welche (§. 118. 4.) vorgekommen ist, wenn man nur das dortige a = c = 2r setzt, wo r den Halbmesser CF des Kreisbogens Fl bezeichnet. M. s. auch §. 120 Beysp. II.

Man setze also auch in den dort für Z' gefundenen Ausdruck statt a und c den Werth 2r, so erhält man für den durch den Kreisbogen Fl beschriebenen körperlichen Raum, d. h. für die durch Fl beschriebene Holzkehle die Formel

$$Z' = \pi x \left(b^2 + r^2 - \tfrac{1}{3}x^2 - b\sqrt{(r^2 - x^2)}\right) - \\ - \pi b r^2 \operatorname{Bog\,sin} \frac{x}{r}$$

worin b = KC = KF + FC, oder wenn jetzt KF = k genannt wird, b = k + r. ist.

10. Man setze für die Hohlkehle (Fig. 88.) die Ausladung Ql zur Höhe QF, oder Ql : KG in dem Verhältniß m : n; so ist Ql = Fq = $\frac{m}{n}$. GK = $\frac{m}{n}$. x, und der Halbmesser r des Kreisbogens Fl = $\frac{n^2 + m^2}{2mn}$. x völlig wie (3)

 dann

dann ebenfalls $\sqrt{(r^2-x^2)} = \frac{n^2-m^2}{2mn} \cdot x$

und $\mathfrak{B} \sin \frac{x}{r} = \mathfrak{B} \sin \frac{2mn}{n^2+m^2}$.

11. Für die gewöhnlichen Hohlkehlen ist $m:n = 1:2$ also $m = 1$, $n = 2$; mithin wie (6) $r = \frac{5}{4}x$; $\sqrt{(r^2-x^2)} = \frac{3}{4}x$ und $\mathfrak{B} \sin \frac{x}{r} = 0{,}9273$; b hingegen $= k + \frac{5}{4}x$ (9).

Diese Werthe in den Ausdruck (9) substituirt, geben nach gehöriger Rechnung den körperlichen Inhalt einer solchen Hohlkehle

$$Z' = \pi x (k^2 + 0{,}251\,kx + 0{,}043\,x^2)$$

12. Für das Verhältniß 1:1, also wenn die Ausladung Ql = der Höhe QF, findet man $r = x$; $\sqrt{(r^2-x^2)} = 0$, $\mathfrak{B} \sin \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\pi = 1{,}570\ldots$ wie (7), demnach

$$Z' = \pi x (k^2 + 0{,}429\,kx + 0{,}096\,x^2)$$

13. Aus diesen Rechnungen ergiebt sich nun der körperliche Inhalt von Karniessen und anderen Gliedern der Säulenordnungen z. B.

Für den großen Karnieß.

14. In diesem ist (Fig. 89.) der Theil Z' eine Hohlkehle in dem Verhältniß 1:1 wie (12) und

und der Theil Z ein Stab gleichfalls in dem Verhältniß 1 : 1 wie (7), und die Mittelpunkte von den Quadranten Fl, FA liegen in der Mittellinie KF des Karnießes. Man nenne also diese Linie KF = k, so ist der **körperliche Inhalt des Karnießes** = Z' + Z = der Summe der in (12) und (7) gefundenen Werthe d. h. $= \pi x (2k^2 + 0{,}192 x^2)$ wo x die **halbe Höhe** GG des Karnießes bedeutet.

15. Nennet man aber die **ganze Höhe** GG des Karnießes = x, so muß man in den (14) gefundenen Werth $\frac{1}{2}x$ statt x setzen, welches denn für den körperlichen Raum des Karnießes den Werth $\pi x (k^2 + 0{,}024 x^2)$ giebt; also ohne merklichen Fehler $\pi x k^2$.

Für den verkehrten Karnieß (Fig. 90.)

16. Ist der Theil Z ein Stab in dem Verhältniß 1 : 2 wie (6) und Z' eine Hohlkehle in dem Verhältnis 1 : 2 wie (11). Also der körperliche Inhalt des verkehrten Karnießes =

$$Z + Z' = \pi x (k^2 - 0{,}251 kx + 0{,}043 x^2) + \pi x (\mathfrak{k}^2 + 0{,}261 \mathfrak{k} x + 0{,}043 x^2)$$

wo k für den Theil Z die Linie GL bedeutet, weil des Bogens FL Mittelpunkt in GL fällt, und $\mathfrak{k}$ für den Theil Z' die Linie Gl in deren Verlängerung des Bogens Fl Mittelpunkt zu liegen kömmt.

dann ebenfalls $\sqrt{(r^2 - x^2)} =$

und $\mathfrak{B} \sin \frac{x}{r} = \mathfrak{B} \sin \frac{2m}{n^2}$

11. Für die gewöhn…
m:n = 1:2 also m = …

(6) $r = \frac{5}{4}x$; $\sqrt{(r^2}$ …

$= 0,9273$; b hin…

Diese Werth…
tuirt, geben n…
perlichen Inh…
$Z' = \pi x$ … x
… Fehler bloß

12. F… …
die Ausl…

$r = x$: Hohlkehle. (Fig. 91.)

1,57 …ie besteht aus zwey Hohlkehlen im …hältniß 1 : 1, deren erstere Z' aus … = k und der Höhe KG, die andere aus … und KG' nach (12) gefunden werden kann, weil die Mittelpunkte t, u von beyden Quadranten Fl, Fl', nach der Constructionsart der Hohlkehle lFl', in KF fallen.

Gewöhnlich ist nun zugleich KG = $\frac{1}{3}$GG', und folglich KG' = $\frac{2}{3}$GG'. Wird also die ganze Höhe GG' = x genannt, so findet sich

der

... der doppelten Hohlkehle
...8kx+b,032x²) ...
...struktionsart der bisher be-
...tonischen Glieder sehe ich
...fs Anfangsgründen
...offen Anfangsgr.
...en Wissenschaf-
...Schriften über die
...s. Kann man
...gegebenen Säulen
... Inhalt der
...gt würde,

...uppeln, Glocken, al-
... Gefäßen u. d. gl.

§. 183.

1. Da die Kuppeln von Thürmen, wie die Glieder einer Säule, oft nach allerley ein- und auswärtsgehenden Kreisbogen geformt sind, so erhellet, daß wenn übrigens eine solche Kuppel rund ist, d. h. alle horizontalen Schnitte derselben Kreise sind, die ein- oder auswärts gekrümmten Theile derselben, völlig wie die Glieder einer Säulenordnung berechnet werden können, und daher die allgemeinen Regeln (§. 182.) auch hier ihre Anwendung finden.

Wären z. B. bey einer solchen Kuppel wie (Fig. 92.) die gekrümmten Theile Quadran-

17. Man ziehe durch l die Linie $l\lambda$ parallel mit GG, so ist nach der Construktionsart des verkehrten Karnießes $L\lambda = \frac{1}{2}GG = KG = x$, und folglich GL oder $k = \mathfrak{k} + x$ und die Mittellinie $KF = \frac{1}{2}(k + \mathfrak{k}) = \mathfrak{K}$. Also $k = \mathfrak{K} + \frac{1}{2}x$ und $\mathfrak{k} = \mathfrak{K} - \frac{1}{2}x$. Setzt man diese Werthe in den Ausdruck (16), so wird der Inhalt des verkehrten Karnießes $= \pi x\,(2\mathfrak{K}^2 + 0{,}335\,x^2)$, wo $KG = x$ die halbe Höhe GG bedeutet. Soll aber die ganze Höhe GG des Karnießes mit x bezeichnet werden, so muß man in den gefundenen Ausdruck $\frac{1}{2}x$ statt x setzen. Dann erhält man für den Inhalt des Karnießes den Ausdruck $\pi x\,(\mathfrak{K}^2 + 0{,}042\,x^2)$; wofür, wenn x gegen $\mathfrak{K}$ klein ist, ohne großen Fehler bloß $\pi x . \mathfrak{K}^2$ gesetzt werden kann.

Doppelte Hohlkehle. (Fig. 91.)

18. Diese besteht aus zwey Hohlkehlen in dem Verhältniß 1 : 1, deren erstere Z' aus $KF = k$ und der Höhe KG, die andere aus KF und KG' nach (12) gefunden werden kann, weil die Mittelpunkte t, u von beyden Quadranten Fl, Fl', nach der Constructionsart der Hohlkehle lFl', in KF fallen.

Gewöhnlich ist nun zugleich $KG = \frac{1}{3}GG'$, und folglich $KG' = \frac{2}{3}GG'$. Wird also die ganze Höhe $GG' = x$ genannt, so findet sich der

der Inhalt der doppelten Hohlkehle $= \pi x (k^2 + 0{,}238\, kx + 0{,}032 x^2)$.

19. Die Constructionsart der bisher betrachteten architectonischen Glieder setze ich übrigens aus Wolfs Anfangsgründen der Baukunst in dessen Anfangsgr. aller mathematischen Wissenschaften I. Th. oder andern Schriften über die Baukunst, als bekannt voraus. Kann man solche einzelne Theile einer vorgegebenen Säule berechnen, so läßt sich daraus der Inhalt der ganzen Säule, wenn solcher verlangt würde, ableiten.

Berechnung von Kuppeln, Glocken, allerley Gefäßen u. d. gl.

§. 183.

1. Da die Kuppeln von Thürmen, wie die Glieder einer Säule, oft nach allerley ein- und auswärtsgehenden Kreisbogen geformt sind, so erhellet, daß wenn übrigens eine solche Kuppel rundist, d. h. alle horizontalen Schnitte derselben Kreise sind, die ein- oder auswärts gekrümmten Theile derselben, völlig wie die Glieder einer Säulenordnung berechnet werden können, und daher die allgemeinen Regeln (§. 182.) auch hier ihre Anwendung finden.

Wären z. B. bey einer solchen Kuppel wie (Fig. 92.) die gekrümmten Theile Quadranten,

ten, so würde man sie aus der Mittellinie KF=k und der Höhe GG=x, völlig wie einen großen Karnieß (§.182.) nach der daselbst (15) gegebenen Formel berechnen.

2. Ist eine Kuppel nicht rund, sondern nach einem regulären Polygon gebaut, so daß ihre horizontalen Schnitte lauter ähnliche reguläre Polygone darstellen, so berechnet man die Kuppel erst unter der Voraussetzung (1), daß sie ein runder Körper wäre, und verfährt dann nach den Vorschriften des 125ten §es (Das. 9.) d. h. man multiplicirt den zuerst gefundenen Inhalt Z der als einen runden Körper berechneten Kuppel in den Quotienten $\frac{T}{a^2 \pi}$ wo T den Quadratinhalt des Polygons bedeutet, welches der Kuppel zur Grundfläche dient, und a den Halbmesser GA dieses Polygons (§.125. 12.) Die weitere Ausführung will ich jedem selbst überlassen.

3. So könnte auch (Fig. 92.) eine Glocke vorstellen, deren Inhalt ebenfalls nach (1) gefunden werden kann.

Um den massiven Theil der Glocke zu finden, und darnach zu beurtheilen, wie viel Metall etwa zum Gießen derselben erforderlich seyn mögte, muß man aus der bekannt angenommenen äußern Krümmung a f g, auch die innere

Höh=

Höhlung afghb nach den bisherigen Vorschriften berechnen, und diesen Inhalt von dem äußern AFGHB abziehen.

4. Dürfte man AFGHB und afghb als ähnliche Körper betrachten, so würde man afghb sogleich aus AFGHB selbst finden können, weil ähnliche Körper sich wie die Würfel gleichnahmigter Linien verhalten z. B. wie $GA^3 : Ga^3$. Dieß gäbe denn sogleich $afghb = \frac{AFGHB \cdot Ga^3}{GA^3}$ und den massiven Theil der Glocke $= AFGHB - afghb = \frac{AFGHB \cdot (GA^3 - Ga^3)}{GA^3}$

5. In der Ausübung kommen oft allerley Gefäße vor, deren Durchschnitte z. B. wie Fig. 89. 90. oder auf ähnliche Arten nach Kreisbogen gestaltet sind. Begreiflich können die bisherigen Regeln gleichfalls zur Berechnung des körperlichen Inhalts solcher Gefäße benützt werden.

Körperliche Räume von Geschützen.

§. 184.

So können denn die Vorschriften von (§. 182.) auch auf mancherley Weise zur Ausrechnung des Inhalts von Kanonen, Mörsern, u. d. gl. angewandt werden, bey denen ebenfalls,

allerley architectonische Glieder zur Verzierung angebracht werden. Man kann also dadurch gleichfalls die zum Giessen erforderliche Menge [illegible] bekommen. Verlangt man bloß den [illegible] Theil des Geschützes, so müssen die [illegible] besonders berechnet, und von dem [illegible] ganzen abgezogen werden. Auch [illegible] des Schwerpunktes eines Ge[illegible] der davon abhängenden Hinter[illegible] desselben, wenn etwa eine neue Art [illegible] Geschützes projectirt, oder eine [illegible] in den Formen getroffen werden [illegible] können die bisherigen Vorschriften be[illegible] werden, welches aber hier nicht umständ[illegible] ausgeführt werden kann.

Berechnung des körperlichen Inhalts an Festungswerken.

§. 185.

Man sieht leicht, daß diese Berechnungen sich großentheils auf Parallelepipeden, **Prismen, abgekürzte Pyramiden, schief abgeschnittene Prismen** u. dgl. werden bringen lassen, wovon die allgemeinen Regeln bereits im IIten und IVten Kapitel vorgekommen sind.

1. Hier nur einige Beyspiele zur Erläuterung. lmnopqr (Fig. 93) stelle den lothrechten Durchschnitt eines Walles vor, nach einer

einer Winkel r, welche die parallelen Linien la, sb, tc... des Grundrisses alle unter einem rechten Winkel schneidet. Man verlangt den körperlichen Inhalt des Walles von diesem Durchschnitte bis zu einem andern lothrechten Schnitte, welcher die parallelen Linien im Grundrisse schief z. B. in ag durchschneidet, also ein Stück des Walles von lr bis an eine Ecke ag, wo er eine neue Richtung nimmt.

2. Man begreift, daß wenn man in dem Profile von den Punkten m, n, o, p... Perpendikel oder lothrechte Linien ms, nt, ou... auf lr herabfällt, das Profil dadurch in Dreyecke und Trapezien zerlegt wird, deren jedes wie mnst durch eine Diagonale, wie mt, für sich besonders auch wieder in zwey Dreyecke zerfällt.

3. Jedes solches Dreyeck wie lms, smt, ... ist als die Grundfläche eines senkrechten, durch die lothrechte Ebene über ag schief geschnittenen dreyeckigten Prisma, zu betrachten, dessen Inhalt nach (§. 35. V. ꝛc.) gefunden werden kann.

4. Ich will die Dreyecke, der Ordnung nach, mit A, B, C... und die parallelen Linien welche im Grundrisse von l, s, t u. s. w. bis an die schiefe Linie ag gehen, nemlich la = a; sb = b; tc = c u. s. w. nennen.

5. So

ABCD sey die Grundfläche einer Einfassung oder Erhöhung, deren Profil, senkrecht auf jede Parallelen, wie ab, AB, ein Trapezium mnpq bilde; dessen parallele Seiten mp, qn, man sich auf die Ebenen jener Vielecke senkrecht gedenken muß.

pmn = B, und pqn = A, seyen die Flächenräume der beyden Dreyecke, in welche das Profil mnpq zerfällt, so ist der körperliche Raum der Einfassung von mn, bis an den schiefen Schnitt Bb, den man sich lothrecht auf die [illegible] der beyden Vielecke gedenken muß $= \frac{\ldots m + bn)}{3} + \frac{A(2\,bn + Bm)}{3}$

([illegible] eben so der körperliche Raum von [illegible] an Aa $= \frac{B(2.Am + an)}{3} + \frac{\ldots m + Am)}{3}$; mithin der körperliche Raum [illegible]schen Aa und Bb = der Summe der beyden gefundenen Ausdrücke $= \frac{B(2\beta + \alpha)}{3} + \frac{(2\alpha + \beta)}{3}$, wenn der Kürze halber die Summe der beyden Linien Am + Bm d. h. die Polygonseite AB = β, und eben so die Summe der beyden Linien an + bn oder die Polygonseite ab = α genannt wird.

12.

12. Begreiflich bezeichnen die Ausdrücke $\frac{B.(2\beta + \alpha)}{3}$; $\frac{A.(2\alpha + \beta)}{3}$ die körperlichen Räume über der Grundfläche ABab, deren Profile die Dreyecke B, und A seyn würden.

13. Gedächte man sich auf eine ähnliche Weise die Linie qm in dem Profile gezogen, so würde auch dem Dreyeck $qmn = qpn = A$ ein körperlicher Raum $= \frac{A.2\alpha + \beta}{3}$ über der Grundfläche AaBb entsprechen.

14. 𝔄𝔅ℭ𝔇 sey ein drittes Polygon gleichfalls den vorhergeheuden parallel und ähnlich, und zwischen ABCD, 𝔄𝔅ℭ𝔇 ebenfalls eine Erhöhung deren Profil das Dreyeck $pum = C$ sey. Wird nun die Polygonseite $𝔄𝔅 = \gamma$ genannt, so ist auf eine ähnliche Art der körperliche Raum über der Grundfläche $A𝔄𝔅B = C\,\frac{2\beta + \gamma}{3}$.

15. Man multiplicirt also allemahl die Fläche eines solchen Dreyecks im Profile, in den dritten Theil derjenigen Summe, welche man erhält, wenn man zu der doppelten Polygonseite auf der die Höhe des Dreyecks senkrecht steht, diejenige Polygonseite addirt, welche durch den dieser Höhe gegenüberstehenden Winkelpunkt dieses Dreyecks geht.

16.

16. Das Profil upqh einer Erhöhung über der Grundfläche AB ab mag also aus so viel Dreyecken man will bestehen, so läßt sich der körperliche Raum dieser Erhöhung sehr leicht berechnen, wenn man von allen Punkten des Profils wie p, q, lothrechte Linien pm, qn auf die Grundfläche herabläßt, und durch die projicirten Punkte wie m, n, Parallellinien mit der Seite ab des vorgegebenen Polygons ziehet, hierauf die Linien ab $= \alpha$, AB $= \beta$, AB $= \gamma$ rc. misset, und bey der Berechnung der einzeln körperlichen Räume so verfähret wie (11 — 14) gelehrt worden ist.

17. Hat das Polygon n Seiten, so darf man einen solchen körperlichen Raum wie über AaBb nur noch mit dieser Zahl von Seiten multipliciren, um den ganzen körperlichen Raum der Erhöhung oder Einfassung zwischen dem innersten und äußersten Polygon abcd und ABCD zu erhalten.

18. So ist also z. B. für den Theil der Einfassung, welcher im Profile dem Dreyecke mqn $= A$ entspricht, der körperliche Raum ringsherum $= nA \frac{2\alpha + \beta}{3} = A \frac{2.n.\alpha + n.\beta}{3}$, wo also $n.\alpha$; $n.\beta$ die ganzen Umkreise der Polygone abcd; ABCD bezeichnen.

19. Man dürfte also in den einzeln körperlichen Räumen (11—14) statt α, β, γ auch nur sogleich die ganzen Umkreise der Polygone setzen, um diese Räume für den ganzen Umfang der Einfassung zu erhalten.

20. Die bisherigen Betrachtungen gelten auch, wenn abcd, ABCD rc. concentrische Kreise sind, wie Fig. 95. weil man die Kreise als reguläre Vielecke von unzählig viel Seiten ansehen kann.

21. Bey einer kreisrunden Erhöhung oder Einfassung, deren Profil upqmn seyn würde, ist demnach der einem jeden Dreyecke wie mqn = A ringsherum entsprechende körperliche Raum gleichfalls = $A\frac{2\alpha+\beta}{3}$ wo α, β die durch n, m gehenden Kreisumfänge bezeichnen müssen, welche sich denn aus ihren Halbmessern ne, me die ich a, b nennen will, berechnen lassen. Es ist nemlich $\alpha = 2a.\pi$ und $\beta = 2b.\pi$, demnach die ringförmige Einfassung oder Erhöhung, welche zu ihrem Profil das Dreyeck mqn = A haben würde = $\frac{2}{3}A\pi(2a+b)$. So läßt sich auf eine ähnliche Art für jedes andere Dreyeck des Profils upqm verfahren.

22. So lehrt also das bisherige Verfahren z. B. den Cubikinhalt einer runden

Schanze

Schanze oder Redoute zu finden, aus so viel Dreyecken oder Trapezien auch das Profil upqn derselben bestehen mag, überhaupt den Inhalt einer jeden kreisförmigen Einfassung oder Erhöhung um einen vorgegebenen Platz zu finden, wenn das Profil dieser Einfassung aus lauter geraden Linien nq, pq, pu zusammengesetzt ist. (Ringförmige Körper mit geradlinigten Profil) dergleichen öfters in der Ausübung vorkommen. In (§. 119. ꝛc.) wurden ringförmige Körper mit krumlinigten Profil betrachtet, wovon sich die Anwendung auf die Berechnung von Gewölben machen läßt, welche in einer Ründung herumlaufen u. d. gl.

Kreisrunde Befestigungsarten sind von mehreren Schriftstellern empfohlen worden. M. s. hierüber in Böhms Magazin für Ingenieurs und Artilleristen VIII. Band S. 77 ff. Bey der Berechnung der dazu auszugrabenden Menge von Erde, des davon abhängenden Arbeitslohnes, und anderer Gegenstände, welche den Bau einer runden Brustwehre betreffen, können die beygebrachten Vorschrifften auf mancherley Art nützlich seyn. So bey andern Gegenständen der Baukunst z. B. runden Bassins, hohlen Flanken Dämmen u. d. gl.

§. 186.

§. 186.

1. Anwendungen der körperlichen Geometrie auf allerley Gegenstände der Kriegs- und Civilbaukunst lassen sich überhaupt in großer Menge gedenken, und wer würde sie hier alle ausführen. In Penthers Anweisung zu Bau-Anschlägen und ähnlichen Schriften wird man Beyspiele genug finden.

2. Herr N. Ypey hat einige die Festungsbaukunst betreffende Fragen im Vten Theile der Abhandl. der Harlemschen Gesellschaft der Wissenschaften aufgelöset, wovon sich auch eine Uebersetzung in Böhms Magazin für Ingenieurs und Artilleristen B. I. S. 63. findet.

3. Ebendaselbst B. X. S. 107. Verschiedene Aufgaben über die Berechnung des Grabens um eine Brustwehre, von Hrn. Oberst v. Clasen.

4. Anwendung des körperlichen Inhalts eines abgekürzten Kegels, auf die Berechnung der Wiederlagen an einem Pulverthurme mit gebrochenem Dache. Ebendas. B. X. S. 201.

5. Abgekürzter Kegel, Paraboloiden (§. 114.) auf die Berechnung der Minenladungen. Struensees Artillerie §. 307. ff.

Morla Lehrbuch der Artilleriewissenschaft aus dem Spanischen von Hoyer. (Leipz. 1796. 1sten Theils 2ter B. S. 500 ff.

Pontons, Schiffsräume.

§. 187.

1. In (Fig. 96) stelle der daselbst gezeichnete Körper einen Ponton in umgekehrter Lage vor, den Boden a b c d zuoberst, und den offenen Theil unten.

2. Dieser Boden abcd ist bey einem solchen Körper ein rechtwinklichtes Parallelogramm, und seine gegenüberstehende Oeffnung ABCD gleichfalls ein rechtwinklichtes Parallelogramm, dessen Seiten AB, BD, DC, CA der Ordnung nach denen ab, bd, dc, ca parallel sind. Die Seitenflächen CcDd, AabB, ACca, BDbd sind also Trapezien, in welchen bd parallel mit BD, cd parallel mit CD u. s. w. sind. Die langen Seitenflächen CcdD, AabB sind gegen die Grundflächen gewöhnlich unter gleichen Winkeln geneigt. Die kürzern AacC, bBdD können einerley oder auch verschiedene Neigung gegen die Grundflächen haben.

3. Ein Profil mnop senkrecht auf die langen Seitenlinien (in (Fig. 97) ist das Profil besonders abgebildet) wird also ein Trapezium darstellen, in welchem mn parallel mit op,

und mn, np, gleiche Winkel mit op und mn machen, sobald die langen Seitenflächen des Pontons einerley Neigung gegen die Grundflächen haben.

4. Ich betrachte zuerst den Theil des körperlichen Raumes, von der Profilfläche mnop, bis zur Seitenfläche hdBD. Offenbar stellt er ein senkrechtes aber durch BDbd schief geschnittenes Prisma über der Grundfläche mnop dar.

5. Zieht man in dem Profil die Linie on, und in der Seitenfläche BDbd, die Linie Bd, so zerfällt jenes Prisma in zwey dreyeckigte schiefgeschnittene über den Grundflächen opn, omn.

6. Also ist der körperliche Raum

zwischen opn und BDd $= \Delta opn \cdot \frac{oB + pD + nd}{3}$

zwischen omn und bBd $= \Delta onm \cdot \frac{oB + mb + nd}{3}$

Auf eine ähnliche Weise zerfällt auch der körperliche Raum zwischen opmn und ACac in zwey solche schief geschnittene Prismen, und man erhält den körperlichen Raum

zwischen opn und ACc $= \Delta opn \cdot \frac{oA + pC + nc}{3}$

zwischen omn und cAa $= \Delta onm \cdot \frac{oA + ma + nc}{3}$

7. Addirt man also die 4 körperlichen Räume (6) zusammen und nennt $\Delta opp = B$; $\Delta onm = A$;
$Bo + Ao = Dp + Cp = CD = AB = b$ und
$bm + ma = dn + nc = cd = ab = a$
so wird der körperliche Raum des ganzen Pontons $= A . \frac{2a + b}{3} + B . \frac{2b + a}{3}$,
... Drenecke des Profils leicht aus ... $= c$, und $op = BD = d$ berechnet ... nen, wenn übrigens noch die Höhe ... ils, also die senkrechte Tiefe $= h$ des ... gegeben ist.

8. Es wird nemlich Δopn oder $B = \frac{h . d}{2}$;

und $\Delta omn = A = \frac{h . c}{2}$, welche Werthe in den Ausdruck (7) substituirt, für den körperlichen Raum des Pontons den Werth
$(c(2a + b) + d(2b + a)) \frac{1}{6} h$ geben, welcher demnach aus den Seitenlinien der beyden Parallelogramme abcd, ABCD, und der Tiefe des Pontons sehr leicht berechnet werden kann.

9. Diese Formel ist allgemein, wie auch selbst die langen Seitenflächen gegen die Grundfläche geneigt seyn mögen. Denn die bisherigen Schlüsse setzen nicht voraus, daß in dem Profile die Winkel o, p, nothwendig einander gleich seyn müssen.

10.

10. Man hat also überhaupt auf die Winkel des Pontons gar keine Rücksicht zu nehmen, daher die Sache in Kästners geometrischen Abhandlungen 2te Sammlung S. 71 unnöthiger Weise weitläuftig gemacht ist. Die 5 Grössen a, b, c, d, h lassen sich an einem vorgegebenen Ponton leicht messen.

11. Einzelne Fälle wären, wenn z. B. die Seitenflächen CcDd, AabB auf der Grundfläche senkrecht ständen. Für diesen Fall ist das Profil ein rechtwinklichtes Parallelogramm und also mn = op d. h. c = d (7) demnach der körperliche Raum eines solchen Pontons $= \frac{1}{2}(a+b)\,c\,.\,h$.

12. Oder wenn die beyden Rechtecke abcd, ABCD einander ähnlich wären, so daß der Ponton eine abgekürzte Pyramide wäre. Für diesen Fall hätte man BD : DC = bd : dc oder d : b = c : a; also $d = \frac{b\,.\,c}{a}$; Demnach diesen Werth von d in (8) substituirt, der körperliche Raum des Pontons $= \frac{(a^2 + b^2 + ab)}{a}\,\frac{1}{3}\,c\,h$.

13. Man gedenke sich durch einen Punkt in der Seitenlinie np des Profils, einen Schnitt des Pontons mit der Grundfläche abcd parallel

rallelogramm. Er schneide die Ebene des Profils in μν Fig. 97. in einem senkrechten Abstande nq = x von der Grundfläche, wenn nk = h die ganze Tiefe des Pontons bezeichnet. Dieser Schnitt $\alpha\gamma\delta\beta$ ist offenbar auch ein Parallelogramm, dessen Seiten $\alpha\gamma$ und $\gamma\delta$ sind. Man nenne $\alpha\gamma = \beta\delta = \gamma$, und $\gamma\delta = \beta$, so ist der körperliche Raum des Pontons von der Grundfläche abcd bis zur Schnittfläche $\alpha\beta\gamma\delta = (c\,(2a + \beta) + \gamma\,(2\beta + a))\,\frac{1}{6}\,x$ völlig wie (8), nur daß in der dortigen Formel statt der ganzen Höhe h, die Höhe x, statt CD = b die Linie $\gamma\delta = \beta$ und statt BD = d die Linie $\beta\delta = \gamma$ gesetzt werden muß.

14. Die Linien γ, β kann man für jedes x leicht berechnen. Denn man ziehe de parallel mit Ce, so ist De = CD − cd = b − a und $\delta e = \gamma\delta - cd = \beta - a$. Ferner De : δe = nk : nq (Fig. 97). d. h. $b - a : \beta - a = h : x$; folglich $(b - a)\,x = (\beta - a)\,h$ und hieraus $\beta = \frac{b - a}{h}\,x + a$.

So wird auf eine ähnliche Weise $\gamma = \frac{d - c}{h}\,x + c$.

15. Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck (15), so wird der körperliche Inhalt des Pontons für die Tiefe x den Werth

Q =

$$Q = acx + \frac{a(d-c)+c(b-a)}{2h}x^2 + \frac{(b-a)(d-c)}{3h^2}x^3$$

erhalten.

16. Ist der körperliche Raum Q gegeben, so könnte man das x suchen, welches dem gegebenen Raum Q entspräche, aber dazu müßte eine cubische Gleichung aufgelöset werden, welches eine etwas beschwerliche Rechnung ist.

17. Indessen zeigt sich eine Anwendung der allgemeinen Formel (15) bey der Aufgabe wie tief ein Ponton, der mit einer gegebenen Last beschwert wird, sich in das Wasser eintauchen wird, wovon Herr Oberst v. Clasen in seiner Theorie der Pontons und ähnlicher Fahrzeuge in Böhms Magazin für Ingenieurs und Artilleristen VIII. B. gehandelt hat.

18. Wenn das Gewicht des Pontons in Pfunden = P ist, derselbe noch mit einer Last = L beschwert ist, und das Gewicht eines Cubikfußes Wasser = w genannt wird, so taucht sich von dem Ponton ein körperlicher Raum $Q = \frac{P+L}{w}$ Cubikfuße ins Wasser, nach hydrostatischen Gründen. Setzt man also diesen

Werth von Q in obige Gleichung, so kann man, durch Auflösung derselben, die Tiefe x des Eintauchens in Fußen finden, wenn die Abmessungen des Pontons also a, b, c, d, h in Fußen gegeben sind. Die weitere Ausführung hievon kann man a. a. O. nachlesen.

19. Hr. v. Cl. stellt mehr lehrreiche Untersuchungen an, z. B. Pontons nach gegebenen Bedingungen zu machen. Wer sich damit einlassen will, wird die allgemeine Formel (15) dazu bequem finden. Hr. v. Cl. führt die Rechnung unter andern auch für die besondern Fälle (11. 12.), weil sich bey diesen einige Vortheile bey der Auflösung der Gleichung (15) zeigen.

20. Andere hieher gehörige Bemerkungen s. m. in Kästners oben (10) angeführter Abhandlung.

21. So kann man nun überhaupt auch fragen, wie tief ein Schiff unter Wasser gehen wird, wenn es mit einer gewissen Ladung belastet wird. Dazu ist nöthig, daß man den Raum eines Schiffes, für jede Höhe desselben über dem Boden, muß berechnen können.

Ferner, wenn man das Gewicht eines ausgerüsteten Schiffes finden will, darf man nur den körperlichen Inhalt desselben, so tief es unter Wasser geht, berechnen; dividirt man diesen Inhalt in Cubikfußen mit dem Gewicht eines Cubikfußes Wassers, so hat man das

ganze Gewicht des Schiffes in Pfunden, welches mit 2000, dem Gewicht einer so genannten Tonne, dividirt, das Gewicht des Schiffes in Tonnen giebt.

Solchergestalt kann man, wenn das Gewicht eines ausgerüsteten Schiffes, zu dem man einen Riß gemacht hat, bekannt ist, darnach prüfen, ob der Wasserspiegel auf dem Risse recht liegt, wenn man den körperlichen Inhalt des Wasserraums (Carêne) nach Cubikfußen berechnet. Wüßte man z. B. daß ein zu einem Seezuge von 6 Monaten, völlig ausgerüstetes 70 Kanonenschiff ohngefähr 2350 Tonnen wiegt, so würde der Wasserraum desselben, d. h. der ganze körperliche Raum desselben bis an den Wasserspiegel 63513 Cubikfuße betragen müssen, das Gewicht eines Cubikfußes Seewasser ohngefähr zu 74 Pfund angenommen.

Diejenigen welche sich bestreben gute Schiffe zu bauen, müssen ihre Entwürfe zu berechnen wissen, um sicher zu seyn, daß die unterste Lage die gehörige Höhe über dem Wasser erhält. Gute Schiffsbaumeister, z. B. Olivier, Luc Coulombe, Deslauriers, Grognard u. a. haben nie den Bau eines Schiffes unternommen, ohne eine solche Berechnung zu machen.

22. Die im vorhergehenden beygebrachten Lehren der Stereometrie würden hier in jedem

Fälle Regeln zur Berechnung des Wasserraums darbieten, wenn der Wasserraum, oder auch einzelne Stücke desselben, eine bestimmte und regelmäßige Gestalt hätten, wenn z. B. entweder die horizontalen Schnitte alle einander ähnlich wären, oder wenn diese Bedingung bey den verticalen Schnitten statt fände u. s. w. In diesem Falle würde man die Vorschriften zur Berechnung des Inhalts entweder bis zu jedem horizontalen oder verticalen Schnitt, aus den Lehren des siebenten Kapitels ableiten können. Allein fast nie wird diese Bedingung durch den ganzen Schiffsraum statt finden, wenn sie gleich unterweilen für einzelne größere Theile desselben ohne großen Fehler angenommen werden kann. Aber auch dann fallen, wie man aus §. 132. sehen kann, die Rechnungen oft sehr beschwerlich aus.

23. Man wird sich also nur mit einer Näherungsmethode begnügen müssen, welche denn auch immer hinlänglich ist, da hiebey Niemand einen Ueberschlag in völlig geometrischer Strenge verlangen wird.

Diese Methode ist nun keine andere als welche bereits im 133. §. angegeben ist, wo z. B. in (Fig. 72) der körperliche Raum zwischen NAM und h einen Theil eines solchen Schiffsraums vorstellen könnte, wenn die dortigen Horizontalabschnitte NAM, nAμ ꝛc. als verticale Schnitte in dem Schiffsraum angesehen wür-

würden, und als MNKM einen horizontalen Schnitt bis zum Wasserspiegel vorstellt.

24. Man könnte aber auf eine ähnliche Art auch Schnitte, mit NKM parallel, durch den Schiffsraum führen, und die Summe aller körperlichen Stücke zwischen diesen Schnitten berechnen.

25. Die einzeln zur Berechnung nöthigen Maaße lassen sich dann aus den Grund- und Profilrissen, sowohl nach der Länge als Quere des Schiffsraums, welche bey dem Entwurfe eines Schiffs gemacht worden sind, abnehmen.

26. Solche Annäherungsmethoden zur Berechnung der Schiffsräume haben Bouguer (Traité du Navire. Paris 1746. 4. Chap. II. p. 206 ff.) und andere, als die einzig brauchbaren empfohlen.

27. Ein vollständiges Beyspiel einer solchen Berechnung findet man in den Anfangsgründen der Schiffsbaukunst, oder pract. Abhandl. über den Schiffbau, welche Herr Obristl. C. G. D. Müller in Stade aus dem Französischen des Hrn. Duhamel du Monceau übersetzt hat (Berlin 1791. in 4.) im VIII. Kap. S. 290 rc. nebst der Anwendung davon auf die Prüfung der Lage der Wasserspiegel auf dem Risse, auf die Fähigkeit und Ladung der Schiffe rc.

Auch muß man den Inhalt von Schiffsräumen zu berechnen wissen, bey der Unter-

suchung

suchung des Schwerpunkts eines Schiffes, und den davon abhängenden Stabilität desselben, worüber man sowohl in Bouguers angeführter Schrift, als auch in Eulers Scientia Navalis Petrop. 1749. in *Vial du Clairbois* Traité elementaire de la Construction des batimens de Mer. à Paris. Tom. I. 1787. Tom. II. 1805. im zweyten Theil S. 209 ff. und anderen Schriften, das weitere nachlesen kann. Vorschriften, Schiffsräume zu berechnen, unter gewissen angenommenen Gestalten des Raumes findet man auch in *Pezenas* Theorie et Pratique du jaugeage des Tonneaux, des Navires et de leurs segmens. Sec. Ed. à Avignon 1778. In *Belley* Memoire sur le jaugeage des Navires. Paris. 1786.

Anwendungen der Stereometrie auf Gegenstände der Forstwissenschaft.

§. 188.

1. Mehrere derselben findet man in Hrn. Prof. Spaths Anleitung, die Mathematik und physikalische Chemie auf das Forstwesen und forstliche Cameralwesen nützlich anzuwenden. Nürnberg 1797. §. 31 ff. und in dessen Handbuch zur Forstwissenschaft. Nürnberg 1802. 3 Theile, im 2ten Th. §. 115 ff.

2. Von

2. Von der Berechnung des Cubikinhaltes der Klaftern sehe man oben (§. 9. ff.)

3. Baumstämme zu berechnen, und sie nach diesen Berechnungen zu taxiren, können die (§§. 28. 80.) gegebenen Regeln für den körperlichen Inhalt von Cylindern, abgekürzten Kegeln, auf mannichfaltige Weise angewandt werden.

4. Von den dazu brauchbaren Baummessern oder Dendrometern in Hrn. Prof. Späths angeführter Schrift Anleitung &c. S. 541 ff. Auch im dritten Theil meiner practischen Geometrie (vierte Auflage 1818) am Ende S. 642 &c.

5. Die Berechnung krummer Hölzer (Schiffsbuchten, Schiffsknie) kann, so genau hiebey nöthig ist, auf ein Parallelepipedum gebracht werden. Man multiplicirt die senkrechte Durchschnittsfläche in die krummlinigte Länge des Stücks, oder theilt auch das Stück Holz in kleinere Stücke, die man ohne merklichen Fehler für gerade annehmen kann, und berechnet jedes Stück aus seiner Länge und Profilfläche besonders.

6. Die Zahl der Bretter zu finden, welche aus einem Schrot geschnitten werden können, wenn die Dicke derselben und die des Sägeschnitts gegeben sind, lehrt Späth a. a. O. S. 551. Nach einigem Nachdenken wird man

diese und mehr ähnliche Aufgaben leicht auflösen können.

7. Ich nenne hier nur noch einige Bücher, aus denen man sich solche Rechnungen mit ihrem Detail bekannt machen kann:

Joh. Ehrenfr. Vierenklees Anfangsgründe der theoretisch practischen Arithmetik und Geometrie verbessert u. vermehrt v. Fr. Meinert. Leipz. 1797. S. 659. Stereometrie im Forstwesen.

Beyträge zur Forstwissenschaft aus der practischen Geometrie von C. W. H. Leipzig 1783. Daselbst §. 144. wird unter andern die Berechnung abgekürzter Kegel auf Kohlenmeiler angewandt.

Hofmann, Benutzung und Berechnung des Bauholzes. Königsberg 1799.

Hennerts Anweisung zur Taxation der Forsten. 2 Theile. Berlin 1791 und 1795, ist eines der vorzüglichsten hieher gehörigen Werke.

Abts Anweisung zur Ausmessung und Berechnung des Bau- und Nutzholzes, bemüht sich solche Rechnungen zum Behuf der Forstbedienten durch Tabellen zu erleichtern. (Berlin 1783.) Hieher gehören auch: Neue Tafeln, welche den cubischen Gehalt und Werth des runden, beschlagenen und geschnittenen Bau- und Werkholzes enthalten, verfertigt mittelst der Müllerischen Rechenmaschine. (Erfurt 1788.)

Krüger von Ausrechnung des Inhalts roher und behauener Baumstämme.

Cubiktabellen für geschnittene, beschlagene und runde Hölzer, nebst Geldtabellen etc. von G. L. v. Hartig Königl. Preuß. Oberland-Forstmeister. Berlin 1815.

§. 189.

Allerley mögliche stereometrische Aufgaben, bey denen die Lehre vom Größten und Klein-

sten vorkömmt, z. B. das größte gleichseitige Prisma, welches aus einem gegebenen Kegel geschnitten werden kann, zu finden; ein Kugelsegment zu bestimmen, welches bey einem gegebenen Inhalt die kleinste Oberfläche hat; unter allen Kegeln, deren Seitenfläche gegeben ist, den zu finden der den größten Inhalt hat u. d. gl. hat Hr. Friedr. Wilh. Daniel Snell ordentl. Prof. der Philosophie in Gießen in einer Schrift: Sammlung von 66 Uebungsaufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Gießen 1805 gegeben. Wem diese Lehre vom Größten und Kleinsten aus der Analysis bekannt ist, wird die bisher beygebrachten stereometrischen Lehren leicht auf solche Aufgaben, deren sich in Menge gedenken lassen, anwenden können. Eine hieher gehörige ist oben (§. 17.) vorgekommen.

§. 190.

In der Mechanik finden die stereometrischen Lehren mannichfaltige Anwendung, bey der Berechnung des Schwerpunkts, des Momentes der Trägheit, des Mittelpunkts der Schwingung und anderen Gegenständen der Maschinenlehre wovon man in den hiehergehörigen Schriften das weitere nachsehen kann. Für diese und mehr andere Anwendungen war es also nützlich, die Art der Berechnung der am meisten in der Ausübung vorkommenden Körper gezeigt zu haben.

§. 191.

§. 191.

Unterweilen ist es nützlich, den Inhalt des massiven Theiles eines Körpers, aus dem Gewichte desselben, und der bekannten specifischen Schwere der Materie, woraus er besteht, berechnen zu können z. B. den körperlichen Inhalt eines metallischen Klumpens, oder eines andern Naturkörpers, von durchaus gleicher Dichte, zu bestimmen, wenn die Figur desselben so beschaffen ist, daß sich der körperliche Raum nicht nach den vorhergehenden Regeln bequem würde finden lassen.

Das absolute Gewicht eines solchen Körpers heiße Q, das specifische Gewicht der Materie woraus er besteht, verhalte sich zu dem des Regenwassers $= \mu : 1$. Ist nun das Gewicht von 1 Cubikzoll Regenwasser $= a$, so ist das Gewicht von 1 Cubikzoll der Materie des Körpers $= \mu . a$; und folglich würde der Körper enthalten $\frac{Q}{\mu . a}$ Cubikzolle, wobey denn Q und a durch einerley Gewichtseinheiten ausgedrückt seyn müssen.

Das specifische Gewicht $= \mu$ des Körpers muß nun entweder nach dem bekannten Verfahren in der Hydrostatik vorher bestimmt, oder wenn die Materie desselben bekannt ist, aus den Tafeln über die specifischen Schweren genommen werden.

Die

Die vollständigste hieher gehörige Tafel findet sich in Brissons Schrift über die specifischen Gewichte der Körper aus dem Französ. v. J. G. L. Blumhof. Leipz. 1795.

Daß das specifische Gewicht sehr genau bekannt seyn muß, wenn nach dem angegebenen Verfahren der körperliche Raum des massiven Theiles eines Körpers mit erträglicher Schärfe soll können gefunden werden, bedarf kaum einer Erinnerung. Alle hieher gehörigen Vorsichten sind aber mehr ein Gegenstand der Hydrostatik, als der Stereometrie, und ich begnüge mich daher nur im Allgemeinen das Verfahren erläutert zu haben.

§. 192.

So gehört zu den mechanischen Verfahren den Inhalt eines jeden auch noch so irregulären Körpers zu finden, auch noch dasjenige, daß man den Körper, wenn es sich thun läßt, in ein hohles Parallepipedum legt, ihn mit Wasser oder feinen Sande übergießt, und die Höhe des Wassers, oder des wohlgeebneten Sandes an dem Parallelepipedum misset, hierauf den Köper herausnimmt, und abermahls die Höhe des Wassers oder Sandes genau bestimmt, und nun die Grundfläche des Parallelepipedum mit dem Unterschiede jener Höhen multiplicirt. Die nöthigen Vorschriften hiebey ergeben sich von selbst.

...ententafel.

Unterwei... ...besserungen.

massiven T...
wichte desse...
Schwere
rechnen
halt e...
ander
Dic...
so...
n...

... sich auf die Höhe eines jeden Durchmessers = 100.

A	B	Differenz C	A	B	Differenz C
			25	1955	
		17	26	2066	111
	3	31	27	2178	112
	87	39	28	2292	114
	134	47	29	2407	115
	187	53	30	2523	116
	245	58	31	2640	117
	308	63	32	2759	119
8	375	67	33	2878	119
9	446	71	34	2998	120
10	520	74	35	3119	121
11	598	78	36	3241	122
12	680	82	37	3364	123
13	764	84	38	3487	123
14	851	87	39	3611	124
15	941	90	40	3735	124
16	1033	92	41	3860	125
17	1127	94	42	3986	126
18	1224	97	43	4112	126
19	1323	99	44	4238	126
20	1424	101	45	4364	126
21	1526	102	46	4491	127
22	1631	105	47	4618	127
23	1737	106	48	4745	127
24	1845	108	49	4872	127
25	1955	110	50	5000	128

bertische Segmententafel.

mit einigen Verbesserungen.

A	B	C	A	B	Differenz C
50	5000		75	8045	
51	5128	128	76	8155	110
52	5255	127	77	8263	108
53	5382	127	78	8369	106
54	5509	127	79	8474	105
55	5636	127	80	8576	102
56	5762	126	81	8677	101
57	5888	126	82	8776	99
58	6014	126	83	8873	97
59	6140	126	84	8967	94
60	6265	125	85	9059	92
61	6389	124	86	9149	90
62	6513	124	87	9236	87
63	6636	123	88	9320	84
64	6759	123	89	9402	82
65	6881	122	90	9480	79
66	7002	121	91	9554	74
67	7122	120	92	9625	71
68	7241	119	93	9692	67
69	7360	119	94	9755	63
70	7477	117	95	9813	58
71	7593	116	96	9866	53
72	7708	115	97	9913	47
73	7822	114	98	9952	39
74	7934	112	99	9983	31
75	8045	111	100	10000	17

Die Zahlen der Columne A beziehen sich auf die Höhe eines jeden Segments, in Theilen des Durchmessers = 100.

Lambertische Segmententafel.

mit einigen Verbesserungen.

Die Zahlen der Columne A beziehen sich auf die Höhe eines jeden Segments, in Theilen des Durchmessers = 100.

A	B	Differenz C	A	B	Differenz C
0	0		25	1955	
1	17	17	26	2066	111
2	48	31	27	2178	112
3	87	39	28	2292	114
4	134	47	29	2407	115
5	187	53	30	2523	116
6	245	58	31	2640	117
7	308	63	32	2759	119
8	375	67	33	2878	119
9	446	71	34	2998	120
10	520	74	35	3119	121
11	598	78	36	3241	122
12	680	82	37	3364	123
13	764	84	38	3487	123
14	851	87	39	3611	124
15	941	90	40	3735	124
16	1033	92	41	3860	125
17	1127	94	42	3986	126
18	1224	97	43	4112	126
19	1323	99	44	4238	126
20	1424	101	45	4364	126
21	1526	102	46	4491	127
22	1631	105	47	4618	127
23	1737	106	48	4745	127
24	1845	108	49	4872	127
25	1955	110	50	5000	128

Lambertische Segmententafel,

mit einigen Verbesserungen.

A	B	C	A	B	Differenz C
50	5000		75	8045	
51	5128	128	76	8155	110
52	5255	127	77	8263	108
53	5382	127	78	8369	106
54	5509	127	79	8474	105
55	5636	127	80	8576	102
56	5762	126	81	8677	101
57	5888	126	82	8776	99
58	6014	126	83	8873	97
59	6140	126	84	8967	94
60	6265	125	85	9059	92
61	6389	124	86	9149	90
62	6513	124	87	9236	87
63	6636	123	88	9320	84
64	6759	123	89	9402	82
65	6881	122	90	9480	79
66	7002	121	91	9554	74
67	7122	120	92	9625	71
68	7241	119	93	9692	67
69	7360	119	94	9755	63
70	7477	117	95	9813	58
71	7593	116	96	9866	53
72	7708	115	97	9913	47
73	7822	114	98	9952	39
74	7934	112	99	9983	31
75	8045	111	100	10000	17

Die Zahlen der Columne A beziehen sich auf die Höhe eines jeden Segments in Theilen des Durchmessers = 100.

Einige Druckfehler.

S. 16. Z. 14. statt $\sqrt{2rx - x^2})$ l. $\sqrt{(2rx - x^2)}$

S. 24. Z. 2. statt $\sin \varphi^{m-1}$ l. $\sin \varphi^{m-2}$

S. 450. Z. 11. statt $3a + 2$ l. $3a + 2x$

S. 499. Z. 7. statt $\sqrt{a2 -}$ l. $\sqrt{a^2 -}$

S. 522. Z. 18. statt $r^2 - h^2)$ l. $r^2 - h^2$

S. 611. Z. 7. statt Theiler l. Theile.

Fig. 4

Fig. 3

Fig. 10.

Fig. 9.

Fig. 14

Fig. 17.

Einige Druckfehler.

S. 16. Z. 14. statt $\sqrt{2rx - x^2})$ l. $\sqrt{(2rx -}$

S. 24. Z. 2. statt $\sin\varphi^{m-1}$ l. $\sin\varphi^{m-}$

S. 450. Z. 11. statt $3a + 2$ l. $3a + 2x$.

S. 499. Z. 7. statt $\sqrt{a2 -}$ l. $\sqrt{a^2 -}$

S. 522. Z. 18. statt $r^2 - h^2)$ l. $r^2 - h^2$

S. 611. Z. 7. statt Wheiler l. Theile.

Fig. 4

Fig. 3

Fig. 10.

Fig. 7.

Fig. 14

Fig. 9.

Fig. 17.

